УДК 517.9

УСЛОВИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ГДЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ИЗВЕСТНЫЕ КОНСТАНТЫ И ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕННОГО t

М. В. Донцова

Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию 10.05.2018 г.

Аннотация. Рассмотрена задача Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, где коэффициенты известные константы и функции переменного t. Локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши доказана с помощью метода дополнительного аргумента. Определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, где коэффициенты известные константы и функции переменного t. Исследование нелокальной разрешимости задачи Коши основано на методе дополнительного аргумента. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, где коэффициенты известные константы и функции переменного t, опирается на глобальные оценки.

Ключевые слова: уравнения с частными производными первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента, глобальные оценки.

NONLOCAL SOLVABILITY CONDITIONS FOR THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES OF THE FIRST ORDER, WHERE THE COEFFICIENTS ARE KNOWN CONSTANTS AND FUNCTIONS OF THE VARIABLE t

M. V. Dontsova

Abstract. The Cauchy problem for a system of first order partial differential equations, where the coefficients are known constants and functions of the variable t, is considered. Local existence and uniqueness theorem of the solution of the Cauchy problem is proved with the method of an additional argument. The conditions of a nonlocal resolvability of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations, where the coefficients are known constants and functions of the variable t, are determined. The investigation of a nonlocal resolvability of the Cauchy problem is based on the method of an additional argument. The proof of the nonlocal resolvability of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations, where the coefficients are known constants and functions of the variable t, relies on global estimates.

Keywords: first order partial differential equations, Cauchy problem, method of an additional argument, global estimates.

ВВЕДЕНИЕ

Системы квазилинейных уравнений встречаются в самых разных задачах из области естественных наук, например, при описании распространения возмущения конечной интенсивности при нестационарном одномерном течении идеального газа [1].

Задача определения условий разрешимости в исходных координатах систем нелинейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка эффективно решается в рамках метода дополнительного аргумента [2]–[10]. Он не заменяет собой другие известные методы, а дополняет их. Применение этого метода позволяет во многих случаях более эффективно и конкретно определить условия разрешимости систем, интервал разрешимости и избегать необходимости находить обратную функцию. Определение условий разрешимости для систем уравнений в частных производных первого порядка, когда каждое уравнение имеет своё характеристическое направление является сложной задачей. Причина в том, что характеристики могут пересекаться.

В работах [2], [7], [8], [9] с помощью метода дополнительного аргумента определены условия нелокальной разрешимости задачи Коши для некоторых типов систем двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. В данной работе определяем условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, где коэффициенты известные константы и функции переменного t.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (a_1(t)u(t,x) + b_1(t)v(t,x))\,\partial_x u(t,x) = a_2 u(t,x) + b_2(t)v(t,x), \\ \partial_t v(t,x) + (c_1(t)u(t,x) + g_1(t)v(t,x))\,\partial_x v(t,x) = g_2 v(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

где $u(t,x)$, $v(t,x)$ — неизвестные функции, a_2, g_2 — известные константы, $a_1(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $c_1(t)$, $g_1(t)$ — известные функции.

Поставим для системы уравнений (1) задачу Коши, т. е. зададим начальные условия:

$$u(0,x) = \varphi_1(x), v(0,x) = \varphi_2(x), \tag{2}$$

где $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — известные функции.

Задача (1), (2) определена в области

$$\Omega_T = \{(t,x)|\, 0 \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

Примем, что $\varphi_i \in \overline{C}^2(R^1)$, $i = 1,2$, $a_1(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $c_1(t)$, $g_1(t) \in C([0,T])$, где $\overline{C}^2(R^1)$ — пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными первого и второго порядка на R, $C([0,T])$ — пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке $[0,T]$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА

В соответствии с методом дополнительного аргумента, запишем для задачи (1), (2) расширенную характеристическую систему [2]–[10]:

$$\frac{dz_1(s,t,x)}{ds} = a_1(s)w_1(s,t,x) + b_1(s)w_3(s,t,x), \tag{3}$$

$$\frac{dz_2(s,t,x)}{ds} = c_1(s)w_4(s,t,x) + g_1(s)w_2(s,t,x), \tag{4}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = a_2(s)w_1(s,t,x) + b_2(s)w_3(s,t,x), \tag{5}$$

$$\frac{dw_2(s,t,x)}{ds} = g_2(s)w_2(s,t,x), \tag{6}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,z_1), w_4(s,t,x) = w_1(s,s,z_2), \tag{7}$$

$$w_1|_{s=0} = \varphi_1(z_1(0,t,x)), w_2|_{s=0} = \varphi_2(z_2(0,s,x)), z_1|_{s=t} = x, z_2|_{s=t} = x. \tag{8}$$

Неизвестные функции z_i, w_j, $i = 1, 2$, $j = \overline{1,4}$ зависят не только от t и x, но и от дополнительного аргумента s. Интегрируя уравнения (3)–(6) по аргументу s, и учитывая условия (7)–(8), получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$z_1(s,t,x) = x - \int\limits_s^t (a_1(\mathrm{v})w_1(\mathrm{v},t,x) + b_1(\mathrm{v})w_3(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}, \tag{9}$$

$$z_2(s,t,x) = x - \int\limits_s^t (c_1(\mathrm{v})w_4(\mathrm{v},t,x) + g_1(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}, \tag{10}$$

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1(z_1(0,t,x)) + \int\limits_0^s (a_2 w_1(\mathrm{v},t,x) + b_2(\mathrm{v})w_3(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}, \tag{11}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2(z_2(0,t,x)) + \int\limits_0^s g_2 w_2(\mathrm{v},t,x)\, d\mathrm{v}, \tag{12}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2(s,s,z_1), w_4(s,t,x) = w_1(s,s,z_2). \tag{13}$$

