УДК 517.9 + 621.67

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ КАНТОРА И ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ НА КАНТОРОВЫХ МЕРАХ

М. И. Ковалева

Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина

Поступила в редакцию 17.09.2018 г.

Аннотация. Предмет динамики фрактальных сред составляет изучение процессов в пространстве, заполненным веществом, образующим фрактальную структуру. Как и всякая теория, динамика фрактальных сред оперирует величинами, усредненными по бесконечно малым фрактальным объёмам, не интересуясь молекулярной структурой вещества. К фрактальным структурам можно отнести фрактальные кластеры, фрактальные поверхности, перколяционные кластеры и другие образования. В основе построения динамики фрактальных сред лежит фундаментальное понятие фрактала и мультифрактала, а точнее, структура множества Кантора и пространства с дробной размерностью Хаусдорфа–Безиковича. В данной работе рассматривается аппарат обобщённых функций в качестве математической теории фрактальной динамики. Этот подход, с точки зрения автора, наиболее общий и содержит в себе, как частные случаи, дробное интегродифференцирование и вейвлеты.

Ключевые слова: множество Кантора, мера Хаусдорфа–Безиковича, обобщённая функция Кантора, полугруппы.

GENERAL FUNCTION OF CANTOR AND SEMIGROUP OF OPERATORS ON CANTOR MEASURES

M. I. Kovaleva

Abstract. The subject of the dynamics of fractal media is the study of processes in a space filled with a substance that forms a fractal structure. Like any theory, the dynamics of fractal media operate with values averaged over infinitesimal fractal volumes, not interested in the molecular structure of the substance. Fractal structures include fractal clusters, fractal surfaces, percolation clusters, and other formations. The construction of the dynamics of fractal media is based on the fundamental concept of fractal and multifractal, or rather, the structure of the Cantor set and space with fractional Hausdorf dimension–Bezikovich. This work considers the apparatus of generalized functions as a mathematical theory of fractal dynamics. This approach, from the author's point of view, is the most general and contains, as private cases, fractional integrodifferentiation and wavelets.

Keywords: a plurality of Cantors, measure Hausdorf-Bezikovich, generalized Cantor function, semigroup.

1. МНОЖЕСТВО КАНТОРА

Конструкция классического триадного множества Кантора с отношением ξ хорошо известна. Рассмотрим отрезок единичной длины $E_0 = [0,1]$, разделим его на три части и отбросим средний открытый интервал длиной $1 - 2\xi$. Таким образом, получается множество E_1, состоящее из двух замкнутых сегментов величиной ξ. Затем повторим эту процедуру с двумя оставшимися отрезками $[0,\xi]$ и $1 - \xi,1]$, составляющими множество E_1 и т.д. На n— шаге получается множество E_n, состоящее из 2^n отрезков длиной ξ^n. Компактное множество E_n

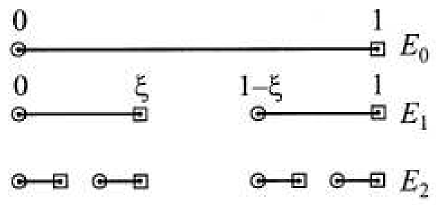

Рис. 1. *Предканторовы множества*

называется **предканторовым** множеством, а само канторово множество есть пересечение предканторовых множеств $E = \cap_{n=0}^{\infty} E_n$ (рис. 1).

Размерность Хаусдорфа–Безиковича канторова множества E равна

$$d_H = \ln 2 / |\ln \xi|, \quad 0 < \xi < \frac{1}{2}.$$

Канторово множество характеризуется точками первого и второго рода. Точки множества E являющиеся концами (левыми или правыми) смежных интервалов к канторову дисконтинууму, называются точками первого рода множества Кантора (левыми E^L и правыми E^R соответственно). Аналогичные множества E^L и E^R существуют и для любого предканторового множества E_n. На рис. 1 точки, принадлежащие множеству E_n^R обозначены кружочками, а точки, принадлежащие множеству E_n^L — квадратиками. Эти точки упорядочены слева направо, причём точки первого рода образуют счётное множество. Множество всех точек второго рода множества Кантора имеет мощность континуума.

