

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ФОРМЕ ДВУМЕРНОЙ ВИСЯЩЕЙ КАПЛИ И ИХ СВОЙСТВА

А. А. Сокуров

Институт прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино–Балкарский научный центр Российской академии наук»

Поступила в редакцию 06.03.2018 г.

Аннотация. В двумерной постановке исследуется задача о форме висящей капли, находящейся в условиях механического равновесия под действием сил поверхностного натяжения и силы тяжести. С использованием формулы Лапласа для избыточного давления получены параметрические представления точных решений задачи в терминах эллиптических интегралов. На основе аналитических и численных методов проведено исследование зависимости меридионального сечения капли от параметров задачи. Установлены экстремальные значения таких важных характеристик равновесных конфигураций двумерной висящей капли, как высота, диаметр и площадь сечения.

Ключевые слова: висящая капля, формула Лапласа, поверхностное натяжение, капиллярное давление, эллиптические интегралы.

EXACT SOLUTIONS OF THE SHAPING PROBLEM IN TWO-DIMENSIONAL CASE AND THEIR PROPERTIES

A. A. Sokurov

Abstract. In this paper we study the shaping problem for the two-dimensional and axisymmetric pendant drops hanging under gravity from a solid surface. Using the Young-Laplace equation for excess pressure we obtain exact solutions of the problem in terms of elliptic integrals. Analytical and numerical studies are carried out on the dependence of the meridional section of the drop on the parameters of the mathematical model. The maximum values of such important characteristics of the equilibrium configurations of a two-dimensional pendent drop as height, diameter and cross-sectional area are found.

Keywords: pendant droplet, Young-Laplace equation, surface tension, capillary pressure, elliptic integrals.

1. ВВЕДЕНИЕ

Частным случаем висящей капли является двумерная или, как ее иногда называют, цилиндрическая капля [1]. Она свисает с участка горизонтальной плоскости, зажатого между двумя вертикальными параллельными пластинами, находящимися на очень близком расстоянии друг от друга. Это расстояние настолько мало, что искривлением свободной поверхности капли в направлении перпендикулярном пластинам можно пренебречь. В силу такого допущения мениск считается цилиндрической поверхностью, направляющая которой совпадает с профилем капли. При рассмотрении некоторых проблем теории капиллярности и смачиваемости не существует принципиальной разницы между двумерной и трехмерной (сферической) каплями. Выводы теории для каждой из них будут частично совпадать [2]. В то же время, математическая сторона вопроса для двумерного случая во многом сильно упрощается. Это

касается также задачи определения равновесной формы капель и пузырьков. Действительно, для любой цилиндрической поверхности радиус кривизны в одном из главных направлений, а именно, совпадающей с направлением образующей, равен бесконечности. Тем самым средняя кривизна, а стало быть и избыточное давление в каждой точке такой разделяющей поверхности, определяется только кривизной направляющей.

В работах [1], [3], [4], [5], [8], [6], [7], [9] были рассмотрены различные подходы к решению задачи определения равновесного профиля двумерной капли, висящей на неподвижной опоре в гравитационном поле. В частности, были установлены условия существования таких капель в равновесном состоянии, а также найдена определенная аналогия между профилем двумерной капли и тонкой деформированной балкой. В работе [10] в двумерной постановке исследована задача о равновесной конфигурации свободной поверхности идеально проводящей жидкости, деформированной магнитным полем системы линейных проводников с токами. В данном случае равновесие достигалось за счет баланса капиллярного и магнитного давлений, а точные решения задачи найдены с использованием метода конформных отображений. В целом, можно полагать, что исследования в данной области имеют большое фундаментальное и прикладное значение; эти исследования могут сыграть конструктивную роль, например, при изучении свойств супергидрофобных материалов и различных явлений в микро- и нанофлюидике.

В настоящей работе рассматривается задача о равновесной форме двумерной висящей капли в поле силы тяжести. Точное решение искомой задачи выписано в терминах эллиптических интегралов первого и второго родов. По полученным формулам проведен анализ, который наглядно иллюстрируют возможные изменения формы и характеристик двумерной висящей капли в зависимости от входных параметров модели.

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДВУМЕРНОЙ ВИСЯЩЕЙ КАПЛИ И СВОЙСТВА ЕЕ РЕШЕНИЙ

Будем рассматривать осесимметричную двумерную каплю, подвешенную к горизонтальной поверхности. Свяжем с ней систему декартовых координат так, как показано на рис. 1. Уравнение, определяющее баланс сил поверхностного натяжения и силы тяжести, имеет вид

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d^2 z/dx^2}{[1 + (dz/dx)^2]^{3/2}} = \lambda - \beta z, \quad (1)$$

где R — радиус кривизны в произвольной точке (x, z) меридионального сечения, φ — угол наклона касательной, s — длина дуги вдоль профиля, отмеряемая от начала координат, $\lambda > 0$ и $\beta > 0$ — физико-геометрические параметры капли. Заметим, что уравнение (1) является частным случаем трехмерной модели висящей капли [11], в которой отсутствует вклад азимутальной кривизны.