Подставим (9), (10) в (11)–(13), получим следующую систему:

$$w_1(s,t,x) = \varphi_1\left(x - \int\limits_0^t (a_1(\mathrm{v})w_1(\mathrm{v},t,x) + b_1(\mathrm{v})w_2(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}\right) + \\ + \int\limits_0^s (a_2 w_1(\mathrm{v},t,x) + b_2(\mathrm{v})w_3(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}, \tag{14}$$

$$w_2(s,t,x) = \varphi_2\left(x - \int\limits_0^t (c_1(\mathrm{v})w_4(\mathrm{v},t,x) + g_1(\mathrm{v})w_2(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}\right) + \int\limits_0^s g_2 w_2(\mathrm{v},t,x)\, d\mathrm{v}, \tag{15}$$

$$w_3(s,t,x) = w_2\left(s, s, x - \int\limits_s^x (a_1(\mathrm{v})w_1(\mathrm{v},t,x) + b_1(\mathrm{v})w_3(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}\right), \tag{16}$$

$$w_4(s,t,x) = w_1\left(s, s, x - \int\limits_s^x (c_1(\mathrm{v})w_4(\mathrm{v},t,x) + g_1(\mathrm{v})w_2(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}\right). \tag{17}$$

Мы будем писать, что константы $a_1, a_2, a_3, \ldots$ определяются через исходные данные, если эти константы определяются через известные характеристики задачи, нормы и экстремумы известных функций при помощи конечных алгебраических, дифференциальных или интегральных выражений, то есть в рамках исходной задачи могут быть выражены конкретным числом.

Справедливо утверждение [2]–[10]:

Утверждение. *Пусть функции $w_1(s,t,x)$, $w_2(s,t,x)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений* (14)–(17) *и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными, тогда функции $u(t,x) = w_1(t,t,x)$, $v(t,x) = w_2(t,t,x)$ будут решением задачи* (1), (2) *на Ω_{T_0}, $T_0 \leqslant T$, где T_0 — константа, определяемая через исходные данные.*

СУЩЕСТВОВАНИЕ ЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Для доказательства существования решения задачи (1)–(2) в классе ограниченных функций будем использовать систему интегральных уравнений (14)–(17).

Обозначим $\Gamma_T = \{(s,t,x)|\, 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, x \in (-\infty,+\infty), T > 0\}$, $C_\varphi = \max\{\sup\limits_R |\varphi_i^{(l)}|\, i = 1,2, l = \overline{0,2}\}$,

$$l = \max\left\{\sup_{[0,T]} |a_1(t)|, \sup_{[0,T]} |b_1(t)|, \sup_{[0,T]} |c_1(t)|, \sup_{[0,T]} |b_2(t)|, |a_2|, |g_2|\right\},$$

$\overline{C}^{1,2,3}(\Omega_T)$ — пространство функций один раз дифференцируемых по переменной t, дважды дифференцируемых функций по переменной x, имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T.

Для функции $U \in \Gamma_T$ определим норму $\|U\| = \sup\limits_{\Gamma_T} |U(s,t,x)|$.

Лемма 1. *Система интегральных уравнений (14)–(17) имеет единственное решение $w_j \in \overline{C}^{1,1,1}(\Gamma_{T_2})$, где $j = \overline{1,4}$,*

$$T_2 = \min\left(\frac{1}{10l}, \frac{1}{25C_\varphi l}\right).$$

Доказательство. Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (14)–(17) зададим равенствами: $w_{10}(s,t,x) = \varphi_1(x)$, $w_{20}(s,t,x) = \varphi_2(x)$, $w_{30}(s,t,x) = \varphi_2(x)$, $w_{40}(s,t,x) = \varphi_1(x)$.

Первое и последующие приближения системы уравнений (14)–(17) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений ($n = 1, 2, \ldots$):

$$w_{1n}(s,t,x) = \varphi_1\left(x - \int_0^t (a_1(\mathrm{v})w_{1n}(\mathrm{v},t,x) + b_1(\mathrm{v})w_{3n}(\mathrm{v},t,x))\,d\mathrm{v}\right) + \\ + \int_0^s (a_2 w_{1n}(\mathrm{v},t,x) + b_2(\mathrm{v})w_{3n}(\mathrm{v},t,x))\,d\mathrm{v}, \quad (18)$$

$$w_{2n}(s,t,x) = \varphi_2\left(x - \int_0^t (c_1(\mathrm{v})w_{4n}(\mathrm{v},t,x) + g_1(\mathrm{v})w_{2n}(\mathrm{v},t,x))\,d\mathrm{v}\right) + \int_0^s g_2 w_{2n}(\mathrm{v},t,x)\,d\mathrm{v}, \quad (19)$$

$$w_{3n}(s,t,x) = w_{2(n-1)}\left(s, s, x - \int_s^t (a_1(\mathrm{v})w_{1n}(\mathrm{v},t,x) + b_1(\mathrm{v})w_{3n}(\mathrm{v},t,x))\,d\mathrm{v}\right), \quad (20)$$

$$w_{4n}(s,t,x) = w_{1(n-1)}\left(s, s, x - \int\limits_s^t (c_1(\mathrm{v}) w_{4n}(\mathrm{v},t,x) + g_1(\mathrm{v}) w_{2n}(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}\right). \qquad (21)$$

Для системы уравнений (18)–(21) нулевое приближение определим равенствами:

$$w^0_{1n} = w_{1(n-1)}, w^0_{2n} = w_{2(n-1)}, w^0_{3n} = w_{3(n-1)}, w^0_{4n} = w_{4(n-1)}.$$

Для системы уравнений (18)–(21) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений:

$$w^{k+1}_{1n}(s,t,x) = \varphi_1\left(x - \int\limits_0^t (a_1(\mathrm{v}) w^k_{1n}(\mathrm{v},t,x) + b_1(\mathrm{v}) w^k_{3n}(,t,x))\, d\mathrm{v}\right) + \\ + \int\limits_0^s (a_2 w^k_{1n}(\mathrm{v},t,x) + b_2(\mathrm{v}) w^k_{3n}(\mathrm{v},t,s))\, d\mathrm{v}, \qquad (22)$$

$$w^{k+1}_{2n}(s,t,x) = \varphi_2\left(x - \int\limits_0^t (c_1(\mathrm{v}) w^k_{4n}(\mathrm{v},t,x) + g_1(\mathrm{v}) w^k_{2n}(,t,x))\, d\mathrm{v}\right) + \int\limits_0^s g_2 w^k_{2n}(\mathrm{v},t,x)\, d\mathrm{v}, \qquad (23)$$

$$w^{k+1}_{3n}(s,t,x) = w_{2(n-1)}\left(s, s, x - \int\limits_s^t (a_1(\mathrm{v}) w^k_{1n}(\mathrm{v},t,x) + b_1(\mathrm{v}) w^k_{3n}(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}\right), \qquad (24)$$

$$w^{k+1}_{4n}(s,t,x) = w_{1(n-1)}\left(s, s, x - \int\limits_s^t (c_1(\mathrm{v}) w^k_{4n}(\mathrm{v},t,x) + g_1(\mathrm{v}) w^k_{2n}(\mathrm{v},t,x))\, d\mathrm{v}\right). \qquad (25)$$

