УДК 517.53, 517.54

О ПОСТРОЕНИИ КЛАССА СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ВЕРХНЕЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

О. В. Охлупина

Брянский государственный инженерно-технологический университет

Поступила в редакцию 09.01.2018 г.

Аннотация. Особое место в теории субгармонических функций занимают интегральные представления классов субгармонических функций. В настоящей работе вводится в рассмотрение и полностью описывается класс субгармонических в верхней полуплоскости функций с характеристикой Неванлинны из L_p-весовых пространств.

Ключевые слова: субгармоническая функция, потенциал, гармоническая функция, представляющая мера, характеристика Неванлинны.

ABOUT BUILDING THE CLASS OF SUBHARMONIC FUNCTIONS IN THE UPPER HALF PLANE

O. V. Okhlupina

Abstract. A special place in the theory of subharmonic functions is integral representations in classes of subharmonic functions. In the present work is introduced and fully described by a class of subharmonic in the upper half-plane functions from the Nevanlinna characteristics of the L_p-weighted spaces.

Keywords: subharmonic function, potential, harmonic function, representing measure, Nevanlinna characteristic.

ВВЕДЕНИЕ

Венгерский математик Ф. Рисс в начале прошлого столетия в своих исследованиях доказал, что всякая субгармоническая функция представима в виде суммы потенциала и гармонической функции (см. [1]). Тем самым он показал важную связь теории субгармонических функций с теорией потенциала. Это направление является обширной областью исследований. Помимо этого следует также отметить связь субгармонических функций с актуальными проблемами математической физики. В последние годы по теории классов субгармонических функций и теории потенциала опубликовано несколько монографий, что подчёркивает интерес к данному разделу и указывает на актуальность подобных исследований.

Проблемы, касающиеся описания различных классов аналитических и субгармонических функций, рассматривались и ранее (см., например, [2], [3], [4]), однако, методы их доказательства позволяли получить решение с определёнными ограничениями, например, на величину параметра p (см. [5]).

Данная работа посвящена построению параметрического представления класса субгармонических в полуплоскости функций с характеристикой Неванлинны из L_p–весовых пространств $(0 < p < +\infty)$. Этот результат обобщает хорошо известную теорему Неванлинны (см. [6]). Доказательство приводимых утверждений проводится с применением методов комплексного и функционального анализа.

ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Введём предварительно некоторые обозначения: $C^+ = \{z \in C : Imz > 0\}$, $z = x + iy$, $0 < \alpha < +\infty$, $0 < p < +\infty$, $C_\rho^+ = \{z \in C : Imz > \rho\}$, $\rho > 0$.

$SH(C^+)$ — множество субгармонических функций в C^+. Пусть $SH_\alpha^p(C^+)$ — класс субгармонических в C^+ функций u, удовлетворяющих условиям: $\int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^+(x+iy)\,dx\right)^p dy < +\infty$; $\sup\limits_{y>y_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u(x+iy)|\,dx \leqslant C_{y_0} < +\infty$, $\forall y_0 > 0$; $\lim\limits_{y\to+\infty}\sup yu(iy) \geqslant 0$.

Пусть $\zeta \in C^+$, $-1 < \beta < +\infty$. Тогда:

$$a_\beta(z,\zeta) = \exp\left\{-\int\limits_0^{2Im\zeta}\frac{r^\beta dr}{(r+i\zeta-iz)^{\beta+1}}\right\} - \tag{1}$$

факторы из работы [7] (в случае $\beta = 0$: $a_0(z,\zeta) = \frac{\zeta-z}{\bar{\zeta}-z}$).

Теорема. *Для того, чтобы $u \in SH_\alpha^p(C^+)$, $0 < p < +\infty$, $0 < \alpha < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы в C^+ она была представима в виде:*

$$u(z) = \int\limits_{C^+}\ln|a_\beta(z,\zeta)|\,d\mu(\zeta) + h(z), \tag{2}$$

где $h(z)$ — гармоническая функция в C^+ : $\int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|h(x+iy)|\,dx\right)^p dy < +\infty$, $\mu(\zeta)$ — неотрицательная мера в C^+, такая, что $\int\limits_0^{+\infty} y^p y^{\alpha-1} n^p(y)\,dy < +\infty$, $n(y) = \mu\left(C_y^+\right)$, $\beta > \frac{\alpha-1}{p}+1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ УТВЕРЖДЕНИЙ

Для доказательства теоремы воспользуемся утверждениями из работ [7] и [5], которые сформулируем в виде лемм 1 и 2 соответственно.