Несложно показать, что (1) эквивалентно следующей системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{dU}{ds} = \sin \varphi, \\ \frac{dX}{ds} = \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{ds} = -U, \\ \frac{dA}{ds} = 2X \sin \varphi, \end{cases} \quad (2)$$

к которой добавим начальные условия

$$U(0) = U_0, \quad X(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad A(0) = 0. \quad (3)$$

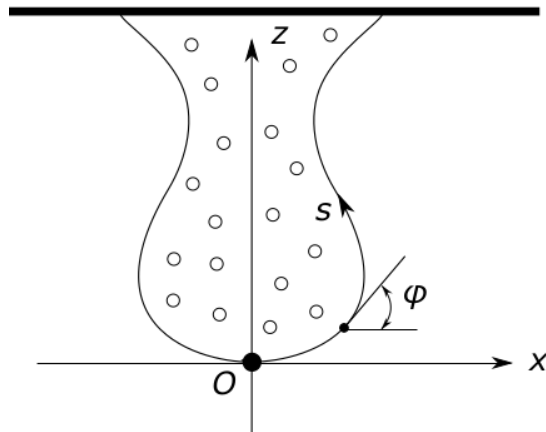


Рис. 1. Двумерная висящая капля и связанная с ней система координат.

Система (2) приведена к безразмерному виду путем отнесения пространственных координат к капиллярной длине $\beta^{-1/2}$. Часто, в трехмерном случае, в (2) включают уравнения для объема и площади боковой поверхности. В данном случае вместо них в нее включена функция $A(S)$, выражающая площадь области, ограниченной профилем и прямой $U = \text{const}$.

На рис. 2 изображены типичные профили двумерной капли, полученные путем численного решения (2) – (3) при различных значениях параметра U_0 . И хотя они построены для конечного набора U_0 , представляется возможным выделить некоторые закономерности, характерные для каждого из них:

1. Все профили имеют вид S – образной кривой, которая “выпрямляется” при увеличении $|U_0|$.
2. Угол φ как функция от длины S дуги сначала монотонно возрастает вплоть до точки $U = 0$, а затем монотонно убывает до нуля.
3. Если $\varphi|_{U=0} > \frac{\pi}{2}$, то кривая имеет два выпуклых и два вогнутых сегмента, иначе – по одному.
4. Точки профиля, симметричные относительно оси U , будут симметричны и относительно прямой $X = X|_{U=0}$. При этом угол наклона φ в каждой из них одинаков.

Справедливость свойства (2) и частично (1) для всех U_0 вытекает непосредственно из третьего уравнения в (2): из него видно, что в области $U < 0$ производная $\frac{d\varphi}{dS}$ положительна, в области $U > 0$ – отрицательна, и равно нулю только в точке $U = 0$. Значит, при движении из апекса вдоль кривой угол φ монотонно возрастает, достигает максимума в точке пересечения с осью U и далее монотонно убывает до нуля. Иными словами, $\varphi = \varphi(S)$ на всем участке является вогнутой функцией, удовлетворяющей условиям теоремы Ролля. Такое поведение $\varphi(S)$ исключает возможность существования двумерных кельвиновских капель, так как в противном случае она должна была быть сильно осциллирующей функцией. Если U_0 такое, что $\varphi|_{U=0} > \frac{\pi}{2}$, то точек, в которых $\varphi = \frac{\pi}{2}$, по свойству (2) будет ровно два – по одному в каждой полуплоскости $U < 0$ и $U > 0$. В этих двух точках, а также в точке $U = 0$, расположенной между ними, профиль меняет характер своей выпуклости. Если же $\varphi|_{U=0} \leq \frac{\pi}{2}$, то будет существовать только одна точка перегиба $U = 0$. Из всего этого следует справедливость свойства (3).

Приступим теперь к нахождению точного решения задачи о висящей двумерной капле. Для этого за основу возьмем третье уравнение системы (2). Умножая обе его части на $\sin \varphi$