Любую точку конторового множества E с отношением ξ можно записать в виде

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \xi^n, \tag{1}$$

где $\omega_n = \{0, \xi^{-1} - 1\}$ принимает лишь два различных значения.

Числа $t \in E$, у которых все ω_n, начиная с некоторого, равны между собой, соответствуют точкам Кантора первого рода. Таким образом, множество правых точек первого рода множества Кантора E_n^R определяется разложением (1), все коэффициенты которого, начиная с $n+1$ члена, равны нулю: $\omega_{n+1} = \omega_{n+2} = \cdots = 0$. Множество левых точек первого рода множества Кантора E_n^L определяется разложением (1), в котором все коэффициенты, начиная с $n+1$, равны между собой и равны $\xi^{-1} - 1$: $\omega_{n+1} = \omega_{n+2} = \cdots = \xi^{-1} - 1$.

Для того, чтобы перечислить все точки множества, например E_n^R, необходимо каждому ω_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ придать два значения 0 и $\xi^{-1} - 1$. Таким образом, мы получим 2^n точек множества E_n^R, т.е. $N(E_n^R) = 2^n$.

2. ОБОБЩЁННАЯ ФУНКЦИЯ КАНТОРА

Введение обобщённых функций связано с вопросом расширения представления о функциях. В связи с этим, функцию можно рассматривать не как набор значений в разных точках, воздействующую на другую пробную функцию. Наиболее интересен с этой точки зрения подход, связанный с обобщёнными функциями, порождаемыми мерами. Как отмечалось выше, построение теории электродинамики фрактальных сред основано на фрактальных мерах, а точнее на канторовых мерах. Будем рассматривать введение такой меры с использованием

© Ковалева М. И., 2020

функций Кантора α, называемой также "чёртовой лестницей". Функцией Кантора называется ограниченная монотонно неубывающая функция, являющаяся пределом последовательности предканторных функций α_n, то есть $\alpha(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n(x)$. Вся совокупность предканторовых функций $\{\alpha_n\}$ строится на отрезке $[0,1]$ с использованием совокупности множеств $\{E_n\}$. На рис. 2 приведена функция $\alpha_n(x)$ для $n = 2$.

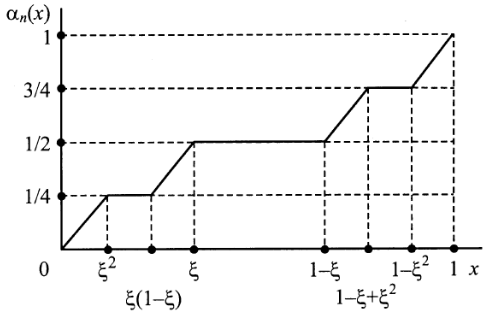

Рис. 2. *Функция Кантора для* $n = 2$

Как видно на рис. 2, эта функция $\alpha_2(x)$ равна постоянным значениям на выбрасываемых открытых интервалах и линейно растёт на замкнутых отрезках, принадлежащих в данном случае E_2. С увеличением n производная этих прямых, равная $(2\xi)^{-n}$ на E_n, растёт и в пределе при $n \to \infty$ она стремится к бесконечности. Таким образом, функция Кантора α есть функция скачков в точках канторова множества. Все построения ведутся с использованием триадного канторова множества с отношением ξ. Там, где это не вызывает сомнений, параметр ξ опускается.

На каждом из предканторовых множеств E_n можно задать меры, являющиеся вполне аддитивными функциями и, что особенно важно, порождаемые предканторовыми функциями $\alpha_n(x)$,

$$\mu(E_n) = \int_{E_n} d\alpha_n. \tag{2}$$

Совокупность мер $\{\mu(E_n)\}$ образует последовательность, сходящуюся к мере, заданной на множестве Кантора, т.е. $\lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = \mu(E)$. Мера $\mu(E_n)$ на предканторовом множестве E_n определяет обобщённую функцию Δ_n (для $n = 0,1,2,\dots$) по формуле

$$(\Delta_n,\varphi) = \int \varphi d\alpha_n. \tag{3}$$

Интеграл (3) следует понимать в смысле интеграла Лебега–Стильтьеса. Отметим также, что для $n = 0$ интеграл (3) становится интегралом Римана. Таким образом, предканторовы функции $\alpha_n(x)$ являются порождающими функциями для мер $\mu(E_n)$.