Лемма 1. *Пусть $z,\zeta \in C^+$, $-1 < \beta < +\infty$. Тогда:*

$$\ln|a_\beta(z,\zeta)| \leqslant C_\beta\left(\frac{Im\zeta}{|\bar{\zeta}-z|}\right)^{\beta+1}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть $u \in SH(C^+)$, которая $\forall\rho > 0$ удовлетворяет оценке: $\sup\limits_{y>\rho}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u(x+iy)|\,dx \leqslant C_\rho < +\infty (C_\rho > 0)$. Тогда $\forall\rho > 0$ имеет место формула типа Иенсена:*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x+i\rho)\,dx = -\int\limits_\rho^{+\infty}(t-\rho)dn(t) + \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\sup Ru(iR), \tag{4}$$

где $n(t)$ — значение меры Рисса μ, ассоциированной с $u(z)$, в $C_\rho^+, C_\rho^+ = \{z \in C : Imz > \rho\}, n(\rho) = \mu\left(C_\rho^+\right)$, причём $\lim\limits_{R\to+\infty}\sup Ru(iR)$ конечен.

Сформулируем также ещё несколько вспомогательных утверждений (см. [6]).

Лемма 3. *Пусть* $u \in SH_\alpha^p(C^+)\,, 0 < p < +\infty, n(y) = \mu\left(C_y^+\right)$. *Тогда справедливы оценки:*

$$1)\int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|u(x+iy)|\,dx\right)^p dy \leqslant C\int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u^+(x+iy)\,dx\right)^p dy,$$

$$2)\int\limits_0^{+\infty} y^p y^{\alpha-1} n^p(y)\,dy \leqslant C\int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u^+(x+iy)\,dx\right)^p dy < +\infty.$$

Лемма 4. *Пусть* $n(y) = \mu\left(C_y^+\right)$. *Тогда условие* $\int\limits_0^{+\infty} y^p y^{\alpha-1} n^p(y)\,dy < +\infty$ *равносильно оценкам:* $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{n^p\left(\frac{1}{2^k}\right)}{2^{k(\alpha+p)}} < +\infty, \sum\limits_{k=1}^{+\infty} n^p\left(2^k\right) 2^{k(\alpha+p)} < +\infty.$

Лемма 5. *Пусть* $u \in SH(C^+)$, *допускающая представление (2), где* $\mu(\zeta)$ — *неотрицательная мера в* C^+, $\int\limits_0^{+\infty} y^p y^{\alpha-1} n^p(y)\,dy < +\infty, n(y) = \mu\left(C_y^+\right), 0 < p < +\infty$, $h(z)$ — *гармоническая функция в* C^+, $\int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|h(x+iy)|\,dx\right)^p dy < +\infty$, $\beta > \frac{\alpha-1}{p}+1$. *Тогда* $u \in SH_\alpha^p(C^+)\,, 0 < \alpha < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

1. Необходимость. Пусть $u \in SH_\alpha^p(C^+)\,,\ 0 < p < +\infty$. Рассмотрим $u(z) - V_\beta(z) = h(z)$. Покажем гармоничность $h(z)$.

Пусть D_r — круг радиуса r, $0 < r < 1$. $\widetilde{D}_r = D_r \cap C^+$. По теореме Рисса для $\widetilde{D}_r$: $u(z) = V(z) + \int\limits_{\widetilde{D}_r} \ln|\zeta - z|\,d\mu(\zeta)$, где $V(z)$ — гармоническая функция в $\widetilde{D}_r$, $\int\limits_{\widetilde{D}_r} \ln|\zeta - z|\,d\mu(\zeta)$ — субгармоническая функция в $\widetilde{D}_r$, при этом точка $z \in \widetilde{D}_r$: $\int\limits_{\widetilde{D}_r} \ln|\zeta - z|\,d\mu(\zeta) \neq -\infty$. Воспользуемся фактором $a_\beta(z,\zeta)\,,\ \zeta \in C^+,\ \ -1 < \beta < +\infty$

$$a_\beta(z,\zeta) = a_0(z,\zeta)\cdot\frac{1}{a_0(z,\zeta)}\cdot\exp\left\{-\int\limits_0^{2Im\zeta}\frac{r^\beta dr}{(r+i\zeta-iz)^{\beta+1}}\right\} =$$

$$= a_0(z,\zeta)\cdot\exp\left\{\int\limits_0^{2Im\zeta}\left[\frac{1}{r+i\zeta-iz} - \frac{r^\beta}{(r+i\zeta-iz)^{\beta+1}}\right]dr\right\}.$$

