УДК 533:6, 533:9;519.688

# ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВНУТРЕННЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДИСПЕРСНОЙ КОМПОНЕНТЫ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ ИЗ ДВУХФАЗНОЙ ЗАПЫЛЕННОЙ СРЕДЫ В ОДНОРОДНЫЙ ГАЗ*

**Д. А. Тукмаков, Н. А. Тукмакова**

*ИММ — обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН*

Поступила в редакцию 26.12.2018 г.

**Аннотация**. В данной работе на основе численного решения уравнений математической модели динамики многофазной среды-взвеси твёрдых частиц, проводиться моделирование процесса движения прямого скачка уплотнения из запылённой среды в чистый газ с учётом сил электромагнитной природы, воздействующих на дисперсную составляющую двухфазной среды, а также силового и теплового взаимодействия компонент смеси. Выявлены закономерности ударно-волнового течения запылённой среды во внутреннем электромагнитном поле, генерируемом заряженной дисперсной компонентой двухфазной среды.

**Ключевые слова**: численное моделирование, многофазные среды, газовзвеси, ударные волны, электрогидродинамика, электрическое поле.

# NUMERICAL STUDY OF THE INFLUENCE OF THE INTERNAL ELECTRIC FIELD OF A DISPERSED COMPONENT ON THE DISTRIBUTION OF A PLANE SHOCK WAVE FROM A TWO PHASE SPRAYED MEDIA IN A HOMOGENEOUS GAS

**D. A. Tukmakov, N. A. Tukmakova**

**Abstract**. In this paper, based on the numerical solution of the equations of a mathematical model of the dynamics of a multiphase medium-suspension of solid particles, we simulate the process of motion of a direct shock wave from a dusty medium to clean gas, taking into account the forces of electromagnetic nature acting on the dispersed component of a two-phase medium, as well as force and thermal interaction component of the mixture. The patterns of the shock-wave flow of a dusty medium in an internal electromagnetic field generated by a charged dispersed component of a two-phase medium are revealed.

**Keywords**: numerical modeling, multiphase media, gas suspensions, shock waves, electro hydrodynamics, electric field.

.

Многие природные явления и процессы, протекающие в технике связаны с движением сплошных сред являющихся неоднородными по своим механическим и физико-химическим свойствам в связи с этим одним из важных разделов современной механики жидкости и газа является динамика неоднородных сред [1–4]. При этом экспериментальное исследование динамических процессов в неоднородных средах в ряде случаев затруднено и изучение таких

* Исследование выполнено при финансовой поддержке Фонда содействия инновациям в рамках НИР по договору № 15754ГУ/2020.

сред требуют создания математических моделей [4,5]. Неоднородные среды могут быть смесью компонент, имеющих одинаковое агрегатное состояние — гомогенными смесями или же объединением компонент с разными агрегатными состояниями — гетерогенными смесями, что является наиболее сложным в плане математического моделирования [6,7]. Учёт межфазного взаимодействия тем более важен если различные компоненты смеси имеют сопоставимые массовые доли, в таких смесях наблюдаются эффекты отличные от эффектов, выявленных в классической аэро и гидромеханики. Примером таких смесей могут быть взвеси твёрдых или жидких дисперсных включений в газе- газокапельные и запылённые среды. Интерес к математическому моделированию динамики газовзвесей вызван задачами, связанными с оптимизацией установок транспорта порошковых сред, что требует учёта воздействия аэродинамических сил несущей среды на дисперсную составляющую, что так же необходимо и для моделирования процесса экранирования промышленных взрывов запылёнными средами и при описании ударноволновых течений дисперсных сред в реактивных двигателях детонационного типа [8–10]. В то же время оптимизация сверхзвукового напыления порошковых покрытий в электрическом поле требует математических моделей, учитывающих воздействие на гетерогенную смесь сил, имеющих как аэродинамическую, так и электромагнитную природу [11].

В данной работе моделируется течение среды, представляющей собой электрически заряженную газовзвесь монодисперсного состава — предполагается, что все включения дисперсной фазы имеют одинаковый размер и состав, при этом со стороны несущей среды частицы находятся под действием силы аэродинамического сопротивления, силы Архимеда, силы присоединенных масс, также учитывается сила тяжести и сила Кулона действующая со стороны электрического поля, которое создано распределенным зарядом газовзвеси. Для описания ее движения применяется система уравнений динамики многоскоростной и многотемпературной газовзвеси со скоростным и температурным скольжением фаз [1–3]. Математическая модель включает в себя уравнения движения несущей среды и дисперсной фазы. Одним из наиболее важных параметров дисперсной компоненты неоднородной смеси являлась “средняя плотность” — представляющая собой произведение объемного содержания дисперсной компоненты на физическую плотность материала дисперсной фазы [1, 2]. Физическая плотность материала дисперсных включений в процессе течения многофазной среды не изменяется. При этом объемное содержание является функцией временной и пространственных переменных.

Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса для сжимаемого теплопроводного газа с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена [12, 13]:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho_1 u_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_1 u_1^2 + p - \tau_{xx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}\right) = -F_x + \alpha\frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial (\rho_1 v_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_1 v_1^2 - \tau_{yy}\right) = -F_y + \alpha\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial (e_1)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\left[e_1 + p - \tau_{xx}\right] u_1 - \tau_{xy} v_1 + \lambda\frac{\partial T_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\left[e_1 + p - \tau_{yy}\right] v_1 - \tau_{xy} u_1 + \lambda\frac{\partial T_1}{\partial y}\right) =$$

$$= Q_2 - |F_x|(u_1 - u_2) - |F_y|(v_1 - v_2) + \alpha\left(\frac{\partial (pu)}{\partial x} + \frac{\partial (pv)}{\partial y}\right),$$

Тензоры вязких напряжений записываются следующим образом:

$$\tau_{xx} = \mu\left(2\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2}{3}D\right), \tau_{yy} = \mu\left(2\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{2}{3}D\right), \tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right), D = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Динамика дисперсной фазы описывается уравнением сохранения средней плотности, уравнениями сохранения составляющих импульса и уравнением сохранения энергии, записанными с учетом теплообмена, обмена импульсом с несущей фазой и с учетом силы Кулона, действующей на частицы дисперсной фазы:

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_2 u_2)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho_2 v_2)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho_2 u_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho_2 u_2^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_2 u_2 v_2) = F_x - \alpha \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial (\rho_2 v_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_2 u_2 v_2) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_2 v_2^2\right) = F_y - \alpha \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial (e_2)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_2 u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(e_2 v_2) = -Q_2,$$

$$\rho_2 = \alpha_2 \rho_{20}, e_2 = \rho_2 C_{v2} T_2,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \rho q$$

$$F_x = \frac{3}{4}\frac{\alpha}{(2r)} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1-u_2)^2 + (v_1-v_2)^2}\,(u_1-u_2) + \alpha\rho_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) +$$

$$+0.5\alpha\rho_2\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial t} - u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) - q_0\rho_2 \partial\varphi/\partial x,$$

$$F_y = \frac{3}{4}\frac{\alpha}{(2r)} C_d \rho_1 \sqrt{(u_1-u_2)^2 + (v_1-v_2)^2}\,(v_1-v_2) + \alpha\rho_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + +v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) +$$

$$+0.5\alpha\rho_1\left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial t} - u_2\frac{\partial v_2}{\partial x} - v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}\right) - q_0\rho_2 \partial\varphi/\partial y - \rho_2 g,$$

$$V_i = [u_i, v_i]\,, i = 1{,}2; C_{d2}^{=}\frac{24}{Re_{21}} + \frac{4}{Re_{21}^{0.5}} + 0.4,$$

$$M_{21} = \left|\bar{V}_1 - \bar{V}_2\right|/c, Re_{21} = \rho_1\left|\bar{V}_1 - \bar{V}_2\right| 2r/\mu.$$

Здесь $p$, $\rho_1, u_1$, $v_1$ — давление, плотность, декартовы составляющие скорости несущей среды в направлении осей $x$ и $y$ соответственно; $T_1$, $e_1$ — температура и полная энергия газа; $\rho_2, T_2$, $e_2$, $u_2$, $v_2$ — средняя плотность, температура, внутренняя энергия, декартовы составляющие скорости дисперсной фазы в направлении осей $x$, $y$. Температура несущей среды находится из уравнения $T_1 = (\gamma \mathrm{t}1)(e_1/\rho_1 \mathrm{t}0.5(u_1^2 + v_1^2))/R$, где $R$ — газовая постоянная несущей фазы, $\mu$ — вязкость газа, $\lambda$ — теплопроводность газа, $\gamma$ — постоянная адиабаты. Внутренняя энергия взвешенной в газе дисперсной фазы определяется как $e_2 = \rho_2 C_p T_2$, где $C_p$ — удельная теплоемкость единицы массы вещества дисперсной фазы, средняя плотность дисперсной фазы вычисляется из выражения $\rho_2 = \alpha\rho_{20}$, где $\alpha$ — объёмное содержание дисперсной фазы, $\rho_{20}$– физическая плотность материала дисперсной компоненты смеси. В уравнения сохранения энергии для несущей и дисперсной компонент смеси входит тепловой поток за счет теплообмена между газом и частицей: $Q_2 = \alpha^T 4\pi r^2 (T_1 - T_2) n$, где $\alpha^{\mathrm{T}}$ — коэффициент теплообмена на поверхности частица — несущая среда, $n$ — концентрация частиц, $r$ — радиус частицы.

Система уравнений дополнялась соответствующими начальными и граничными условиями. На границах расчетной области задавались граничные условия Дирихле для составляющих скорости несущей и дисперсной фазы и граничные условия Неймана для остальных функций [2, 3].

Составляющие силы Кулона на единицу объема газовзвеси определяются через ее удельный заряд, объемную плотность твердой фазы и напряженность электрического поля [14–17]. Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле. В правой части уравнения Пуассона содержится плотность заряда газовзвеси, отнесенная к абсолютной диэлектрической проницаемости несущей среды [14]:

$$div\mathbf{E} = \frac{\rho_{\text{эл}}}{\varepsilon\varepsilon_0}, \mathbf{E} = -\bar{\nabla}\varphi, \Delta^2\varphi = -\frac{\rho_{\text{эл}}}{\varepsilon\varepsilon_0}, \rho_{\text{эл}} = \rho_1 \cdot q, \varepsilon_0 = \frac{10^{-9}}{36\pi}\text{Ф/м}.$$

где $q_0$ — удельный заряд единицы массы твердой фракции, $\varphi$ — потенциал электрического поля, $\varepsilon = 1$ — относительная диэлектрическая проницаемость воздуха, $\varepsilon_0$ — абсолютная диэлектрическая проницаемость воздуха.