Так же, как в [3]–[9], установлено, что при выполнении условия

$$0 \leqslant t \leqslant T_1, \text{ где } T_1 = \left(\frac{1}{4l}, \frac{1}{20C_\varphi l}\right) \qquad (26)$$

последовательные приближения (22)–(25) ограничены, непрерывны, сходятся к непрерывному решению системы (18)–(21), для которого справедливы оценки: $\|w_{jn}\| \leqslant 2C_\varphi$, $j = \overline{1,4}$.

Так же, как в [3]–[9], установлено, что при выполнении условия (26) существуют производные $\partial_x w_{jn}$, $j = \overline{1,4}$ и справедливы оценки:

$$\|\partial_x w_{1n}\| \leqslant 4C_\varphi, \|\partial_x w_{2n}\| \leqslant 4C_\varphi, \|\partial_x w_{3n}\| \leqslant 6C_\varphi, \|\partial_x w_{4n}\| \leqslant 6C_\varphi.$$

При выполнении условия (26) последовательные приближения, определяемые из системы (18)–(21), сходятся к решению системы (14)–(17) при $n \to \infty$ и справедливы оценки: $\|w_j\| \leqslant 2C_\varphi$, $j = \overline{1,4}$.

После доказывается, что при выполнении условия

$$0 \leqslant t \leqslant T_2, \text{ где } T_1 = \left(\frac{1}{10l}, \frac{1}{25C_\varphi l}\right) \qquad (27)$$

$w_{jnx} \to w_{ix} = \partial_x w_j$, $j = \overline{1,4}$, где функции $\partial_x w_j$, $j = \overline{1,4}$ являются непрерывными по всем своим аргументам на Γ_{T_2}. Справедливы оценки:

$$\|\partial_x w_i\| \leqslant 4C_\varphi, \|\partial_x w_3\| \leqslant 8C_\varphi, \|\partial_x w_4\| \leqslant 8C_\varphi, i = 1, 2.$$

Аналогично устанавливаем, что w_j, $j = \overline{1,4}$ имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t на Γ_{T_2}. Единственность решения доказывается так же, как в работе [3]. Лемма 1 доказана.

Введем условия

$$a_1(t) < 0, b_1(t) > 0, b_2(t) < 0, c_1(t) < 0, g_1(t) > 0, \acute{\varphi}_1(x) \leqslant 0, \acute{\varphi}_2(x) \geqslant 0, \tag{28}$$

$$0 \leqslant t \leqslant T_2, \text{ где } T_2 = \min\left(\frac{1}{10l}, \frac{1}{25C_\varphi l}\right). \tag{29}$$

Лемма 2. *Функции, w_j, $j = \overline{1,4}$, представляющие собой решение системы уравнений* (14)–(17), *имеют непрерывные и ограниченные производные* $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$ *на* Γ_{T_2}, *где* $T_2 = \min\left(\dfrac{1}{10l}, \dfrac{1}{25C_\varphi l}\right)$.

Доказательство. Так как w_{1n}, w_{3n} имеют ограниченную частную производную по x, то по свойствам интегралов, модулей, экспоненты, теореме о конечном приращении при выполнении условий (28) и (29) получаем

$$\left| x_1 - \int\limits_s^t (a_1(\mathrm{v}) w_{1n}(\mathrm{v}, t, x_1) + b_1(\mathrm{v}) w_{3n}(\mathrm{v}, t, x_1))\, d\mathrm{v} - x_2 + \right.$$
$$\left. + \int\limits_s^t (a_1(\mathrm{v}) w_{1n}(\mathrm{v}, t, x_2) + b_1(\mathrm{v}) w_{3n}(\mathrm{v}, t, x_2))\, d\mathrm{v} \right| \leqslant |x_1 - x_2|,$$

$$\left| x_1 - \int\limits_s^t (c_1(\mathrm{v}) w_{4n}(\mathrm{v}, t, x_1) + g_1(\mathrm{v}) w_{2n}(\mathrm{v}, t, x_1))\, d\mathrm{v} - x_2 + \right.$$
$$\left. + \int\limits_s^t (c_1(\mathrm{v}) w_{4n}(\mathrm{v}, t, x_2) + g_1(\mathrm{v}) w_{2n}(\mathrm{v}, t, x_2))\, d\mathrm{v} \right| \leqslant |x_1 - x_2|,$$

Докажем равностепенную непрерывность функций w_1^n, w_2^n. Зафиксируем точку x_0.

При выполнении условия (29) по свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено, что

$$\left| \int\limits_s^t (a_1(\mathrm{v}) w_{1n} + b_1(\mathrm{v}) w_{3n})\, d\mathrm{v} \right| \leqslant 0{,}16,$$

$$\left| \int\limits_s^t (c_1(\mathrm{v}) w_{4n} + g_1(\mathrm{v}) w_{2n})\, d\mathrm{v} \right| \leqslant 0{,}16.$$

Обозначим $\Omega_{x_0} = \{x |\, x - 0{,}16 \leqslant x \leqslant x_0 + 0{,}16\}$.