Пусть $\zeta = \xi + i\eta$. Подбирая главную ветвь логарифма, получаем:

$$\int\limits_0^{2Im\zeta}\frac{dr}{r+i\zeta-iz} = \int\limits_0^{2Im\zeta} d\ln(r+i(\zeta-z)) = \ln(r+i(\zeta-z))|_0^{2Im\zeta} =$$
$$= \ln(2Im\zeta + i(\zeta-z)) - \ln(i(\zeta-z)) = \ln\frac{2Im\zeta + i(\zeta-z)}{i(\zeta-z)} = \ln\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}$$

Следовательно, $a_0(z,\zeta) = \exp\left\{-\int\limits_0^{2Im\zeta}\frac{dr}{r+i\zeta-iz}\right\} = \exp\left\{-\ln\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right\} = \frac{\zeta-z}{\overline{\zeta}-z}$,

$$\ln|a_\beta(z,\zeta)| = \ln\left|\frac{\zeta-z}{\overline{\zeta}-z}\right| + Re\left\{\int\limits_0^{2Im\zeta}\left[\frac{1}{r+i\zeta-iz} - \frac{r^\beta}{(r+i\zeta-iz)^{\beta+1}}\right]dr\right\}$$

$$h(z)=u(z)-\int\limits_{\widetilde{D}_r}\ln|a_\beta(z,\zeta)|d\mu(\zeta)=\left(u(z)-\int\limits_{\widetilde{D}_r}\ln|\zeta-z|d\mu(\zeta)\right)-\int\limits_{\widetilde{D}_r}\ln\frac{1}{|\overline{\zeta}-z|}d\mu(\zeta)-$$

$$-\int\limits_{\widetilde{D}_r}Re\left\{\int\limits_0^{2Im\zeta}\left[\frac{1}{r+i\zeta-iz}-\frac{r^\beta}{(r+i\zeta-iz)^{\beta+1}}\right]dr\right\}d\mu(\zeta)$$

Функция $\int\limits_{\widetilde{D}_r}\ln\frac{1}{|\overline{\zeta}-z|}d\mu(\zeta)$ — гармоническая ($\ln\frac{1}{\overline{\zeta}-z}$ — аналитическая функция в C^+, поэтому её вещественная часть — гармоническая функция в C^+). $\left|\frac{\overline{\zeta}-z}{\zeta-z}\right|\geqslant 1,\ z,\zeta\in C^+$. Прологарифмируем обе части неравенства. Получим: $\int\limits_{\widetilde{D}_r}\ln\frac{1}{|\overline{\zeta}-z|}d\mu(\zeta)<+\infty$. Рассмотрим функцию

$$F_\beta(z,\zeta)=\int\limits_0^{2Im\zeta}\left[\frac{1}{r+i\zeta-iz}-\frac{r^\beta}{(r+i\zeta-iz)^{\beta+1}}\right]dr=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{r+i\zeta-iz}\left[1-\frac{r^\beta}{(r+i\zeta-iz)^{\beta+1}}\right]dr-$$

$$-\int\limits_{2Im\zeta}^{+\infty}\frac{1}{r+i\zeta-iz}\left[1-\frac{r^\beta}{(r+i\zeta-iz)^{\beta+1}}\right]dr=\Phi_\beta(z,\zeta)-\Psi_\beta(z,\zeta),$$