Система уравнений движения двухфазной смеси (1)–(2) в матричном виде имеет вид [18]:

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{E}_x + \mathbf{F}_y = \mathbf{H}; \tag{3}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_1 u_1 \\ \rho_1 v_1 \\ \rho_2 u_2 \\ \rho_2 v_2 \\ e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \rho_1 u_1 \\ \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 - \tau_{xx} \\ \rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy} \\ \rho_2 u_2^2 \\ \rho_2 u_2 v_2 \\ (e_1 + p_1 - \tau_{xx})\, u_1 - \tau_{xy} v_1 + \lambda \partial T_1/\partial x \\ e_2 u_2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho_1 v_1 \\ \rho_2 v_2 \\ \rho_1 u_1 v_1 - \tau_{xy} \\ \rho_1 v_1^2 + p_1 - \tau_{yy} \\ \rho_2 u_2 v_2 \\ \rho_2 v_2^2 \\ (e_1 + p_1 - \tau_{yy})\, v_1 - \tau_{xy} u_1 + \lambda \partial T_1/\partial y \\ e_2 v_2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_x + \alpha \partial p_1/\partial x \\ -F_y + \alpha \partial p_1/\partial x \\ F_x - \alpha(\partial p_1/\partial x) \\ F_y - \alpha(\partial p_1/\partial y) \\ -Q_2 - |F_x|\,(u_1 - u_2) - |F_y|\,(v_1 - v_2) + \alpha\partial\,(p_1 u_1)/\partial x + \alpha\partial\,(p_1 v_1)/\partial y \\ Q_2 \end{bmatrix}.$$

Явная схема Макt Кормака для системы уравнений (3) включает в себя последовательно выполняемые шаги предиктор и корректор:

$$\mathbf{q}^*_{\mathbf{j},\mathbf{k}} = \mathbf{q}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\mathbf{E}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{j+1},\mathbf{k}} - \mathbf{E}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\right) - \frac{\Delta t}{\Delta y}\left(\mathbf{F}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{j},\mathbf{k+1}} - \mathbf{F}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}\right) + \Delta t \mathbf{H}^{\mathbf{n}}_{\mathbf{j},\mathbf{k}}, \tag{4}$$

В расчетах применялась схема расщепления по переменным, реализуемая в виде симметричной последовательности одномерных операторов, позволяющая построить решение на следующем временном слое [18]:

$$\mathbf{q}_{j,k}^{n+1} = \mathbf{P}_x\left(\frac{\Delta t_x}{2}\right)\mathbf{P}_y\left(\frac{\Delta t_y}{2}\right)\mathbf{P}_y\left(\frac{\Delta t_y}{2}\right)\mathbf{P}_x\left(\frac{\Delta t_x}{2}\right)\mathbf{q}_{j,k}^{n}.$$

Переход со слоя $t^n$ на слой $t^{n+1}$ осуществляется следующим образом:

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(1)} = \mathbf{P}_x\left(\frac{\Delta t_x}{2}\right)\mathbf{q}_{j,k}^{n}, \mathbf{q}_{j,k}^{(2)} = \mathbf{P}_y\left(\frac{\Delta t_y}{2}\right)\mathbf{q}_{j,k}^{(1)},$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(3)} = \mathbf{P}_y\left(\frac{\Delta t_y}{2}\right)\mathbf{q}_{j,k}^{(2)}, \mathbf{q}_{j,k}^{n+1} = \mathbf{P}_x\left(\frac{\Delta t_x}{2}\right)\mathbf{q}_{j,k}^{(3)}.$$

Временные шаги $\Delta t_x = \Delta t_y = \Delta t$. Для получения вектора $\mathrm{q}^{(1)}$ нужно применить одномерный оператор $\mathrm{P}_x(\Delta t_x/2)$ по переменной $x$ к вектору газодинамических функций на временном слое $t^n$, и т. д. Одномерные пространственные операторы в результате последовательного выполнения этапов предиктор и корректор переводят решение на следующий слой по времени:

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(1)*} = \mathbf{q}_{j,k}^{n} - \frac{(\Delta t_x/2)}{\Delta x}\left(\mathbf{E}_{j+1,\ \mathrm{k}}^{n} - \mathbf{E}_{j,\ \mathrm{k}}^{n}\right) + \frac{\Delta t_x}{4}\mathbf{H}_{j,k}^{n},$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(1)} = 0{,}5(\mathbf{q}_{j,k}^{n} + \mathbf{q}_{j,k}^{(1)*}) - 0{,}5\frac{(\Delta t_x/2)}{\Delta x}\left(\mathbf{E}_{j,\ \mathrm{k}}^{(1)*} - \mathbf{E}_{j-1,\ \mathrm{k}}^{(1)*}\right) + \frac{\Delta t_x}{8}\mathbf{H}_{j,k}^{(1)*},$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(2)*} = \mathbf{q}_{j,k}^{n} - \frac{(\Delta t_y/2)}{\Delta y}\left(\mathbf{F}_{j,k+1}^{n} - \mathbf{F}_{j,k}^{n}\right) + \frac{\Delta t_y}{4}\mathbf{H}_{j,k}^{(1)},$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(2)} = 0{,}5(\mathbf{q}_{j,k}^{1} + \mathbf{q}_{j,k}^{(2)*}) - 0{,}5\frac{(\Delta t_y/2)}{\Delta y}\left(\mathbf{F}_{j,\ \mathrm{k}}^{(2)*} - \mathbf{F}_{j,\ \mathrm{k\ -\ 1}}^{(2)*}\right) + \frac{\Delta t_y}{8}\mathbf{H}_{j,k}^{(2)*}.$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(3)*} = \mathbf{q}_{j,k}^{(2)} - \frac{(\Delta t_y/2)}{\Delta y}\left(\mathbf{F}_{j,\ \mathrm{k}+1}^{(2)} - \mathbf{F}_{j,\ \mathrm{k}}^{(2)}\right) + \frac{\Delta t_y}{4}\mathbf{H}_{j,k}^{(2)},$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{(3)} = 0{,}5(\mathbf{q}_{j,k}^{(2)} + \mathbf{q}_{j,k}^{(3)*}) - 0{,}5\frac{(\Delta t_y/2)}{\Delta y}\left(\mathbf{F}_{j,\ \mathrm{k}}^{(3)*} - \mathbf{F}_{j,\ \mathrm{k\ -\ 1}}^{(3)*}\right) + \frac{\Delta t_y}{8}\mathbf{H}_{j,k}^{(3)*},$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{n+1*} = \mathbf{q}_{j,k}^{(3)} - \frac{(\Delta t_x/2)}{\Delta x}\left(\mathbf{E}_{j+1,\ \mathrm{k}}^{(3)} - \mathbf{E}_{j,\ \mathrm{k}}^{(3)}\right) + \frac{\Delta t_x}{4}\mathbf{H}_{j,k}^{(3)},$$