Обобщенную функцию Δ_n следует понимать как функционал, действующий на пространстве основных функций $D(Q)$; $\varphi \in D(Q)$. К этому пространству можно отнести все финитные бесконечно дифференцируемые в Q функции; $D(Q) = C_0^\infty$. В нашем случае $Q = R$— вещественная ось. Сходимость в пространстве основных фукнций $D(Q)$ $\varphi_k \to \varphi$ определяется сходимостью последовательности функций $\{\varphi\}$ и всех производных $\varphi_k^{n)} \to \varphi^{(n)}$. Для обобщённых функций Δ_n функционал (Δ_n,φ) имеет вид

$$\int \varphi d\alpha_n = \int \Delta_n \varphi dx \equiv (\Delta_n,\varphi). \tag{4}$$

Таким образом, для предканторовых обобщённых функций Δ_n существует их явное выражение через производную от $\alpha_n(x)$

$$\frac{d}{dx}\alpha_n(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E_n, \\ \frac{1}{(2\xi)^n}, & x \in e_n. \end{cases} \tag{5}$$

Из выражений (4) и (5) следует, что

$$(\Delta_n,\varphi) = \int_{E_n \subset R} \frac{1}{(2\xi)^n} \chi_{E_n}(x)\varphi(x)dx, \tag{6}$$

где χ_{E_n}— характеристическая функция множества E_n

$$\chi_{E_n} = \begin{cases} 0, & x \notin E_n, \\ 1, & x \in e_n. \end{cases} \tag{7}$$

Выражение (7) можно привести к виду

$$(\Delta_n,\varphi) = \frac{1}{2^n} \int_0^1 \sum_{\alpha \in \Omega_n} \varphi(\xi^n x + x_\alpha)dx, \tag{8}$$

где $x_\alpha \in E_n^R$. Следует отметить, что $(\Delta_n,1) = 1$ для всех n.

Функционал (8) показывает действие обобщённых функций Δ_n на пробную функцию $\varphi(x)$ из пространства основных функций. Результат этого действия сводится фактически к взятию среднего от $\varphi(x)$ на E_n. Носителями обобщённых функций $\{\Delta_n\}$ являются предканторовы множества $\{E_n\}$, то есть $supp\,\Delta_n = E_n$. Таким образом, обобщённые функции $\{\Delta_n\}$ есть функционалы на $D(Q)$ и $D'(R)$— линейное пространство всех обобщённых функций, сопряжённое к $D(R)$. При этом сходимость в $D'(R)$ вводится как слабая сходимость функционалов. Исходя из этого, последовательность Δ_n определяет обобщённую функцию Кантора

$$\lim_{n\to\infty}(\Delta_n,\varphi) = (\Delta_\xi,\varphi). \tag{9}$$

Используя (8) и (9), представим обобщённую функцию Кантора в виде

$$(\Delta_\xi,\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha \in \Omega_n} \varphi(x_\alpha), \quad (\Delta_\xi,1) = 1. \tag{10}$$

Очевидно, что $supp\,\Delta_\xi = E$.

Возвращаясь к процедуре введения обобщённых функций через меры (2), можно представить Δ_ξ выражением, которое наиболее удобно для проведения вычислений и из которых видна связь функции Кантора α, порождающей меру $\mu(E)$, с обобщённой функцией Кантора Δ_ξ, являющейся функционалом

$$(\Delta_\xi,\varphi) = \int_R \varphi d\alpha. \tag{11}$$

Из (10) можно показать, что обобщённая функция Δ_ξ является сингулярной обобщённой функцией. Сравнивая дельта–функцию Дирака δ и Δ_ξ, следует отметить, что обе они являются сингулярными обобщёнными функциями и их носителями являются множества меры нуль: $supp\,\delta = \{0\}$ и $supp\,\Delta_\xi = E$.