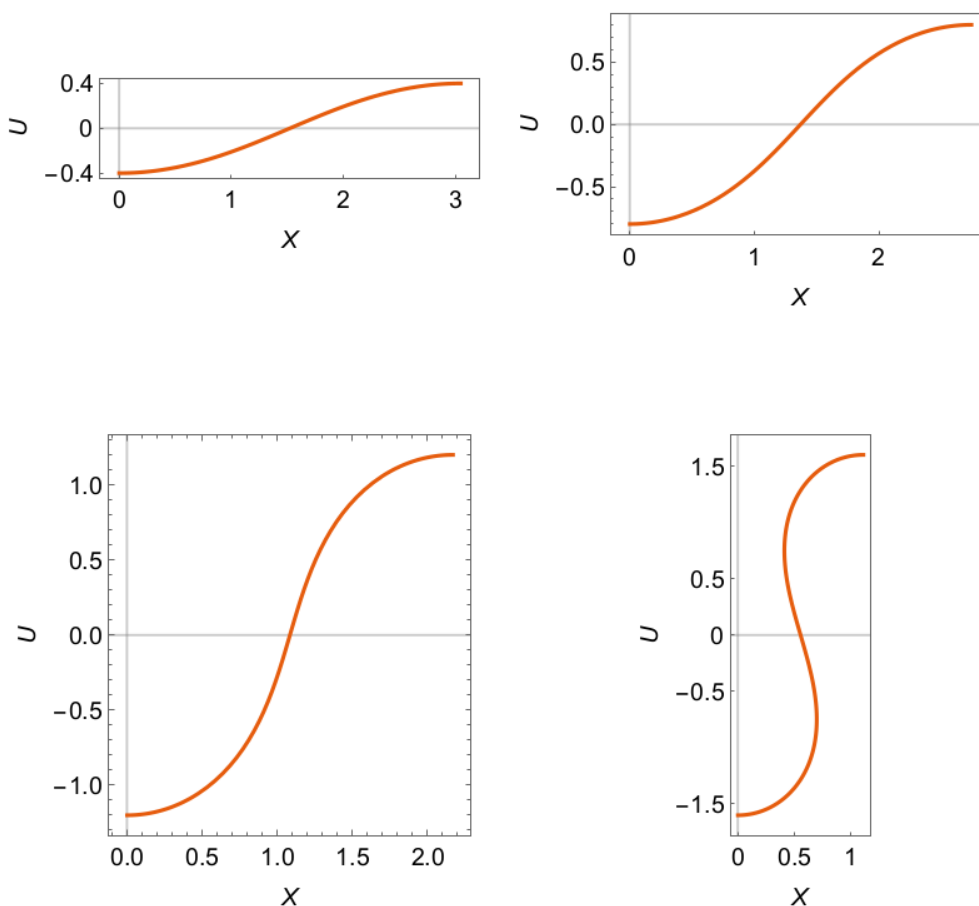


Рис. 2. Возможные профили двумерной висящей капли.

и принимая во внимание, что $U_s = \sin \varphi$ из него получим

$$d \cos \varphi = d \left(\frac{U^2}{2} \right). \quad (4)$$

Проинтегрируем (4) по переменной S от 0 до произвольного S :

$$\cos \varphi = \frac{U^2}{2} + C, \quad (5)$$

где постоянная интегрирования $C = 1 - \frac{U_0^2}{2}$. Отметим, что равенство (5) выполняется в каждой точке профиля капли. Наибольшего значения φ достигнет при наименьшем значении правой части, так как косинус в промежутке $[0, \pi]$ убывает:

$$\varphi_m = \max(\varphi) = \arccos C. \quad (6)$$

Из (6) видно, что φ_m тем больше чем меньше C . Следовательно уменьшение C , а значит и U_0 , ведет к “выпрямлению” S — образной кривой решения. Если $C \leq 0$, чему соответствуют значения $U_0 \leq -\sqrt{2}$, то всегда имеются точки вертикальности. С другой стороны, исходя из области определения арккосинуса, (6) определяет границы множества физически адекватных U_0 , которые можно задавать в качестве начальных условий для системы (2): $U_0 \in [-2, 0]$.

Для части профиля капли, лежащего в области $U \leq 0$, из (5) сразу найдем

$$U^- = -\sqrt{2(\cos \varphi - C)}, \quad \varphi \in [0, \varphi_m], \quad (7)$$

откуда

$$dU^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\cos \varphi - C}} d\varphi.$$

Так как $\frac{dU}{dX} = \tan \varphi$, то

$$dX^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos \varphi - C}} d\varphi. \quad (8)$$

Далее, проинтегрируем обе части (8) по переменной φ в пределах от $\varphi = 0$ до произвольного значения $\varphi \in (0, \varphi_m]$. Получим

$$X^-(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\varphi \frac{\cos t}{\sqrt{\cos t - C}} dt. \quad (9)$$

Правая часть (9) в точке $\varphi = \varphi_m$ является несобственным интегралом 2-го рода, так как подынтегральная функция в ней терпит бесконечный разрыв. Но, как будет показано ниже, он сходящийся.

Представим (9) в виде суммы двух интегралов

$$\int_0^\varphi \frac{\cos t}{\sqrt{\cos t - C}} dt = \int_0^\varphi \sqrt{\cos t - C} dt + C \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{\cos t - C}} = I_1 + I_2. \quad (10)$$

Преобразуем первый интеграл I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\varphi \sqrt{\cos t - C} dt = \int_0^\varphi \sqrt{1 - C - 2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= 2\sqrt{1 - C} \int_0^\varphi \sqrt{1 - \frac{2}{1 - C} \sin^2 \frac{t}{2}} d\left(\frac{t}{2}\right) = 2\sqrt{1 - C} \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \sqrt{1 - \frac{2}{1 - C} \sin^2 t} dt = \\ &= 2\sqrt{1 - C} E\left(\frac{\varphi}{2} \middle| \frac{2}{1 - C}\right), \end{aligned}$$

где $E(\psi | k) = \int_0^\psi \sqrt{1 - k \sin^2 t} dt$ — нормальный эллиптический интеграл Лежандра 2-го рода.

Аналогично, для I_2 имеем

$$I_2 = \frac{2C}{\sqrt{1 - C}} F\left(\frac{\varphi}{2} \middle| \frac{2}{1 - C}\right),$$

а $F(\psi | k) = \int_0^\psi \frac{1}{\sqrt{1 - k \sin^2 t}} dt$ — нормальный эллиптический интеграл Лежандра 1-го рода.

В итоге, с учетом выражений, полученных для I_1 и I_2 , решение $X^-(\varphi)$ можно выписать в виде линейной комбинации нормальных эллиптических интегралов 1-го и 2-го родов:

$$X^-(\varphi) = \sqrt{2(1 - C)} E\left(\frac{\varphi}{2} \middle| \frac{2}{1 - C}\right) + \frac{\sqrt{2}C}{\sqrt{1 - C}} F\left(\frac{\varphi}{2} \middle| \frac{2}{1 - C}\right). \quad (11)$$

Как видно из представления (11), функция $X^-(\varphi)$ непрерывна всюду на своей области определения. Вопросы могут возникнуть лишь при $C \rightarrow 1$. В этом случае $U_0 = 0$ и единственным решением (2) — (3) будет являться линия $U \equiv 0$. То есть, никакой капли не существует и использование указанной формулы лишено какого бы то ни было практического смысла.