$$\mathbf{q}_{j,k}^{n+1} = 0{,}5(\mathbf{q}_{j,k}^{(3)} + \mathbf{q}_{j,k}^{n+1*}) - 0{,}5\frac{(\Delta t_x/2)}{\Delta x}\left(\mathbf{E}_{j,\ \mathrm{k}}^{n+1*} - \mathbf{E}_{j-1,\ \mathrm{k}}^{n+1*}\right) + \frac{\Delta t_x}{8}\mathbf{H}_{j,k}^{(n+1)*}.$$

Производные по пространственным переменным в векторах потоков **E** и **F** на шагах предиктор и корректор аппроксимируются при помощи односторонних конечно-разностных операторов. На шаге предиктор для представления производных по $x$, входящих в $E_{j+1,k}^{n}$, $E_{j,k}^{n}$ применяются левые разностные схемы первого порядка точности. На шаге корректор - правые. Производные по $y$ приближаются центральными разностными схемами второго порядка. Производные по $y$ , входящие в $F_{j,k+1}^{n}$, $F_{j,k}^{n}$ аппроксимируются на шаге предиктор левыми разностными схемами первого порядка, а на шаге корректор правыми. Используются центральные разностные производные по $x$ в $F_{j,k+1}^{n}$, $F_{j,k}^{n}$.

Система уравнений записывалась в обобщенных криволинейных координатах: физическая область течения в переменных $(x,y,t)$ отображалась на каноническую расчетную область в переменных $(\xi\ ,\eta\ ,t)$ и решалась явным методом Мак-Кормака второго порядка в обобщенных координатах [18] с последующим применением схемы нелинейной коррекции решения.

Монотонность решения достигалась с помощью применения следующего алгоритма [19] к вектору функций $-U = (\rho_1, u_1, v_1, e_1,\ \rho_2, u_2, v_2, e_2)^{\mathrm{T}}$ системы уравнений после перехода на новый временной слой при $t = t^{n+1}$. Алгоритм коррекции выполнялся последовательно вдоль координаты $\xi$, а затем вдоль координаты $\eta$ в расчетной области [19]. Нижний индекс обозначает номер узла сетки соответственно вдоль $\xi$ или $\eta$: $\mathbf{U}_j = \widetilde{\mathbf{U}}_j + k\left(\delta\mathbf{\Phi}_{j+1/2} - \delta\mathbf{\Phi}_{j-1/2}\right)$, где $\delta\mathbf{\Phi}_{j+1/2} = \delta\widetilde{\mathbf{U}}_{j+1/2}$, если $\left(\delta\widetilde{\mathbf{U}}_{j-1/2} \cdot \delta\widetilde{\mathbf{U}}_{j+1/2}\right) < 0$, или $\left(\delta\widetilde{\mathbf{U}}_{j+1/2} \cdot \delta\widetilde{\mathbf{U}}_{j+3/2}\right) < 0$, и $\delta\Phi_{j+1/2} = 0$ в любом другом случае.


$$p_2 > p_1 \quad q = -0.001 \text{ Кл/кг}.$$

Рис. 1. *Схематичное изображение ударной трубы один из отсеков которой заполнен заряженной газовзвесью.*

Здесь использованы обозначения: $\delta\widetilde{\mathbf{U}}_{j-1/2} = \widetilde{\mathbf{U}}_j - \widetilde{\mathbf{U}}_{j-1}$, $\delta\widetilde{\mathbf{U}}_{j+1/2} = \widetilde{\mathbf{U}}_{j+1} - \widetilde{\mathbf{U}}_j$, $\delta\widetilde{\mathbf{U}}_{j+3/2} = \widetilde{\mathbf{U}}_{j+2} - \widetilde{\mathbf{U}}_{j+1}$, где $\widetilde{\mathbf{U}}_j$ — значение функции после перехода на $(n+1)$-ый временной слой по схеме Мак-Кормака, коэффициент $k = 0.125$.

Уравнение Пуассона для потенциала электрического поля записывалось в обобщенных координатах и решалось методом конечных разностей с помощью итерационной схемы метода установления [20] на газодинамической расчетной сетке.

В статье [12] численно моделировалось распространение ударной волны из газовзвеси в чистый газ с использованием математической модели гетерогенной среды и численного алгоритма Мак-Кормака, физический эксперимент по данной задаче был проведён в работе [21]. В экспериментальной работе были выявлены количественные и качественные отличия динамики газа в случае присутствия дисперсной фазы в камере высокого давления, что также согласуется с рядом работ посвященных численному моделированию течений запылённых сред [8–10]. Анализ результатов, полученных в работах [12, 21], показывает удовлетворительное соответствие данных численного и физического экспериментов, а также качественное отличие динамики разлёта запыленной среды от известных из литературы аналитических

Таблица 1. *Максимальные значения отличий давления газа на одинаковых участках волн сжатия и разряжения при моделировании разлёта нейтральной и электрически заряженной дисперсной фазы в различные моменты времени.*

| Момент времени в миллисекундах | Максимальная разность давлений в расчётах разлёта нейтральной и электрически заряженной запылённых сред на участке между волной сжатия и волной разряжения | Максимальная разность давлений в расчётах разлёта нейтральной и электрически заряженной запылённых сред на участке волны разряжения |
|---|---|---|
| t=5.83 мс | Δp=6.8 мбар | Δp=3.58 мбар |
| t=11.6 мс | Δp=18.24 мбар | Δp=14.18 мбар |
| t=17.4 мс | Δp=30.19 мбар | Δp=24.84 мбар |
| t=23.3 мс | Δp=40.81 мбар | Δp=37.4 мбар |