Возьмем $x_1, x_2 \in \Omega_{x_0}$. Тогда при выполнении условий (28), (29), по свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено, что

$$|w_1^n(s, t, x_1) - w_1^n(s, t, x_2)| < \Phi_{1n} +$$
$$+ 0{,}14 \left[|w_1^n(s, t, x_1) - w_1^n(s, t, x_2)| + w_3^n(s, t, x_1) - w_3^n(s, t, x_2)| \right],$$

$$|w_3^n(s,t,x_1) - w_3^n(s,t,x_2)| < \Phi_{3n} + |w_2^{n-1}(s,t,x_1) - w_2^{n-1}(s,t,x_2)| + \\ + 0{,}14\left[|w_1^n(s,t,x_1) - w_1^n(s,t,x_2)| + w_3^n(s,t,x_1) - w_3^n(s,t,x_2)|\right],$$

где Φ_{1n}, Φ_{3n} — известные последовательности.

Пользуясь равномерной и равностепенной непрерывностью, а также ограниченностью всех входящих в Φ_{1n}, Φ_{3n} функций для любого сколько угодно малого числа ε, можно подобрать такое $\delta > 0$, что для всех n будет $\Phi_{1n} < \frac{1}{2}\varepsilon$, $\Phi_{3n} < \frac{1}{2}\varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$.

Предположим, что при $|x_1 - x_2| < \delta$ $|w_2^{n-1}(s,t,x_1) - w_2^{n-1}(s,t,x_2)| < \varepsilon$. Тогда

$$|w_1^n(s,t,x_1) - w_1^n(s,t,x_2)| + |w_3^n(s,t,x_1) - w_3^n(s,t,x_2)| < \frac{20}{7}\varepsilon.$$

Так как

$$|w_1^n(s,t,x_1) - w_1^n(s,t,x_2)| < 0{,}5\varepsilon + 0{,}14\left[|w_1^n(s,t,x_1) - w_1^n(s,t,x_2)| + |w_3^n(s,t,x_1) - w_3^n(s,t,x_2)|\right],$$

то $|w_1^n(s,t,x_1) - w_1^n(s,t,x_2)| < 0{,}9\varepsilon$, следовательно,

$$|w_1^n(s,t,x_1) - w_1(s,t,x_2)| < \varepsilon \text{ при } |x_1 - x_2| < \delta.$$

Аналогично, $|w_1^n(s,t,x_1) - w_1(s,t,x_2)| < \varepsilon$ при $|x_1 - x_2| < \delta$. Итак, последовательности $\{w_i^n(s,t,x)\}$, $i = 1,2$ равностепенно непрерывны по x при $x \in \Omega_{x_0}$.

Равностепенная непрерывность функций w_1^n, w_2^n по x используется при доказательстве сходимости последовательных приближений w_j^n, $j = \overline{1,4}$.

Рассмотрим систему рекуррентных уравнений

$$\widetilde{w}_1^n(s,t,x) = -\acute{\varphi}_1(*)\int\limits_0^t (a_1(\mathrm{v})\widetilde{w}_1^n + b_1(\mathrm{v})\widetilde{w}_3^n)d\mathrm{v} + \\ + \int\limits_0^s (a_2\widetilde{w}_1^n + b_2(\mathrm{v})\widetilde{w}_3^n)\,d\mathrm{v} + \varphi_1'' \cdot \left(1 - \int\limits_0^t (a_1(\mathrm{v})w_{1x} + b_1(\mathrm{v})w_{3x})\,d\mathrm{v}\right)^2,$$

$$\widetilde{w}_2^n(s,t,x) = -\acute{\varphi}_2(*)\int\limits_0^t (c_1(\mathrm{v})\widetilde{w}_4^n + g_1(\mathrm{v})\widetilde{w}_2^n)d\mathrm{v} + \\ + \int\limits_0^s g_1\widetilde{w}_2^n\,d\mathrm{v} + \varphi_2'' \cdot \left(1 - \int\limits_0^t (c_1(\mathrm{v})w_{4x} + g_1(\mathrm{v})w_{2x})\,d\mathrm{v}\right)^2,$$

$$\widetilde{w}_3^n(s,t,x) = \widetilde{w}_2^{n-1} \cdot \left(1 - \int\limits_s^t (a_1(\mathrm{v})\widetilde{w}_{1x}^n + b_1(\mathrm{v})w_{3x}^n)d\mathrm{v}\right)^2 - \\ - w_{2x}\left(s,s,x - \int\limits_s^t (a_1w_1 + b_1(\mathrm{v})w_3)\,d\mathrm{v}\right)\int\limits_s^t (a_1(\mathrm{v})\widetilde{w}_1^n + b_1(\mathrm{v})\widetilde{w}_3^n)\,d\mathrm{v},$$

$$\widetilde{w}_4^n(s,t,x) = \widetilde{w}_1^{n-1}\cdot\left(1-\int\limits_s^t (c_1(\mathrm{v})\widetilde{w}_{4x}^n + g_1(\mathrm{v})w_{2x}^n)d\mathrm{v}\right)^2 -$$

$$- w_{1x}\left(s,s,x-\int\limits_s^t (c_1 w_4 + g_1(\mathrm{v})w_2)\,d\mathrm{v}\right)\int\limits_s^t (c_1(\mathrm{v})\widetilde{w}_4^n + b_1(\mathrm{v})\widetilde{w}_2^n)\,d\mathrm{v},$$

При выполнении условий (28), (29) так же, как в [7]–[9], установлено, что

$$\widetilde{w}_1^n \to \widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2^n \to \widetilde{w}_2, \widetilde{w}_3^n \to \widetilde{w}_3, \widetilde{w}_4^n \to \widetilde{w}_4.$$

Справедливы оценки:

$$\|\widetilde{w}_1\| \leqslant 2C_\varphi, \|\widetilde{w}_2\| \leqslant 2C_\varphi, \|\widetilde{w}_3\| \leqslant 3C_\varphi, \|\widetilde{w}_4\| \leqslant 3C_\varphi.$$

Из неравенства

$$\|w_1^{N+k} - \widetilde{w}_1\| + \|w_2^{N+k} - \widetilde{w}_2\| \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\|w_1^N - \widetilde{w}_1\| + \|w_2^N - \widetilde{w}_2\|\right) + 4\varepsilon,$$

следует, что $w_i^{N+k} \to \widetilde{w}_i$, $i = 1, 2$ при $N \to \infty$, $k \to \infty$.