Здесь следует также отметить, что (11) на самом деле лишь иная форма записи (9). Эллиптические интегралы не выражаются в элементарных функциях. Однако, ввиду их широкой распространенности в математическом анализе и его приложениях, они тщательно протабулированы и реализованы с высокой точностью практически во всех системах компьютерной алгебры. Поэтому работа с $X^-(\varphi)$ в виде (11) не вызывает особых затруднений наряду с большинством элементарных функций.

Для профиля капли, находящегося в области $U > 0$, рассуждения аналогичны. Из (5) получаем

$$U^+ = \sqrt{2(\cos \varphi - C)}, \quad \varphi \in [0, \varphi_m), \quad (12)$$

откуда

$$dX^+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \varphi}{\sqrt{\cos \varphi - C}} d\varphi. \quad (13)$$

Проинтегрируем обе части (13) по переменной φ в пределах от $\varphi = \varphi_m$ до произвольного значения $\varphi \in [0, \varphi_m)$

$$X^+(\varphi) = X^-(\varphi_m) - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\varphi_m}^{\varphi} \frac{\cos t}{\sqrt{\cos t - C}} dt. \quad (14)$$

Интеграл в правой части (14) преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_m}^{\varphi} \frac{\cos t}{\sqrt{\cos t - C}} dt &= \int_{\varphi_m}^0 \frac{\cos t}{\sqrt{\cos t - C}} dt + \int_0^{\varphi} \frac{\cos t}{\sqrt{\cos t - C}} dt = \\ &= \sqrt{2} (-X^-(\varphi_m) + X^-(\varphi)). \end{aligned} \quad (15)$$

Исходя из (15), выражение (14) переписется в виде

$$X^+(\varphi) = 2X^-(\varphi_m) - X^-(\varphi). \quad (16)$$

Сейчас, когда имеются явные представления решений для X и U , легко проверить справедливость свойства симметричности (4):

$$\frac{U^-(\varphi) + U^+(\varphi)}{2} = 0, \quad \frac{X^-(\varphi) + X^+(\varphi)}{2} = X(\varphi_m), \quad \forall \varphi \in (0, \varphi_m].$$

Для дифференциала dS дуги имеем

$$dS^2 = dX^2 + dU^2 = \frac{1}{2(\cos \varphi - C)} d\varphi^2$$

или

$$\begin{cases} dS = \frac{1}{\sqrt{2(\cos \varphi - C)}} d\varphi, & U \leq 0, \\ dS = -\frac{1}{\sqrt{2(\cos \varphi - C)}} d\varphi, & U > 0. \end{cases} \quad (17)$$

Интегрируя первое уравнение (17) по φ в пределах от $\varphi = 0$ до произвольного $\varphi \in (0, \varphi_m]$, найдем связь между углом наклона φ и соответствующей длиной S дуги в точке профиля капли

$$S^-(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{2(\cos t - C)}} = \sqrt{\frac{2}{1-C}} F\left(\frac{\varphi}{2} \middle| \frac{2}{1-C}\right). \quad (18)$$

Формула (18) годится только для участка кривой, лежащего ниже прямой $U = 0$. Для участка же лежащего выше, интегрируется второе уравнение (17) по φ в пределах от $\varphi = \varphi_m$ до $\varphi \in [0, \varphi_m)$:

$$S^+(\varphi) = 2S^-(\varphi_m) - S^-(\varphi).$$

Функция $S(\varphi) = \begin{cases} S^-(\varphi), & U \leq 0, \\ S^+(\varphi), & U > 0 \end{cases}$ кроме самостоятельного интереса, представляет также

интерес с точки нахождения предельного значения $S = S^*$, до которого численное интегрирование (в вопросах, где это предпочтительнее) или качественное исследование задачи (2) – (3) имеет смысл:

$$S^* = S^+(0) = 2S(\varphi_m) = \sqrt{\frac{8}{1-C}} F\left(\frac{\arccos C}{2} \middle| \frac{2}{1-C}\right).$$

Найдем теперь зависимость площади сечения капли от угла φ . С этой целью рассмотрим четвертое уравнение системы (2), которое можно переписать в форме

$$dA = 2XdU, \quad (19)$$

откуда

$$\begin{aligned} A^-(\varphi) &= 2 \int_0^\varphi X^- dU^- = 2 \left(X^- U^- \Big|_0^\varphi - \int_0^\varphi U^- dX^- \right) = \\ &= 2 (X^-(\varphi)U^-(\varphi) + \sin \varphi). \end{aligned} \quad (20)$$

Интегрирование для площади области, лежащей выше оси X , даст аналогичный результат

$$A^+(\varphi) = 2 (X^+(\varphi)U^+(\varphi) + \sin \varphi).$$

Как и следовало ожидать функции, полученные выше, оказались неоднозначными относительно переменной φ по причине ее немонотонного характера изменения. В одних вопросах такая параметризация может быть полезной, так как связь угла наклона с характеристиками профиля капли в произвольной точке сама по себе представляет отдельный интерес. Но в других вопросах эта неоднозначность может доставлять определенные неудобства. Поэтому желательно было иметь и такую параметризацию профиля двумерной капли, относительно которой, по крайней мере, координаты X и U были бы однозначными. С этой целью проведем в (7) и (8) следующую замену: $\cos \varphi - C = (1 - C) \cos^2 \psi$. Пока будем рассматривать только нижнюю часть капли, расположенную в области отрицательных значений U . Когда φ пробегает все значения от 0 до φ_m , новая переменная ψ пробегает значения от 0 до $\frac{\pi}{2}$, а между дифференциалами $d\varphi$ и $d\psi$ имеет место соотношение

$$d\varphi = \frac{2\sqrt{1-C} \cos \psi}{\sqrt{2 - (1-C) \sin^2 \psi}} d\psi.$$

С учетом всего этого имеем

$$U^- = -\sqrt{2(1-C) \cos^2 \psi} = -|U_0 \cos \psi| = U_0 \cos \psi$$

и

$$dX^- = \frac{\sqrt{2}(1 - (1 - C)\sin^2\psi)}{\sqrt{2 - (1 - C)\sin^2\psi}} d\psi.$$