$\Phi_\beta(z,\zeta)$ (при фиксированных $\zeta\in C^+_{\frac{\varrho}{2}}$) голоморфна в $C\setminus\{z=\zeta-ih,\ 0\leqslant h<+\infty\}$, а на луче $\{z=\zeta+ih,\ 0\leqslant h<+\infty\}$ постоянна,

$$\Phi_\beta(\zeta+ih,\zeta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{r+h}\left[1-\frac{r^\beta}{(r+h)^\beta}\right]dr=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{h\left(\frac{r}{h}+1\right)}\left[1-\left(\frac{r}{h\left(\frac{r}{h}+1\right)}\right)^\beta\right]dr.$$

Пусть $\sigma=\frac{r}{h}$, тогда: $\Phi_\beta(\zeta+ih,\zeta)=\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{(\sigma+1)}\left[1-\left(\frac{\sigma}{\sigma+1}\right)^\beta\right]d\sigma=C_\beta$. Интеграл сходится при $\beta>0$. По теореме единственности $\Phi_\beta(z,\zeta)$ всюду постоянна.

Функция $\Psi_\beta(z,\zeta)$ (при фиксированных $\zeta\in G^+_{\frac{\varrho}{2}}$) голоморфна в $C\setminus\left\{z=\overline{\zeta}-ih,\ 0\leqslant h<+\infty\right\}$, в частности, в C^+. Следовательно, $\int\limits_{D_r}ReF_\beta(z,\zeta)\,d\mu(\zeta)$ гармонична в C^+.

Так как $r\in(0;1)$ — произвольное, то $h(z)$ — гармоническая в C^+. Покажем, что $h(z)$ удовлетворяет условию $\int\limits_0^{+\infty}y^{\alpha-1}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|h(x+iy)|\,dx\right)^p dy<+\infty$, $u(z)-V_\beta(z)=h(z)$. Так как $u(z)\leqslant u^+(z)$, то по лемме 1:

$$h^+(z)\leqslant u^+(z)+V^+_\beta(z)\leqslant u^+(z)+C_\beta\int\limits_{C^+}\left(\frac{Im\zeta}{|\overline{\zeta}-z|}\right)^{\beta+1}d\mu(\zeta).$$

Применим теорему о среднем значении, $h(iR) = \frac{1}{\pi R^2} \int\limits_{|\zeta - iR| < R} h(\zeta)\, dm_2(\zeta)$

$$-\infty < \pi R^2 h(iR) = \int\limits_{|\zeta - iR| < R} h(\zeta)\, dm_2(\zeta) = \int\limits_{|\zeta - iR| < R} \left[h^+(\zeta) - h^-(\zeta)\right] dm_2(\zeta) =$$

$$= \int\limits_0^{2R} \int\limits_{-R}^{R} \left[h^+(\xi + i\eta) - h^-(\xi + i\eta)\right] d\xi d\eta,$$

$$\int\limits_0^{2R} \int\limits_{-R}^{R} h^-(\xi + i\eta)\, d\xi d\eta \leqslant \int\limits_0^{2R} \int\limits_{-R}^{R} h^+(\xi + i\eta)\, d\xi d\eta + \pi R^2 |h(iR)|,$$

$$\int\limits_0^{2R} \int\limits_{-R}^{R} |h(\xi + i\eta)|\, d\xi d\eta \leqslant \int\limits_0^{2R} \int\limits_{-R}^{R} h^+(\xi + i\eta)\, d\xi d\eta + C.$$

Пусть R стремится к бесконечности, тогда:

$$\int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha - 1} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(x + iy)| dx \right)^p dy \leqslant \int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha - 1} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^+(x + iy) dx \right)^p dy +$$

$$+ C_\beta(p) \int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha - 1} \left(\int\limits_{C^+} d\mu(\zeta) \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{Im\zeta}{|\overline{\zeta} - z|} \right)^{\beta + 1} dx \right)^p dy.$$

Оба интеграла в правой части сходятся (первый, т.к. $u \in SH_\alpha^p(C^+)$, $0 < p < +\infty$, второй - согласно лемме 5). Следовательно, $\int\limits_0^{+\infty} y^{\alpha - 1} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |h(x + iy)|\, dx \right)^p dy < +\infty$. То есть $u(z)$ допускает представление (2).

2. Доказательство достаточности непосредственно следует из предыдущего пункта и леммы 5. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hayman, W. K. Subharmonic functions. V. 2 / W. K. Hayman. — Acad. Press, London etc., 1989. — 591 p.