Отсюда следует, что $w_3^n \to \widetilde{w}_3$, $w_4^n \to \widetilde{w}_4$ при $n \to \infty$.

Получаем, что $w_{jnxx} \to w_{jxx} = \widetilde{w}_j$, где функции $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$ непрерывны и ограничены при выполнении условий (28), (29). Аналогично устанавливаем, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\dfrac{\partial^2 w_j}{\partial t \partial x}$, $j = \overline{1,4}$ при выполнении условий (28), (29). Лемма 2 доказана.

Из лемм 1 и 2 следует теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_i \in \overline{C}^2(R^1)$, $i = 1, 2$, $a_1(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $c_1(t)$, $g_1(t) \in C([0,T])$, *выполняются условия* (28).

Тогда для всех $0 \leqslant t \leqslant T_2$, *где* $T_2 = \min\left(\dfrac{1}{10l}, \frac{1}{25C_\varphi l}\right)$, *задача Коши* (1), (2) *имеет единственное решение* $u(t,x)$, $v(t,x) \in \overline{C}^{1,2,2}(\Omega_{T_2})$ *которое определяется из системы интегральных уравнений (14)–(17).*

В теореме 1 сформулированы достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши в исходных координатах, при которых решение имеет такую же гладкость по x, как и начальные функции задачи Коши $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

СУЩЕСТВОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ. ВЫВОД НЕЛОКАЛЬНЫХ ОЦЕНОК

Справедлива теорема, в которой сформулированы достаточные условия существования и единственности нелокального решения задачи Коши в исходных координатах (для заданного конечного промежутка $t \in [0,T]$).

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_i \in \overline{C}^2(R^1)$, $i = 1, 2$, $a_1(t)$, $b_1(t)$, $b_2(t)$, $c_1(t)$, $g_1(t) \in C([0,T])$, *выполняются условия* (28).

Тогда для любого $T > 0$ *задача Коши* (1), (2) *имеет единственное решение* $u(t,x)$, $v(t,x) \in \overline{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$, *которое определяется из системы интегральных уравнений* (14)–(17).

Доказательство. Продифференцируем систему уравнений (1) по x и обозначим $p(t,x) = u_x(t,x)$, $q(t,x) = v_x(t,x)$, получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{c} \partial_t p + (a_1(t)u + b_1(t)v)\partial_x p = -a_1(t)p^2 - b_1(t)qp + a_2 p + b_2(t)q, \\ \partial_t q + (c_1(t)u + g_1(t)v)\partial_x q = -q_1(t)p^2 - c_1(t)qp + g_2 q, \\ p|_{t=0} = \acute{\varphi}_1(x),\ q_{t=0} = \acute{\varphi}_2(x). \end{array} \right. \tag{30}$$

Добавим к системе уравнений (9)–(13) два уравнения:

$$\frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -a_1(s)\gamma_1^2 - b_1(s)\gamma_1\gamma_2(s,s,z_1) + a_2\gamma_1 + b_2(s)\gamma_2(s,s,z_1), \tag{31}$$

$$\frac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = -g_1(s)\gamma_2^2 - c_1(s)\gamma_1(s,s,z_1)\gamma_2 + \gamma_2\gamma_2, \tag{32}$$

с условиями:

$$\gamma_1|_{s=0} = \acute{\varphi}_1(z_1), \gamma_2|_{s=0} = \acute{\varphi}_2(z_2). \tag{33}$$

Перепишем систему уравнений (31)–(33) в следующем виде:

$$\gamma_1(s,t,x) = \acute{\varphi}_1(z_1) - \int_0^s [a_1(\mathrm{v})\gamma_1^2 + (b_1(\mathrm{v})\gamma_1 - b_2(\mathrm{v}))\gamma_2(\mathrm{v},\mathrm{v},z_1) - a_2\gamma_1]\, d\mathrm{v}, \tag{34}$$

$$\gamma_2(s,t,x) = \acute{\varphi}_2(z_2) - \int_0^s [g_1(\mathrm{v})\gamma_2^2 + c_1(\mathrm{v})\gamma_1(\mathrm{v},\mathrm{v},z_1) - g_2\gamma_2]\, d\mathrm{v}. \tag{35}$$

Докажем сначала существование непрерывного решения системы (34), (35) с помощью метода последовательных приближений при выполнении условий (28) и (29).

Определим последовательные приближения:

$$\gamma_1^{n+1}(s,t,x) = \acute{\varphi}_1(z_1) - \int_0^s [a_1(\mathrm{v})(\gamma_1^n)^2 + (b_1(\mathrm{v})\gamma_1^n - b_2(\mathrm{v}))\gamma_2^n(\mathrm{v},\mathrm{v},z_1) - a_2(\mathrm{v})\gamma_1^n]\, d\mathrm{v}, \tag{36}$$

$$\gamma_2^{n+1}(s,t,x) = \acute{\varphi}_2(z_2) - \int_0^s [g_1(\mathrm{v})(\gamma_2^n)^2 + c_1(\mathrm{v})\gamma_1^n(\mathrm{v},\mathrm{v},z_2)\gamma_2^n - g_2\gamma_2^n]\, d\mathrm{v}, \tag{37}$$

при этом $\gamma_1^0 = \acute{\varphi}_1(z_1)$, $\gamma_2 = \acute{\varphi}_2(z_2)$.

При выполнении условий (28) и (29) справедливы оценки:

$$|\gamma_i^{n+1}| < 2C_\varphi, i = 1,2.$$

По свойствам интегралов, модулей, супремума функций установлено, что

$$\|\gamma_1^{n+1} - \gamma_1^n\| + \|\gamma_2^{n+1} - \gamma_2^n\| \leqslant 0{,}52 \left(\|\gamma_1^n - \gamma_1^{n-1}\| + \|\gamma_2^n - \gamma_2^{n-1}\|\right).$$

Следовательно, последовательные приближения $\{\gamma_i^n\}$, $i = 1,2$ сходятся к непрерывному решению системы (34)–(35).