Интегрируя последнее по ψ в пределах от 0 до некоторого ψ , получим

$$\begin{aligned} X^-(\psi) &= \sqrt{2} \int_0^\psi \frac{1 - (1 - C)\sin^2 t}{\sqrt{2 - (1 - C)\sin^2 t}} dt = \\ &= 2 \int_0^\psi \sqrt{1 - \frac{1 - C}{2}\sin^2 t} dt - \int_0^\psi \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1 - C}{2}\sin^2 t}} dt = \\ &= 2E\left(\psi \left| \frac{1 - C}{2} \right.\right) - F\left(\psi \left| \frac{1 - C}{2} \right.\right) = 2E\left(\psi \left| \frac{U_0^2}{4} \right.\right) - F\left(\psi \left| \frac{U_0^2}{4} \right.\right), \end{aligned}$$

где ψ принадлежит интервалу $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Для верхней части профиля, когда угол φ убывает от φ_m до 0, положим, что ψ меняется в пределах от $\frac{\pi}{2}$ до π . Исходя из (12) и (13) найдем

$$U^+ = \sqrt{2(\cos\varphi - C)} = |U_0 \cos\psi| = U_0 \cos\psi$$

и

$$dX^+ = \frac{\sqrt{2}(1 - (1 - C)\sin^2\psi)}{\sqrt{2 - (1 - C)\sin^2\psi}} d\psi.$$

Выражение для dX^+ будем интегрировать по ψ от $\frac{\pi}{2}$ до ψ

$$\begin{aligned} X^+(\psi) &= X^-\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^\psi \frac{1 - (1 - C)\sin^2 t}{\sqrt{2 - (1 - C)\sin^2 t}} dt = \\ &= X^-\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (1 - C)\sin^2 t}{\sqrt{2 - (1 - C)\sin^2 t}} dt + \sqrt{2} \int_0^\psi \frac{1 - (1 - C)\sin^2 t}{\sqrt{2 - (1 - C)\sin^2 t}} dt = \\ &= \sqrt{2} \int_0^\psi \frac{1 - (1 - C)\sin^2 t}{\sqrt{2 - (1 - C)\sin^2 t}} dt = \\ &= 2E\left(\psi \left| \frac{1 - C}{2} \right.\right) - F\left(\psi \left| \frac{1 - C}{2} \right.\right) = 2E\left(\psi \left| \frac{U_0^2}{4} \right.\right) - F\left(\psi \left| \frac{U_0^2}{4} \right.\right), \end{aligned}$$

где $\psi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Легко заметить, что решения для X и U в обоих полуплоскостях имеют единую функциональную запись, а переменная ψ меняется в смежных участках. Поэтому каждую пару $\{X^-(\psi), X^+(\psi)\}$ и $\{U^-(\psi), U^+(\psi)\}$ можно попросту “склеить” в единую функцию

$$\begin{cases} U(\psi) = U_0 \cos\psi, \\ X(\psi) = 2E\left(\psi \left| \frac{U_0^2}{4} \right.\right) - F\left(\psi \left| \frac{U_0^2}{4} \right.\right) \end{cases} \quad (21)$$

с областью определения $\psi \in [0, \pi]$. Недостатком проделанной параметризации является то, что ψ не имеет четко определенного геометрического или же физического смысла. Это всего

лишь один из множества вариантов параметризации, при котором монотонное изменение некой переменной влечет за собой непрерывный обход всего профиля капли. Тем не менее, (21) может оказаться самой простой из них.

Используя (17), (19) аналогичная замена для длины дуги и площади сечения приведет к формулам

$$S(\psi) = F\left(\psi \mid \frac{U_0^2}{4}\right)$$

и

$$A(\psi) = 2 \left(X(\psi)U(\psi) + \frac{|U_0|}{\sqrt{2}} \sin \psi \sqrt{2 - \frac{U_0^2}{2} \sin^2 \psi} \right) \quad (22)$$

соответственно.

Установим далее экстремальные свойства наиболее важных характеристик двумерной капли. Ее высота (протяженность вдоль оси U), очевидно, равна $h = 2|U_0|$. Тогда, максимально возможное свое значение h примет при наименьшем физически допустимом значении U_0 . Оно, как было показано ранее, равно -2 . Но при $U_0 = -2$ угол $\varphi_m = \pi$ и $C = -1$, а эллиптический интеграл 1-го рода при соответствующем наборе своих параметров имеет бесконечную особенность: $F\left(\frac{\pi}{2} \mid 1\right) = \infty$. Решение ведет себя так, что $X^-|_{\varphi=\pi} = -\infty$ и прямая $U = 0$ выступает в роли его горизонтальной асимптоты (см. рис.3). Вдобавок левая и правая ветви профиля