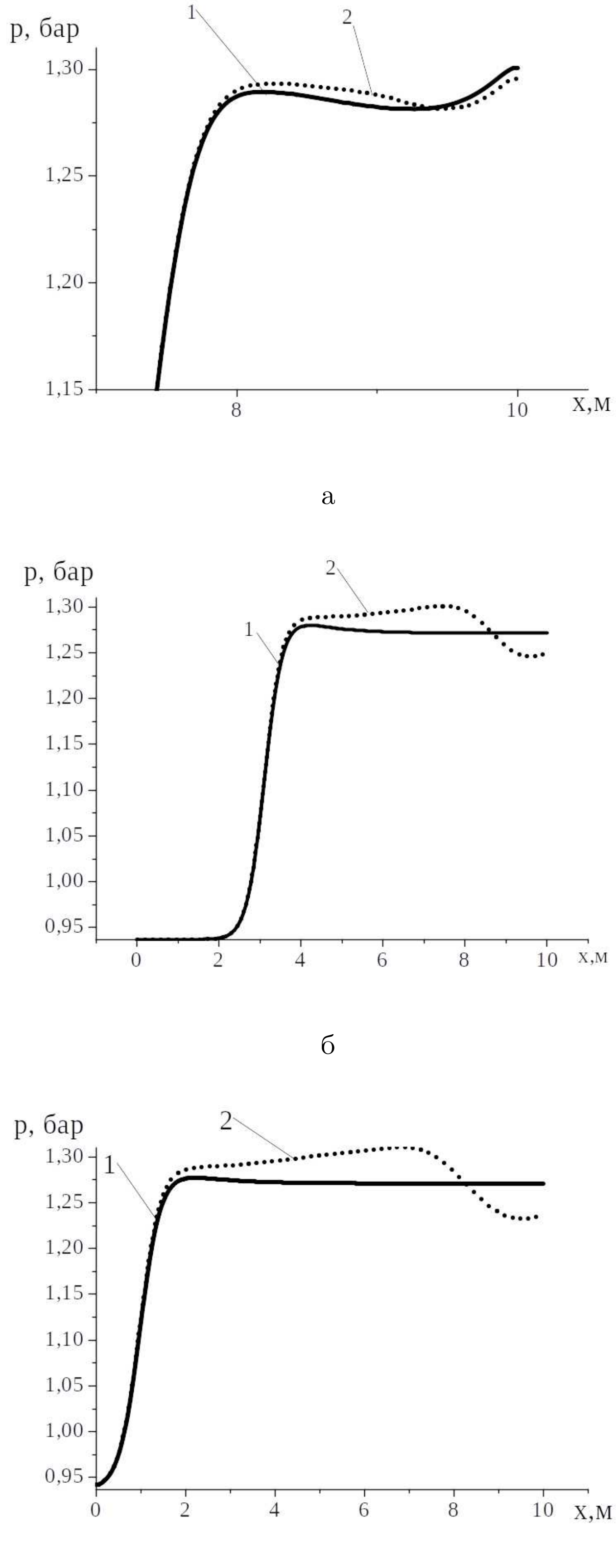
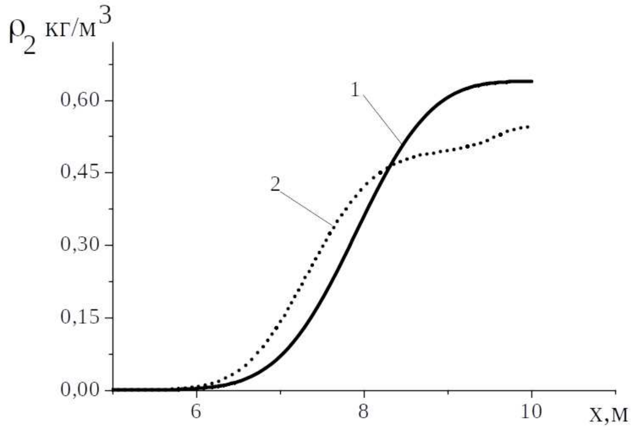
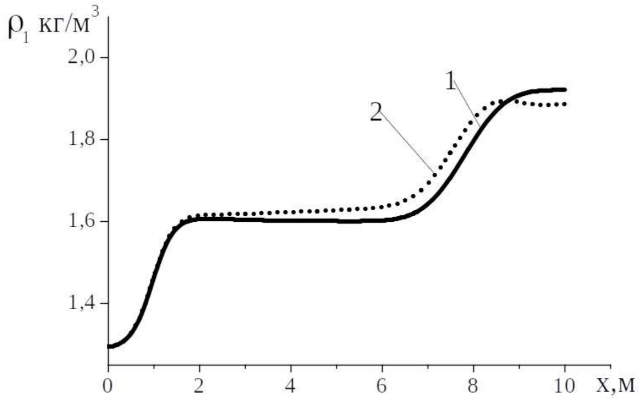



Рис. 2. *Пространственные распределения давления газа в случае в случае распада разрыва из электрически нейтральной газовзвеси — кривая* 1 *и из заряженной газовзвеси — кривая* 2*. В моменты времени* $t = 5.83$ *мс*, $t = 17.4$ *мс*, $t = 23.3$ *мс.*




а




б

Рис. 3. *Пространственное распределение средней плотности дисперсной фазы — рис. а, и плотности газа — рис. б в момент времени* $t = 23.3$ *мс, кривая — 1 численный расчёт для электрически нейтральной газовзвеси, кривая-2, численный расчёт с учётом силы Кулона.*

решений для чистого газа [22].