Для решения будут справедливы оценки: $|\gamma_i| < 2C_\varphi$, $i = 1,2$.

При выполнении условий (28) и (29) справедливы оценки:

$$|z_{ix}| \leqslant 1, |\gamma_{ix}^{n+1}| \leqslant 5C_\varphi, i = 1,2.$$

Рассмотрим систему уравнений:

$$w_{21} = \varphi_1''(z_1)z_{1x} + \int_0^s [(a_2 - 2a_1(\mathrm{v})\gamma_1 - b_1(\mathrm{v})\gamma_2(\mathrm{v},\mathrm{v},z_1))w_{21} + \\ + (b_2(\mathrm{v}) - b_1(\mathrm{v})\gamma_1)w_{22}(\mathrm{v},\mathrm{v},z_1)z_{1x}]\, d\mathrm{v}, \quad (38)$$

$$w_{22} = \varphi_2''(z_2)z_{2x} + \int_0^s [(g_2 - 2g_1(\mathrm{v})\gamma_2 - c_1(\mathrm{v})\gamma_1(\mathrm{v},\mathrm{v},z_2))w_{22} - c_1(\mathrm{v})w_{21}(\mathrm{v},\mathrm{v},z_2)\gamma_2 z_{2x}]\, d\mathrm{v}. \quad (39)$$

Докажем существование непрерывного решения системы (38)–(39) с помощью метода последовательных приближений:

$$w_{21}^{n+1} = \varphi_1''(z_1)z_{1x} + \int_0^s [(a_2 - 2a_1(\mathrm{v})\gamma_1 - b_1(\mathrm{v})\gamma_2(\mathrm{v},\mathrm{v},z_1))w_{21}^n + \\ + (b_2(\mathrm{v}) - b_1(\mathrm{v})\gamma_1)w_{22}^n(\mathrm{v},\mathrm{v},z_1)z_{1x}]\, d\mathrm{v}, \quad (40)$$

$$w_{22}^{n+1} = \varphi_2''(z_2)z_{2x} + \int_0^s [(g_2 - 2g_1(\mathrm{v})\gamma_2 - c_1(\mathrm{v})\gamma_1(\mathrm{v},\mathrm{v},z_1))w_{22}^n - c_1(\mathrm{v})w_{21}^n(\mathrm{v},\mathrm{v},z_1)\gamma_2 z_{2x}]\, d\mathrm{v}. \quad (41)$$

При выполнении условий (28) и (29) справедливы оценки:

$$\|\omega_{2i}^{n+1}\| \leqslant 5C_\varphi,\ i = 1{,}2.$$

При выполнении условий (28) и (29), по свойствам интегралов, модулей, супремума функции установлено неравенство

$$\|\omega_{22}^{n+1} - \omega_{22}^n\| + \|\omega_{21}^{n+1}\| \leqslant 0{,}52(\|\omega_{22}^n - \omega_{22}^{n-1}\| + \|\omega_{21}^n - \omega_{21}^{n-1}\|).$$

Это означает, что последовательные приближения сходятся, т. е. система (38)–(39) имеет непрерывное решение.

Докажем сходимость последовательных приближений $\{\gamma_{ix}^n\}$, $i = 1{,}2$.

При выполнении условий (28) и (29), по свойствам интегралов, модулей, супремума функции, получаем:

$$\|\gamma_{1x}^{n+1} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{n+1} - \omega_{22}\| \leqslant 0{,}52[\|\gamma_{1x}^n - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^n - \omega_{22}\|] + |\sigma_{31n}| + |\sigma_{41n}|,$$

где $\sigma_{31n}, \sigma_{41n}$ — известные последовательности.

Пользуясь равномерной и равностепенной непрерывностью, а также ограниченностью всех входящих в $\sigma_{31n}, \sigma_{41n}$ функций для любого сколько угодно малого числа ε, выберем $n = N$ так, чтобы $|\sigma_{31n}| + |\sigma_{41n}| < \varepsilon$.

Обозначим $S_{1N} := \|\gamma_{1x}^N - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^N - \omega_{22}\|$. С помощью метода математической индукции установлено, что

$$\|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\| < (0{,}52)^p S_{1N} + 3\varepsilon.$$

Следовательно, $\|\gamma_{1x}^{N+p} - \omega_{21}\| + \|\gamma_{2x}^{N+p} - \omega_{22}\| \longrightarrow 0$ при $N \longrightarrow \infty, p \longrightarrow \infty$, значит, последовательности $\{\gamma_{ix}^n\}$ сходятся, т. е. $\lim_{n\longrightarrow\infty} \gamma_{ix}^n = \omega_{2i}$. Следовательно, существует непрерывная производная по x у решения системы (34), (35), $\gamma_{ix} = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x} = \omega_{2i}$,

$$\|\gamma_{ix}\| \leqslant 5C_\varphi,\ i = 1{,}2.$$

Так же, как в статье [2], доказано существование непрерывной производной по t у решения системы (34)–(35).

Так как существует непрерывно дифференцируемое решение задачи (34)–(35), то $\gamma_1(t,t,x) = p(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \gamma_2(t,t,x) = q(t,x) = \frac{\partial v}{\partial x}$.

Из (3)–(8) следует, что

$$\begin{aligned}
&w_1(s,t,x) = \varphi_1(z_1)\exp(a_2 s) + \int\limits_0^s b_2(\mathrm{v}) w_3 \exp(a_2(s-\mathrm{v}))\,d\mathrm{v},\\
&w_2(s,t,x) = \varphi_2(z_2)\exp(g_2 s),\\
&w_3(s,t,x) = w_2(s,s,z_1), \quad w_4(s,t,x) = w_1(s,s,z_2).
\end{aligned}$$

Получаем, что

$$\begin{aligned}
&\|w_2\| \leqslant C_\varphi \exp(|g_2|T),\\
&\|w_1\| \leqslant C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl\exp(|g_2|T)),
\end{aligned}$$

следовательно, справедливы оценки:

$$\|v\| \leqslant C_\varphi \exp(|g_2|T), \tag{42}$$

$$\|u\| \leqslant C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl\exp(|g_2|T)). \tag{43}$$