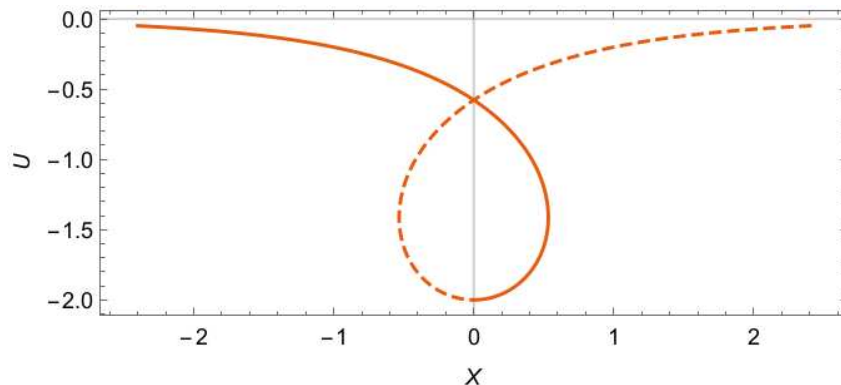


Рис. 3. Профиль двумерной капли при $U_0 = -2$.

могут иметь точки пересечения, не считая апекс. Такого рода капли являются неустойчивыми и не могут наблюдаться в реальности. По этой причине граница допустимых U_0 требует корректировки так, чтобы все решения (2) — (3), имеющие хотя бы одну точку пересечения с осью U (следовательно и точку пересечения разных ветвей), должны быть исключены из дальнейшего рассмотрения. При $U_0 > -2$ всегда имеет место пересечение с осью X , а при $U_0 > -\sqrt{2}$ точки вертикальности отсутствуют и никакого пересечения с осью U не будет. Таким образом, остается только исследовать поведение решений, соответствующие всем U_0 из полуинтервала $(-2, -\sqrt{2}]$. Профиль капли для некоторого $U_0 > -2$, пересекающий при $\varphi \neq 0$ ось U , по свойству симметричности всегда должна иметь две точки вертикальности: по одной в каждой из полуплоскостей. Производная функции $X^+(\varphi)$, как следует из (2), равна нулю в точке $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и при переходе через нее меняет свой знак с минуса на плюс. А это значит, что $X^+\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ и $X^+(\varphi) \geq X^+\left(\frac{\pi}{2}\right)$ для любых $\varphi \in [0, \varphi_m]$. То есть, $X^+\left(\frac{\pi}{2}\right)$ — глобальный минимум функции $X^+(\varphi)$. Верхней точке вертикальности в случае параметризации (21) соответствует значение $\psi = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{U_0}$. Вычислим производную сложной функции

$X(\psi(U_0))$, принимая U_0 за переменную, где $\psi(U_0) = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{U_0}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dU_0} X(\psi(U_0)) &= \frac{2(U_0^2 - 2)}{U_0(U_0^2 - 4)} E\left(\pi + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{U_0} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right) + \\ &+ \frac{1}{|U_0|} F\left(\pi + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{U_0} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right) + \frac{2\sqrt{U_0^2 - 2}}{U_0(U_0^2 - 4)}. \end{aligned} \quad (23)$$

Легко показать, что при $U_0 \in (-2, -\sqrt{2}]$ правая часть (23) всегда положительна. Из этого в свою очередь следует, что при увеличении U_0 верхняя точка вертикальности будет монотонно смещаться вправо. Тогда, минимальным значением U_0 , при котором имеет место факт пересечения с осью U , будет являться такое U_0^m , для которого $X(\psi(U_0^m)) = 0$. Правильнее будет сказать, что при таком предельном U_0 профиль капли просто касается оси U , не пересекая ее. Для нахождения U_0^m необходимо решить нелинейное уравнение $X(\psi(U_0)) = 0$ относительно переменной U_0 . Решать его будем численно с использованием встроенных в «Wolfram Mathematica» специализированных функций. С точностью до трех знаков после запятой получим: $U_0^m = -1.710$. Таким образом, физически актуальные U_0 принадлежат множеству $[-1.71, 0)$, а наибольшая высота h_m равна $2|U_0^m| = 3.42$. Другими словами, высота никакой двумерной капли не может быть больше капиллярной длины более чем в 3.42 раз.

Интересно также проследить движение точки пересечения профиля капли и оси X с изменением начального условия U_0 . Для этого вычислим производную функции $X\left(\frac{\pi}{2}\right)$ в (21) по параметру U_0

$$\frac{d}{dU_0} X\left(\frac{\pi}{2}; U_0\right) = \frac{2(U_0^2 - 2)}{U_0(U_0^2 - 4)} E\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right) + \frac{1}{|U_0|} F\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right). \quad (24)$$

Видно, что правая часть (24) при $U_0 \in [-1.71, 0)$ принимает только положительные значения. Поэтому, когда U_0 меняется от -1.71 до 0 , точка с координатами $(X\left(\frac{\pi}{2}\right), 0)$ плавно перемещается вправо. Она займет свое предельное положение при $U_0 \rightarrow 0$: $\lim_{U_0 \rightarrow 0} X\left(\frac{\pi}{2}; U_0\right) = \frac{\pi}{2}$. Из этого можно сделать следующее заключение — максимальное отклонение профиля двумерной капли от оси U не превосходит π .