В настоящей работе делается попытка определить влияние наличия электрического заряда дисперсной фазы на ударно-волновое истечение запыленной среды в плоском канале.

На рисунке 1 схематично изображена ударная труба [21]; камера высокого давления, которой заполнена сжатым газом, содержащим в себе дисперсную фазу — то есть сжатой газовзвесью, а камера низкого давления заполнена чистым газом, имеющим более низкое давление. Начальное объёмное содержание дисперсной фазы в камере высокого давления предполагалось равным $\alpha = 0.0001$. Истинная физическая плотность дисперсной фазы была равна плотности нихрома — $\rho_{20} = 8400$ кг/м$^3$, часто наносимого на поверхности деталей покрытия.

Интенсивность начального разрыва давлений $p_2/p_1 = 2$ предполагалась равной двум. На рисунке 2 (а-в) представлены пространственные распределения давления газа в различные моменты времени при движении прямого скачка уплотнения из электрически нейтральной и из заряженной газовзвеси в чистый газ. В разлёте электрически заряженной газовзвеси наблюдается повышение давления газа на участке после прохождения волны сжатия, что отсутствует в процессе разлёта электрически нейтральной запылённой среды, где наибольшей величины давление достигается непосредственно на фронте ударной волны. Одновременно с этим при наличии электрического заряда у частиц дисперсной фазы давление газа в волне разряжения имеет существенно меньшее значение, чем при разлёте двухфазной среды с электрически нейтральной дисперсной компонентной. Также можно отметить, что со временем увеличивается отличие значений давления газа в волнах сжатия и разряжения что отображено в таблице 1.

На рисунке 3,а представлено сопоставление пространственных распределений плотности дисперсной фазы, полученной в численных расчётах, учитывающих и не учитывающих силы Кулона и как следует из рисунка заряженная газовзвесь быстрее распространяется в камеру низкого давления, что может быть объяснено тем, что все частицы заряженной дисперсной фазы, имеют заряд одинакового знака а значит отталкиваются.

За счёт отталкивания частиц дисперсная фаза ускоряется в направлении движения волны сжатия, при этом концентрация дисперсной фазы на участке волны разряжения становится меньше, а на участке волны сжатия больше. Использование математической модели взаимообратного влияния несущей и дисперсной компоненты смеси позволяет учесть влияние изменения концентрации дисперсной составляющей запылённой среды на давление и скорость газа-рис.3,б. В следствии воздействия сил электромагнитной природы массоперенос дисперсной фазы в направлении движения ударной волны происходит быстрее, что за счет межфазного силового взаимодействия приводит к тому, что ускоряется течение несущей среды в направлении ударной волны, в свою очередь это уменьшает давление в волне разряжения и увеличивает давление газа вблизи фронта ударной волны.

## ВЫВОДЫ

Численное моделирование показало, что наличие электрического заряда твёрдых частиц влияет не только на процесс перераспределения средней плотности дисперсной фазы, но и на параметры движущегося газа. При этом по причине более быстрого перераспределения дисперсной фазы в направлении движения ударной волны происходит рост давления в газе движущемся за волной сжатия и уменьшение давления газа находящегося на участке разряжения. Таким образом, электрически заряженная дисперсная фаза позволяет влиять на параметры газа при движении скачка уплотнения в плоском канале.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. Нигматулин, Р. И. Динамика многофазных сред / Р. И. Нигматулин. — М. : Наука, 1987. — 464 с.

2. Кутушев, А. Г. Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах / А. Г. Кутушев. — СПб. : Недра, 2003. — 284 с.

3. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах / С. Г. Киелев и др. — Новосибирск : Наука, 1992. — 261 с.

4. Varaksin, A. Y. Clusterization of particles in turbulent and vortex two-phase flows / A. Y. Varaksin // High Temperature. — 2014. — V. 52, № 5. — P. 752–769.

5. Varaksin, A. Y. Analysis of the deposition processes of solid particles onto channel walls / A. Y. Varaksin, M. V. Protasov, V. P. Yatsenko // High Temperature. — 2013. — V. 51, № 5. — P. 665–672.

6. Sadin, D. V. TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type / D. V. Sadin // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2016. — V. 56, № 12. — P. 2068–2078.

7. Glazunov, A. A. Numerical investigation of the flow of ultradisperse particles of the aluminum oxide in the solid-fuel rocket engine nozzle / A. A. Glazunov, N. N. Dyachenko, L. I. Dyachenko

// Thermophysics and Aeromechanics. — 2013. — V. 20, № 1. — P. 79–86.

8. Fedorov, A. V. Numerical study of shock-wave diffraction in variable-section channels in gas suspensions / A. V. Fedorov, Y. V. Kratova, T. A. Khmel // Combustion, Explosion, and Shock Waves. — 2008. — V. 44, № 1. — P. 76–85.

9. Verevkin, A. A. Flow of a dispersed phase in the laval nozzle and in the test section of a two-phase hypersonic shock tunnel / A. A. Verevkin, Y. M. Tsirkunov // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. — 2008. — V. 49, № 5. — P. 789–798.

10. Бедарев, И. А. Структура и устойчивость ударной волны в газовзвеси с двумя давлениями / И. А. Бедарев, А. В. Федоров // Вычислительные технологии. — 2015. — № 2. — С. 3–19.

11. Zinchenko, S. P. Accumulation of products of ferroelectric target sputtering in the plasma of an rf glow discharge / S. P. Zinchenko, G. N. Tolmachev // Plasma Physics Reports. — 2013. — V. 39, № 13. — P. 1096–1098.