2. Неванлинна, Р. Однозначные аналитические функции / Р. Неванлинна. — М. : ИМ-ГИТТЛ, 1941. — 388 с.

3. Джрбашян, М. М. К проблеме представимости аналитических функций / М. М. Джрбашян // Сообщения института математики и механики АН АрмССР. — 1948. — Вып. 2. — С. 3–35.

4. Шамоян, Ф. А. Параметрическое представление и описание корневых множеств весовых классов голоморфных в круге функций / Ф. А. Шамоян // Сибирский матем. журнал. — Т. 40, № 6. — 1999. — С. 1422–1440.

5. Аветисян, К. Л. О представлениях некоторых классов субгармонических функций в единичном круге и в верхней полуплоскости / К. Л. Аветисян // Изв. Нац. АН Армении, Математика. — 1994. — Т. 29, № 1.

6. Охлупина, О. В. Потенциалы типа Грина и интегральные представления весовых классов субгармонических функций: диссертация... к–та физико-математических наук : 01.01.01 / О. В. Охлупина. — Брянск, 2012. — 118 с.

7. Джрбашян, А. М. О граничных свойствах произведений типа Бляшке / А. М. Джрбашян, Г. В. Микаелян // Изв. Нац. АН Армении, Математика. — 1991. — Т. 26, № 5. — С. 435–442.

8. Стейн, И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций / И. Стейн. — М. : Мир, 1973. — 342 с.

REFERENCES

1. Hayman W.K. Subharmonic functions. Acad. Press, London etc., 1989. vol. 2, pp. 591.

2. Nevanlinna R. Definite analytic functions. [Nevanlinna R. Odnoznachnye analiticheskie funkcii]. Moscow, 1941, 388 p.

3. Dzhrbashjan M.M. K probleme predstavimosti analiticheskix funkciyj. [Dzhrbashjan M.M. To the problem of representability of analytic functions]. *Soobshhenija instituta matematiki i mehaniki AN ArmSSR — Messages of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of the Armenian SSR*, 1948, iss. 2, pp. 3–35.

4. Shamojan F.A. Parametric representation and description of the root sets of the weight classes of holomorphic in the circle functions. [Shamojan F.A. Parametricheskoe predstavlenie i opisanie kornevyh mnozhestv vesovyh klassov golomorfnyh v kruge funkcij]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1999, vol. 40, no. 6, pp. 1422–1440.

5. Avetisjan K.L. On representations of some classes of subharmonic functions in the unit circle in upper half plane. [Avetisjan K.L. O predstavlenijah nekotoryh klassov subgarmonicheskih funkcij v edinichnom kruge i v verhnej poluploskosti]. *Izv. Nat. Academy of Sciences of Armenia, Mathematics — Izv. Nac. AN Armenii, Matematika*, 1994, vol. 29, no. 1.

6. Ohlupina O.V. Potentials of Green's type and integral representations of the weight classes of subharmonic functions. [Ohlupina O.V. Potencialy tipa Grina i integral'nye predstavlenija vesovyh klassov subgarmonicheskih funkcij]. dissertation for the degree of candidate physical and mathematical sciences: 01.01.01, Brjansk, 2012, 118 p.

7. Dzhrbashjan A.M., Mikaeljan G.V. On boundary properties of works of type Blaschke. [Dzhrbashjan A.M., Mikaeljan G.V. O granichnyh svojstvah proizvedenij tipa Bljashke]. *Izv. Nat. Academy of Sciences of Armenia, Mathematics — Izv. Nac. AN Armenii, Matematika*, 1991, vol. 26, no. 5, pp. 435–442.

8. Stejn I. Singular integrals and differential properties of functions. [Stejn I. Singuljarnye integraly i differencial'nye svojstva funkcij]. Moscow, 1973, 342 p.

Охлупина Ольга Валентиновна, Брянский государственный инженерно-технологический университет, Доцент кафедры «Математика», Брянск, Россия
E-mail: helga131081@yandex.ru
Тел.: +7(4832)69–69–26

Bryansk state engineering-technological University, Associate Professor of the Department «Mathematics», Bryansk, Russia, Okhlupina Olga Valentinovna
E-mail: helga131081@yandex.ru
Tel.: +7(4832)69–69–26