Полная площадь поперечного сечения капли согласно формуле (22) равняется $A(\pi; U_0)$:

$$A(\pi; U_0) = 2X(\pi; U_0)U(\pi; U_0) = 4U_0 \left(F\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right) - 2E\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right) \right).$$

Для первой и второй производной $A(\pi; U_0)$ по U_0 имеем соответственно

$$f_1(U_0) = \frac{d}{dU_0} A(\pi; U_0) = 8 \left(F\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right) - \frac{2(U_0^2 - 3)}{U_0^2 - 4} E\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right) \right), \quad (25)$$

$$\begin{aligned} f_2(U_0) &= \frac{d}{dU_0} f_1(U_0) = \frac{d^2}{dU_0^2} A(\pi; U_0) = \\ &= 8 \frac{(U_0^4 - 6U_0^2 + 8) F\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right) - 2(U_0^4 - 7U_0^2 + 4) E\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right)}{U_0(U_0^2 - 4)^2}. \end{aligned}$$

Учитывая определения эллиптических интегралов I-го и II-го родов, перепишем $f_2(U_0)$ в немного ином виде

$$f_2(U_0) = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16 - 2U_0^2 + \left(\left(\frac{7}{2} - U_0^2\right)^2 - \frac{33}{4}\right) \sin^2 t}{(U_0^2 - 4)^2 \sqrt{4 - U_0^2 \sin^2 t}} U_0 dt. \quad (26)$$

В области $\bar{\Pi}$, представляющей из себя замкнутый прямоугольник $\{(U_0, t) : -1.71 \leq U_0 \leq 0, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$, числитель дроби в (26), как легко видеть, достигает наименьшего значения при $U_0 = -1.71, t = \frac{\pi}{2}$ и оно положительно. Поэтому функция $f_2(U_0)$ за счет знака U_0 под интегралом всегда отрицательна. Получается что, $f_1(U_0)$ на отрезке $U_0 \in [-1.71, 0]$ монотонно убывает, а на его концах принимает значения противоположных знаков: $f_1(-1.71) > 0$ и $f_1(0) < 0$. Тогда уравнение

$$\frac{f_1(U_0)}{8} = F\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right) - \frac{2(U_0^2 - 3)}{U_0^2 - 4} E\left(\frac{\pi}{2} \middle| \frac{U_0^2}{4}\right) = 0 \quad (27)$$

должно иметь ровно один корень U_0^A , заключенный между -1.71 и 0 . Из всего этого следует,

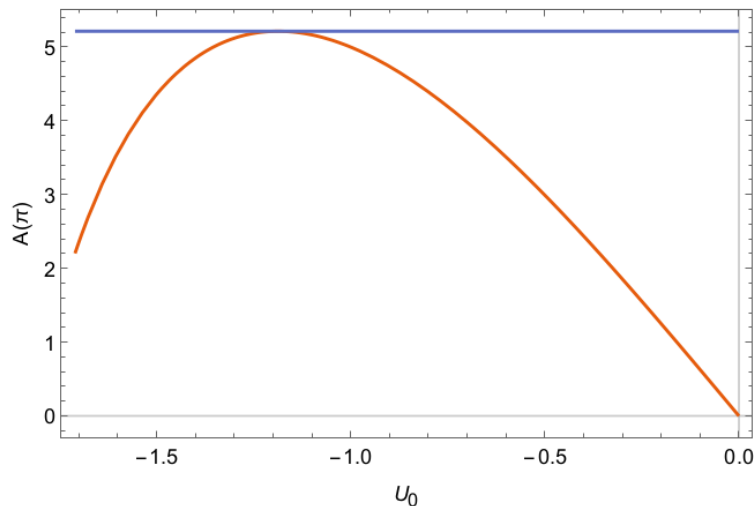


Рис. 4. График зависимости площади поперечного сечения двумерной капли от U_0 .

что функция $A(\pi; U_0)$, начиная с точки $U_0 = -1.71$, монотонно возрастает до U_0^A , достигает в ней своего максимального значения A_m и далее монотонно убывает до нуля. Приближенное решение (27) дает $U_0^A = -1.187$, а соответствующее ему значение площади равно $A_m = A(\pi; U_0^A) = 5.211$. Сказанное подтверждается и численными расчетами, проведенными на основе (2) – (3) (см. рис.4). Профиль двумерной капли с максимально возможной площадью поперечного сечения представлен на рис.5.

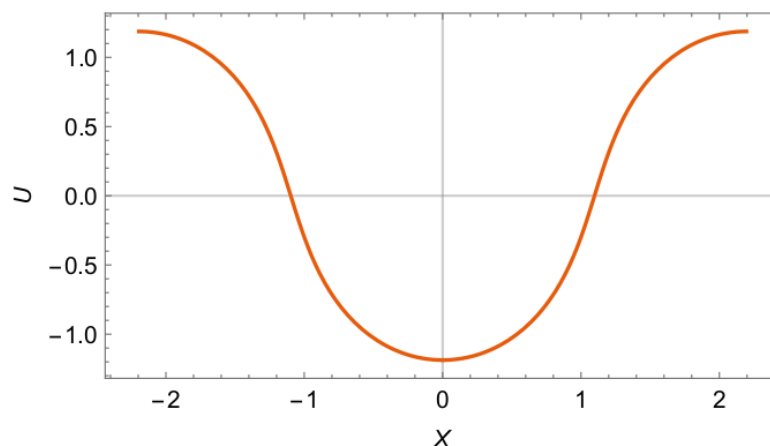


Рис. 5. Двумерная капля с максимально возможной площадью поперечного сечения.