Полугруппа операторов на канторовых мерах $\mu(E_n)$.

Введём в рассмотрение множество операторов $\{A_n\}$, которые действуют на множестве мер $\{\mu(E_n)\}$ $(n = 0,1,2,\dots)$, по следующему закону:

$$A_k\mu(E_n) = \mu(E_{k+n}). \tag{12}$$

Операторы $\{A_k\}$, заданные выражением (12), образуют полугруппу G, так как $A_kA_n = A_{k+n}$ и выполняется ассоциативность $A_k(A_nA_m) = (A_kA_n)A_m$. оператор A_0 является единицей данной полугруппы. Действие оператора $\{A_n\}$ можно расспространить на функциональные пространства, например на пространство основных функций $D(Q)$. Для получения явного вида операторов $\{A_k\}$ полагаем, что любой $A_k \in G$ обладает следующим свойством:

$$(A_k\Delta_n,\varphi) = (\Delta_n,A_k\varphi). \tag{13}$$

Такое свойство операторов $\{A_k\}$ является аналогичным свойству действия оператора дифференцирования на обобщённые функции из $D'(Q)$: $(D^nf,\varphi) = (-1)^n(f,D^n\varphi)$, где n— порядок производной. Для того, чтобы получить явный вид операторов $\{A_k\}$, положим в выражении (13) $n = 0$. Тогда $(A_k\Delta_0,\varphi) = (\Delta_0,A_k\varphi)$. С другой стороны

$$\int_R \varphi d\alpha_k = \int_R A_k\varphi dx. \tag{14}$$

Используя выражения (4), (8) и (14), получим явный вид операторов $\{A_k\}$ $(k = 0,1,2,\dots)$

$$A_k\varphi(t) = \frac{1}{2^k}\sum_{\alpha\in\Omega_k}\varphi(\xi^kt + t_\alpha). \tag{15}$$

Для $k = 0$, $A_0\varphi = \varphi$. Операторы A_k отображают пространство основных функций в себя. Они преобразуют $t \to t' = \xi^k + t_\alpha$ $(t \in R,\ t' \in R,\ t_\alpha \in E_k^R)$ и производят усреднение по правым точкам первого рода множества Кантора.

Операторы $\{A_k\} \in G$ сохраняют структуру полугруппы, так как непосредственным вычислением, используя (15), можно показыать, что $A_kA_n\varphi = A_{k+n}\varphi$. Действительно, исходя из того, что $t_\beta + \xi^kt_\alpha$, где $\alpha \in \Omega_n$, $\beta \in \Omega_k$, $\gamma \in \Omega_{n+k}$, получаем

$$A_nA_k\varphi(t) = \frac{1}{2^{n+k}}\sum_{\alpha\in\Omega_n}\sum_{\beta\in\Omega_k}\varphi(\xi^{n+k}t + \xi^kt_\alpha + t_\beta) =$$

$$= \frac{1}{2^{n+k}}\sum_{\gamma\in\Omega_{n+k}}\varphi\left(\xi^{n+k}t + t_\gamma\right). \tag{16}$$

Из выражений (12) и (13) при $n \to \infty$ вытекает следующее свойство инвариантности, необходимое для вычисления функционалов Δ_ξ:

$$A_k\mu(E) = A_n\mu(E), \quad (\Delta_\xi, A_k\varphi) = (\Delta_\xi, A_n\varphi). \tag{17}$$

Равенство (17) выполняется для любых n $(k = 0,1,2,\dots)$. В качестве примера вычислим конкретный функционал

$$I(v) = (\Delta_\xi, x^v) = \int_0^1 x^v d\alpha. \tag{18}$$

Используя соотношения (18) для A_1 и выражение (15), получим значение функционала $I(v)$

$$I(v) = \int_0^1 A_1x^v d\alpha = \int_0^1 \frac{(\xi x)^v + (1 - \xi + \xi x)^v}{2}d\alpha. \tag{19}$$