12. Nigmatulin, R. I. Shock wave dispersion of gas–particle mixtures / R. I. Nigmatulin, D. A. Gubaidullin, D. A. Tukmakov // Doklady Physics. — 2016. — V. 61, № 2. — P. 70–73.

13. Tukmakov, A. L. Flow of polydisperse gas-particle mixture in a duct followed by coagulation in a nonlinear wave field / A. L. Tukmakov, R. I. Bayanov, D. A. Tukmakov // Thermophysics and Aeromechanics. — 2015. — V. 22, № 3. — P. 305–311.

14. Сальянов, Ф. А. Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий / Ф. А. Сальянов. — М. : Наука, 1997. — 240 с.

15. Konik, A. A. A difference scheme for plasma wakefield simulation / A. A. Konik , E. V. Chizhonkov // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2016. — V. 71, № 1. — P. 27–30.

16. Dikalyuk, A. S. Numerical simulation of rarefied dusty plasma in a normal glow discharge / A. S. Dikalyuk, S. T. Surzhikov // High Temperature. — 2012. — V. 50, № 5. — P. 571–578.

17. Тукмаков, Д. А. Математическая модель массопереноса и волновых процессов в плазме / Д. А. Тукмаков // Сборник тезисов, материалы Двадцать третьей Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых (ВНКСФ-23, Екатеринбург), Екатеринбург, Издательство АСФ России. — 2017. — С. 195–196.

18. Fletcher, C. A. Computation Techniques for Fluid Dynamics / C. A. Fletcher. — Springer-Verlang, Berlin, 1988. — 502 p.

19. Музафаров, И. Ф. Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа / И. Ф. Музафаров, С. В. Утюжников // Математическое моделирование. — 1993. — № 3. — С. 74–83.

20. Крылов, В. И. Вычислительные методы. Т. 2 / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. — М. : Наука, 1977. — 401 с.

21. Ударные волны при разлете сжатого объема газовзвеси твёрдых частиц / Б. Е. Гельфанд, А. В. Губанов, Е. И. Медведев, С. А. Цыганов // ДАН СССР. — 1985. — Т. 281, № 5. — С. 1113–1116.

22. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. — М. : Издательство «Дрофа», 2003. — 784 с.

23. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для математической модели с негладкими решениями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 2. — С. 153–164.

24. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для решения граничной задачи с дифференциалами Стилтьеса на геометрическом графе / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Е. В. Лылов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 1. — С. 97–105.

25. Об адаптации метода конечных элементов для модели колебаний струны с разрывными

решениями / Ж. И. Бахтина, Ж. О. Залукаева, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 106–117.

26. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Ф. В. Голованёва // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 145–157.

27. Зверева, М. Б. Об адаптации метода конечных элементов для задачи с разрывными решениями / М. Б. Зверева, С. А. Шабров, Ж. О. Залукаева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 112–120.

28. Об адаптации метода конечных элементов для математической модели шестого порядка / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 77–90.

29. Баев, А. Д. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, В. В. Панков, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 161–171.

## REFERENCES

1. Nigmatulin R.I. Dynamics of multiphase media. [Nigmatulin R.I. Dinamika mnogofaznyh sred]. Moscow, 1987, 464 p.

2. Kutushev A.G. Mathematical modeling of wave processes in aerodispersed and powdery media. [Kutushev A.G. Matematicheskoe modelirovanie volnovyh processov v aerodispersnyh i poroshkoobraznyh sredah]. SPb. Nedra, 2003, 284 p.

3. Kisilev S.G., Ruev G.A., Trunev A.P., Fomin V.F., Shavaliev M.S. Shock-wave processes in two-component and two-phase media. [Kisilev S.G., Ruev G.A., Trunev A.P., Fomin V.F., Shavaliev M.S. Udarno-volnovye processy v dvuhkomponentnyh i dvuhfaznyh sredah]. Novosibirsk, 1992, 261 p.

4. Varaksin A.Y. Clusterization of particles in turbulent and vortex two-phase flows. High Temperature, 2014, no. 5 (52), pp. 752–769.

5. Varaksin A.Y., Protasov M.V., Yatsenko V.P. Analysis of the deposition processes of solid particles onto channel walls. High Temperature, 2013, no. 5, pp. 665–672.

6. Sadin D.V. TVD scheme for stiff problems of wave dynamics of heterogeneous media of nonhyperbolic nonconservative type. Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, no. 12 (56), pp. 2068–2078.

7. Glazunov A.A., Dyachenko N.N., Dyachenko L.I. Numerical investigation of the flow of ultradisperse particles of the aluminum oxide in the solid-fuel rocket engine nozzle. Thermophysics and Aeromechanics, 2013, no. 1 (20), pp. 79–86.

8. Fedorov A.V., Kratova Y.V., Khmel T.A. Numerical study of shock-wave diffraction in variable-section channels in gas suspensions. Combustion, Explosion, and Shock Waves, 2008, no. 1 (44), pp. 76–85.

9. Verevkin A.A., Tsirkunov Y.M. Flow of a dispersed phase in the laval nozzle and in the test section of a two-phase hypersonic shock tunnel. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2008, no. 5 (49), pp. 789–798.

10. Bedarev I.A. Structure and stability of a shock wave in a gas suspension with two pressures. [Bedarev I.A. Struktura i ustojchivost' udarnoj volny v gazovzvesi s dvumya davleniyami]. *Vychislitel'nye tekhnologii — Computational technologies*, 2015, no. 2, pp. 3–19.

11. Zinchenko S.P., Tolmachev G.N. Accumulation of products of ferroelectric target sputtering in the plasma of an rf glow discharge. Plasma Physics Reports, 2013, no. 13 (39), pp. 1096–1098.