Необходимо иметь ввиду, что здесь все оценки указаны в безразмерной форме. Чтобы

получить соответствующие размерностные результаты для конкретной физической конфигурации, надо разделить каждую пространственную координату, которая появляется в рассматриваемом соотношении, на $\beta^{1/2}$.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в настоящей работе рассмотрены основные типы двумерной висящей капли; в аналитическом виде получены новые представления решений системы уравнений, которая описывает ее профиль. Проведена табуляция аналитических решений, а также получены численные решения исходной системы уравнений. Данные расчеты подтверждают правильность полученных выводов, оценок и формул.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pitts, E. The stability of pendent liquid drops. Part 1. Drops formed in a narrow gap / E. Pitts // J. Fluid Mech. — 1973. — V. 59, № 4. — P. 753–767.
2. Френкель, Я. И. О поведении жидких капель на поверхности твердого тела / Я. И. Френкель // ЖЭТФ. — 1948. — Т. 18, № 7. — С. 659–667.
3. Pitts, E. The stability of pendent liquid drops. Part 2. Axial symmetry / E. Pitts // J. Fluid Mech. — 1974. — V. 63, № 3. — P. 487–508.
4. Jianlin, L. Elastica of a pendant droplet : Analytical solution in two dimension / L. Jianlin, S. Jing, L. Lu // Non-Linear Mechanics. — 2014. — V. 58. — P. 184–190.
5. Scarpello, G. M. The meridian curve of a wetting drop : a boundary value problem and its elliptic integrals solution / G. M. Scarpello, D. Ritelli // Meccanica. — 2014. — V. 49. — P. 2257–2264.
6. Michael, D. H. The equilibrium and stability of axisymmetric pendent drops / D. H. Michael, P. G. Williams // Proc. R. Soc. London, Ser. A. — 1976. — V. 351, № 1664. — P. 117–127.
7. Michael, D. H. Meniscus stability / D. H. Michael // Annu. Rev. Fluid Mech. — 1981. — V. 13. — P. 189–215.
8. Sumesh, P. T. The possible equilibrium shapes of static pendant drops / P. T. Sumesh, G. Rama // J. Chem. Phys. — 2010. — V. 133. — P. 144707–144715.
9. Majumdar, S. R. The equilibrium and stability of axisymmetric pendent drops / S. R. Majumdar, D. H. Michael // Proc. R. Soc. London, Ser. A. — 1976. — V. 351, № 1664. — P. 89–115.
10. Зубарев, Н. М. Точные решения для равновесных конфигураций поверхности проводящей жидкости в неоднородном магнитном поле / Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева // ТМФ. — 2016. — Т. 188, № 3. — С. 497–504.
11. Финн, Р. Равновесные капиллярные поверхности : Математическая теория / Р. Финн. — М. : Мир, 1989. — 310 с.
12. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.
13. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

REFERENCES

1. Pitts E. The stability of pendent liquid drops. Part 1. Drops formed in a narrow gap. J. Fluid Mech., 1973, vol. 59, no. 4, pp. 753–767.
2. Frenkel Y.I. On the behavior of liquid drops on a solid surface. [Frenkel' Ya.I. O povedenii

zhidkih kapel' na poverhnosti tverdogo tela]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki — Soviet Physics — JETP*, 1948, vol. 18, no. 7, pp. 659–667.

3. Pitts E. The stability of pendent liquid drops. Part 2. Axial symmetry. *J. Fluid Mech.*, 1974, vol. 63, no. 3, pp. 487–508.

4. Jianlin L., Jing S., Lu L. Elastica of a pendant droplet: Analytical solution in two dimension. *Non-Linear Mechanics*, 2014, vol. 58, pp. 184–190.

5. Scarpello G.M., Ritelli D. The meridian curve of a wetting drop: a boundary value problem and its elliptic integrals solution. *Meccanica*, 2014, vol. 49, pp. 2257–2264.

6. Michael D.H., Williams P.G. The equilibrium and stability of axisymmetric pendent drops. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 1976, vol. 351, no. 1664, pp. 117–127.

7. Michael D.H. Meniscus stability. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1981, vol. 13, pp. 189–215.

8. Sumesh P.T., Rama G. The possible equilibrium shapes of static pendant drops. *J. Chem. Phys.*, 2010, vol. 133, pp. 144707–144715.

9. Majumdar S.R., Michael D.H. The equilibrium and stability of axisymmetric pendent drops. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 1976, vol. 351, no. 1664, pp. 89–115.

10. Zubarev N.M., Zubareva O.V. Exact solutions for equilibrium configurations of the surface of a conducting fluid in a nonuniform magnetic field. [Zubarev N.M., Zubareva O.V. Tochnye resheniya dlya ravnovesnykh konfiguracij poverhnosti provodyashchej zhidkosti v neodnorodnom magnitnom pole]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika — Theoretical and Mathematical Physics*, 2016, vol. 188, no. 3, pp. 497–504.

11. Finn R. Equilibrium capillary surfaces. [Finn R. Ravnovesnye kapillyarnye poverhnosti: Matematicheskaya teoriya]. Moskva, 1989, 310 p.

12. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoy matematicheskoy modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

13. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoy ocenke resheniy kraevoy zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 162–172.

Сокуров Аслан Артурович, Институт прикладной математики и автоматизации — филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный научный центр «Кабардино-Балкарский научный центр Российской академии наук», младший научный сотрудник, Нальчик, Россия

E-mail: asokuroff@gmail.com

Tel.: +7(8662)42-70-06

Sokurov Aslan Arturovich, Institute of Applied Mathematics and Automation — Branch of the Federal State Budgetary Scientific Establishment «Federal Scientific Center «Kabardin-Balkar Scientific Center of the Russian Academy of Sciences», junior researcher, Nalchik, Russia

E-mail: asokuroff@gmail.com

Tel.: +7(8662)42-70-06