Таким образом, можно получить функциональное соотношение для функционалов $I(v)$

$$I(v) = \frac{(1-\xi)^v}{2(1-\xi^v)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{v(v-1)\dots(v-k-1)}{k!}(\xi^{-1}-1)^{-k}I(k). \tag{20}$$

Для $v = m$ $m \in Z$, и, имея в виду $I(0) = 1$, выражение (20) приобретает вид

$$I(m) = \frac{(1-\xi)^m}{2(1-\xi^m)} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m(m-1)\dots(m-k-1)}{k!} (\xi^{-1}-1)^{-k} I(k). \tag{21}$$

Для $m = 1$ $I(1) = 1/2$. В этом случае интеграл Лебега–Стильтьеса (18) не отличается от интеграла Римана для функции x^m. Но для $m = 2$ $I(2) = 1/(2(1+\xi))$. Этот результат существенно отличается от значения интеграла Римана, который равен $1/3$. Значение обоих интегралов совпадает для $\xi = 1/2$. Также заметим, что $1/(2(1+\xi)) > 1/3$ для $0 < \xi < 1/2$.

Далее, приведём выражения для некоторых функционалов, вычисленных с помощью описанного алгоритма,

$$(\Delta_\xi, e^{\eta t}) = e^{\eta/2} \prod_{n=0}^{\infty} \operatorname{ch}\left[\frac{(1-\xi)\xi^n}{2}\eta\right], \tag{22}$$

$$(\Delta_\xi, e^{i\pi a t}) = e^{i\pi a/2}\gamma_\xi(\pi a),$$

$$\gamma_\xi(\pi a) = \prod_{n=0}^{\infty} \cos\left[\frac{(1-\xi)\xi^k}{2}\pi a\right]. \tag{23}$$

Сравнивая выражения для функционалов (23) и (13), получим выражение, которое будем использовать далее,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{\alpha\in\Omega_n} e^{it_\alpha \omega} = e^{i\omega/2}\gamma_\xi(\omega). \tag{24}$$

Таким образом, инвариант (17) делает возможным вычисление функционалов Δ_ξ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Владимиров, В. С. Обобщённые функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1979. — 320 с.

2. Александров, П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П. С. Александров. — М. : Наука, 1997. — 368 с.

3. Лаллеман, Ж. Полугруппы и комбинаторные приложения / Ж. Лаллеман. — М. : Мир, 1985. — 440 с.

4. Об априорных оценках решений граничных задач для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 77–92.

5. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

6. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

7. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

8. Шабров, С. А. Адаптация метода конечных элементов для разнопорядковой математической модели / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, Ф. В. Голованёва // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 145–157.

REFERENCES

1. Vladimirov V.S. Generalized functions in mathematical physics. [Vladimirov V.S. Obobshhyonnye funkcii v matematicheskoyj fizike]. Moscow, 1979, 320 p.

2. Alexandrov P.S. Introduction to set theory and general topology. [Aleksandrov P.S. Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshhuyu topologiyu]. Moscow, 1997, 368 p.

3. Lalleman J. Semi-groups and combinatorial applications. [Lalleman Zh. Polugruppy i kombinatornye prilozheniya]. Moscow, 1985, 440 p.

4. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A. On a priori estimates for solutions of boundary value problems for a class of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. Ob apriornyx ocenkax resheniyj granichnyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 77–92.

5. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

6. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

7. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 162–172.

8. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Golovaneva F.V. Adaptation of the finite element method for different order mathematical model with nonsmooth solutions. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Golovanyova F.V. Adaptaciya metoda konechnyx elementov dlya raznoporyadkovoyj matematicheskoyj modeli]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 145–157.

Ковалева М. И., Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: marinkov@mail.ru

Kovaleva M. I., Air Force Academy name. Prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin, Voronezh, Russian Federation
E-mail: marinkov@mail.ru