12. Nigmatulin R.I., Gubaidullin D.A., Tukmakov D.A. Shock wave dispersion of gas – particle mixtures. Doklady Physics, 2016, no. 2 (61), pp. 70–73.

13. Tukmakov A.L., Baynov D.A., Tukmakov D.A. Flow of polydisperse gas-particle mixture

in a duct followed by coagulation in a nonlinear wave field. Thermophysics and Aeromechanics, 2015, no. 3 (22), pp. 305–311.

14. Salyanov F.A. Fundamentals of physics of low-temperature plasma, plasma devices and technologies. [Salyanov F.A. Osnovy fiziki nizkotemperaturnoj plazmy, plazmennyh apparatov i tekhnologij]. Moscow, 1997, 240 p.

15. Konik A.A., Chizhonkov E.V. A difference scheme for plasma wakefield simulation. Moscow University Mathematics Bulletin, 2016, no. 1 (71), pp. 27–30.

16. Dikalyuk A.S., Surzhikov S.T. Numerical simulation of rarefied dusty plasma in a normal glow discharge. High Temperature, 2012, no. 5 (50), pp. 571–578.

17. Tukmakov D.A. Mathematical model of mass transfer and wave processes in plasma. [Tukmakov D.A. Matematicheskaya model' massoperenosa i volnovyh processov v plazme]. Collection of abstracts, materials of the Twenty-third All-Russian Scientific Conference of Physicist Students and Young Scientists (VNKSF-23, Yekaterinburg), Yekaterinburg, Publishing House of ASF Russia, 2017, pp. 195–196.

18. Fletcher C.A. Computation Techniques for Fluid Dynamics. Springer-Verlang, Berlin, 1988, 502 p.

19. Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. Application of compact difference schemes to the study of unsteady flows of compressible gas. [Muzafarov I.F., Utyuzhnikov S.V. Primenenie kompaktnyh raznostnyh skhem k issledovaniyu nestacionarnyh techenij szhimaemogo gaza]. *Matematicheskoe modelirovanie — Mathematical modeling*, 1993, no. 3, pp. 74–83.

20. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrny P.I. Computational methods. [Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrny P.I. Vychislitel'nye metody]. Moscow, 1977, 401 p.

21. Gelfand B.E., Gubanov A.V., Medvedev E.I., Tsyganov S.A. Shock waves during expansion of a compressed volume of a gas suspension of solid particles. [Gelfand B.E., Gubanov A.V., Medvedev E.I., Tsyganov S.A. Udarnye volny pri razlete szhatogo ob'ema gazovzvesi tvyordyh chastic]. *Doklady akademii nauk SSSR — Reports of the USSR Academy of Sciences-DAN SSSR*, 1985, no. 5 (281), pp. 1113–1116.

22. Loytsyansky L.G. Mechanics of liquid and gas. [Loytsyansky L.G. Mekhanika zhidkosti i gaza]. Moscow, 2003, 784 p.

23. Shabrov S.A. Adaptation of the finite element method for mathematical model with nonsmooth solutions. [Shabrov S.A. Adaptaciya metoda konechnyx elementov dlya matematicheskoyj modeli s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 2, pp. 153–164.

24. Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lilov E.V. About the adaptation of the method of finite elements for the solution of a boundary value problem with Stieltjes differentials on a geometric graph. [Zvereva M.B., Shabrov S.A., Lylov E.V. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya resheniya granichnoyj zadachi s differencialami Stilt'esa na geometricheskom grafe]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 1, pp. 97–105.

25. Bakhtina Zh.I., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On the adaptation of the finite elements method for a model of string oscillations with discontinuous solutions. [Baxtina Zh.I., Zalukaeva Zh.O., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya modeli kolebaniyj struny s razryvnymi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 106–117.

26. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Golovaneva F.V. Adaptation of the finite element method for different order mathematical model with nonsmooth solutions. [Shabrov S.A., Bugakova N.I.,

Golovanyova F.V. Adaptaciya metoda konechnyx elementov dlya raznoporyadkovoyj matematicheskoyj modeli]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 145–157.

27. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. The adaptation of the finite elements method for a problem with discontinuous solutions. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya zadachi s razryvnymi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 4, pp. 112–120.

28. Baev A.D., Borodina E.A., Golovanova F.V., Shabrov S.A. The adaptation of the finite element method for the mathematical model of the sixth order. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob adaptacii metoda konechnyx elementov dlya matematicheskoyj modeli shestogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 77–90.

29. Baev A.D., Pankov V.V., Kharchenko V.D. On an a priori estimate for solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation. [Baev A.D., Pankov V.V., Kharchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 161–171.

*Тукмаков Дмитрий Алексеевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории механики сплошных сред Федерального научного центра «Казанский научный центр Российской академии наук», Казань, Россия*
*E-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru*
*Тел.: +7(843)236–52–89*

*Tukmakov Dmitry Alekseevich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Researcher, Laboratory of Continuum Mechanics, Federal Scientific Center «Kazan Scientific Center of the Russian Academy of Sciences», Kazan, Russia*
*E-mail: tukmakovDA@imm.knc.ru*
*Tel.: +7(843)236–52–89*

*Тукмакова Надежда Алексеевна, кандидат технических наук, преподаватель кафедры теоретических основ теплотехники, Казанский национальный исследовательский технический университет, КНИТУ-КАИ Казань, Россия*
*E-mail: nadejdatukmakova@yandex.ru*
*Тел.: 8(843)238–55–50*

*Tukmakova Nadezhda Alekseevna, candidate of technical sciences, assistant at the department of Theoretical Foundations of Heat Engineering, Kazan National Research Technical University, KNRTU-KAI Kazan, Russia*
*E-mail: nadejdatukmakova@yandex.ru*
*Tel.: 8(843)238–55–50*