Из (31)–(33) следует:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(s,t,x) = \acute{\varphi}_1(z_1)\exp\left(-\int\limits_0^s (a_1(\mathrm{v})\gamma_1 + b_1(\mathrm{v})\gamma_2 - a_2)\,d\mathrm{v}\right) + \\
+ \int\limits_0^s b_2(\mathrm{v})\gamma_2(\mathrm{v},\mathrm{v},z_1)\exp\left(-\int\limits_0^s (a_1(\mathrm{v})\gamma_1 + b_1(\mathrm{v})\gamma_2 - a_2)\,d\mathrm{v}\right) d\tau,
\end{aligned}$$

$$\gamma_2(s,t,x) = \acute{\varphi}_2(z_2)\exp\left(-\int\limits_0^s (g_1(\mathrm{v})\gamma_2 + c_1(\mathrm{v})\gamma_1(\mathrm{v},\mathrm{v},z_2) - g_2)\,d\mathrm{v}\right).$$

При выполнении условий (28) получаем: $\gamma_1 \leqslant 0$, $\gamma_2 \geqslant 0$, значит

$$\|\gamma_2\| \leqslant C_\varphi \exp(|g_2|T), \quad \|\gamma_1\| \leqslant C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl\exp(|g_2|T)),$$

следовательно, справедливы оценки

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\| \leqslant C_\varphi \exp(|g_2|T), \tag{44}$$

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\| \leqslant C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl\exp(|g_2|T)). \tag{45}$$

Дифференцируем систему уравнений (31)–(33) по переменной x, получаем систему:

$$\begin{cases}
\frac{d\gamma_1 x}{ds} = A_{11}\gamma_{1x}(s,t,x) + A_{12}\gamma_{2x}(s,s,z_1),\\
\\
\frac{d\gamma_2 x}{ds} = A_{21}\gamma_{1x}(s,s,z_2) + A_{22}\gamma_{2x}(s,t,x),
\end{cases}$$

с условиями $\gamma_{ix}(s,t,x) = \varphi_i''(z_i)z_{ix}$, где A_{ik} — известные ограниченные функции, $i = 1,2$, $k = \overline{1,3}$.

Интегрируя полученную систему по аргументу s, и учитывая условия $\gamma_{ix}(s,t,x) = \varphi_i''(z_i)z_{ix}$, $i = 1,2$, получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$\gamma_{1x}(s,t,x) = \varphi_1''(z_1)z_{1x}\exp\left(\int_0^s A_{11}d\mathrm{v}\right) + \int_0^s A_{12}\gamma_{2x}(\tau,\tau,z_1)\exp\left(\int_\tau^s A_{11}d\mathrm{v}\right)d\tau,$$

$$\gamma_{2x}(s,t,x) = \varphi_2''(z_2)z_{2x}\exp\left(\int_0^s A_{22}d\mathrm{v}\right) + \int_0^s A_{21}\gamma_{1x}(\tau,\tau,z_2)\exp\left(\int_\tau^s A_{22}d\mathrm{v}\right)d\tau,$$

где

$$\left|\varphi_i''(z_i)z_{ix}e^{\int_0^s A_{11}d\mathrm{v}}\right| \leqslant E_{i1}, \left|A_{12}e^{\int_\tau^s A_{11}d\mathrm{v}}\right| \leqslant C_{12}, \left|A_{21}e^{\int_\tau^s A_{22}d\mathrm{v}}\right| \leqslant C_{21},$$

E_{i1}, C_{12}, C_{21} — постоянные, которые определяются через исходные данные $i = 1,2$.

По свойствам модулей, интегралов и супремума функции имеем:

$$\sup_R |\gamma_{1x}(t,t,x)| \leqslant E_{11} + C_{12}E_{21}t + C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau \sup_R |\gamma_{1x}(\mathrm{v},\mathrm{v},x)|\, d\mathrm{v}\, d\tau.$$

Докажем для этого неравенства аналог леммы Гронуолла:

$$z(t) \leqslant E_{11} + C_{12}E_{21}t + C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau z(\mathrm{v})\, d\mathrm{v}\, d\tau,$$

Обозначим $V(t) = E_{11} + C_{12}E_{21}t + C_{12}C_{21}\int_0^t\int_0^\tau z(\mathrm{v})\, d\mathrm{v}\, d\tau$, тогда $z(t) \leqslant V(t)$. Введем замену: $V(t) = h(t)e^{-\sqrt{C_{12}C_{21}}t}$. Так как $V''(t) \leqslant C_{12}C_{21}V(t)$, то $h''(t) \leqslant 2\sqrt{C_{12}C_{21}}h'(t)$. Дважды интегрируем обе части последнего неравенства, получаем

$$h(t) \leqslant h(0) + \frac{h'(0)}{2\sqrt{C_{12}C_{21}}}(e^{2t\cdot\sqrt{C_{12}C_{21}}} - 1).$$

Так как $V(t) = h(t)e^{-\sqrt{C_{12}C_{21}}t}$, $h(0) = E_{11}$, $h'(0) = C_{12}E_{21} + E_{11}\sqrt{C_{12}C_{21}}$, то

$$V(t) \leqslant E_{11}\cdot \mathrm{ch}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}) + E_{21}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}\,\mathrm{sh}(t\sqrt{C_{12}C_{21}}).$$

Так как $\sup_R |\gamma_{1x}(t,t,x)| = \sup_R |p_x(t,x)| = \sup_R \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| \leqslant V(t)$, то получим требуемую оценку

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right| < E_{11}\cdot \mathrm{ch}\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + E_{21}\sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}}\,\mathrm{sh}\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right), \tag{46}$$

справедливую при всех t и x. Аналогично, получаем оценку

$$\left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right| < E_{21}\cdot \mathrm{ch}\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right) + E_{11}\sqrt{\frac{C_{21}}{C_{12}}}\,\mathrm{sh}\left(t\sqrt{C_{12}C_{21}}\right), \tag{47}$$

справедливую при всех t и x.

Полученные глобальные оценки (42)–(47) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0,T]$. Возьмем в качестве начальных значений $u(T_0,x)$, $v(T_0,x)$ и продлим решение на некоторый промежуток $[T_0,T_1]$. Возьмем в качестве начальных значений $u(T_1,x)$, $v(T_1,x)$ и продлим решение на промежуток $[T_1,T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами $\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|$ и $\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|$, которые ограничены на любом промежутке разрешимости глобальными оценками (44), (45), справедливыми на любом промежутке разрешимости. В частности, $u(T_k, x)$, $v(T_k, x) \in \overline{C}^2(R^1)$. Для $u(T_k, x)$, $v(T_k, x)$, $\partial_x u(T_k, x)$, $\partial_x v(T_k, x)$ справедливы оценки (42)–(45). Для вторых производных справедливы оценки (46), (47), где в качестве t можно взять T. В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0, T]$.

Единственность решения задачи Коши (1), (2) доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рождественский, Б. Л. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. — М. : Наука, 1968. — 592 с.

2. Алексеенко, С. Н. Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / С. Н. Алексеенко, Т. А. Шемякина, М. В. Донцова // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки. — 2013. — № 3 (177). — С. 190–201.

3. Иманалиев, М. И. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко // Доклады РАН. — 2001. — Т. 379, № 1. — С. 16–21.

4. Алексеенко, С. Н. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в гиперболическом случае / С. Н. Алексеенко, Т. А. Шемякина, К. Г. Круц // Исследования по интегро–дифференциальным уравнениям. — 2006. — Вып. 35. — С. 142–147.

5. Шемякина, Т. А. Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае / Т. А. Шемякина // Журнал Средне–Волжского матем. об–ва. — 2011. — Т. 13, № 2. — С. 127–131.

6. Шемякина, Т. А. Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа / Т. А. Шемякина // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки. — 2012. — № 2 (146). — С. 130–131.

7. Донцова, М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида / М. В. Донцова // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т. 6, № 4. — С. 71–82.

8. Алексеенко, С. Н. Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси / С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова // Журнал Средневолжского математического общества. — 2016. — Т. 18, № 2. — С. 115–124.

9. Донцова, М. В. Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями / М. В. Донцова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 116–130.

10. Alekseenko, S. N. A basic scheme to investigate two first order quasi − linear partial differential equations / S. N. Alekseenko // Analytical and Approximate Methods. — International Conference at the Kyrgyz–Russian–Slavic University. Bishkek–Aachen: Shaker Verlag, 2003. — P. 1–14.

11. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

12. Зверева, М. Б. Моделирование колебаний разрывной струны для случая третьей краевой задачи / М. Б. Зверева, Ж. О. Залукаева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 3. — С. 134–142.

13. Об априорных оценках решений граничных задач для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 77–92.

14. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

REFERENCES

1. Rozhdestvensky B.L., Yanenko N.N. Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics. [Rozhdestvenskiyj B.L., Yanenko N.N. Sistemy kvazilineyjnyx uravneniyj i ix prilozheniya k gazovoyj dinamike]. Moscow, 1968, 592 p.

2. Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Dontsova M.V. Conditions for nonlocal solvability of systems of first-order partial differential equations. [Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Doncova M.V. Usloviya nelokal'noyj razreshimosti sistem differencial'nyx uravneniyj v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. *Nauchno-texnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki — Scientific and technical statements of SPbSPU. Physics and mathematics*, 2013, no. 3 (177), pp. 190–201.

3. Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. On the question of the existence of a smooth bounded solution for a system of two nonlinear first-order partial differential equations. [Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. K voprosu sushhestvovaniya gladkogo ogranichennogo resheniya dlya sistemy dvux nelineyjnyx differencial'nyx uravneniyj v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2001, vol. 379, no. 1, pp. 16–21.

4. Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Kruts K.G. Local existence of a bounded solution of the Frankl system in the hyperbolic case. [Alekseenko S.N., Shemyakina T.A., Kruc K.G. Lokal'noe sushhestvovanie ogranichennogo resheniya sistemy Franklya v giperbolicheskom sluchae]. *Issledovaniya po integro-differencial'nym uravneniyam — Studies on integro-differential equations*, 2006, iss. 35, pp. 142–147.

5. Shemyakina T.A. Conditions for the existence and differentiability of the solution of the Frankl system in the hyperbolic case. [Shemyakina T.A. Usloviya sushhestvovaniya i differenciruemosti resheniya sistemy Franklya v giperbolicheskom sluchae]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshhestva — Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, 2011, vol. 13, no. 2, pp. 127–131.

6. Shemyakina T.A. An existence theorem for a bounded solution of the Cauchy problem for a Frankl system of hyperbolic type. [Shemyakina T.A. Teorema sushhestvovaniya ogranichennogo resheniya zadachi Koshi dlya sistemy Franklya giperbolicheskogo tipa]. *Nauchno-texnicheskie vedomosti SPbGPU. Fiziko–matematicheskie nauki — Scientific and technical statements of SPbSPU. Physics and mathematics*, 2012, no. 2 (146), pp. 130–131.

7. Dontsova M.V. Conditions for the nonlocal solvability of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with right-hand sides of a special form. [Doncova M.V. Usloviya nelokal'noyj razreshimosti zadachi Koshi dlya sistemy differencial'nyx uravneniyj v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka s pravymi chastyami special'nogo vida]. *Ufimskiyj matematicheskiyj zhurnal — Ufa mathematical journal*, 2014, vol. 6, no. 4, pp. 71–82.

8. Alekseenko S.N., Dontsova M.V. Conditions for the solvability of the system of equations describing long waves in a rectangular water channel, the depth of which varies along the axis. [Alekseenko S.N., Doncova M.V. Usloviya razreshimosti sistemy uravneniyj, opisyvayushhix dlinnye volny v vodnom pryamougol'nom kanale, glubina kotorogo menyaetsya vdol' osi]. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshhestva — Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, 2016, vol. 18, no. 2, pp. 115–124.

9. Dontsova M.V. Conditions for nonlocal solvability of the Cauchy problem for a system of

first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides. [Doncova M.V. Usloviya nelokal'noyj razreshimosti zadachi Koshi dlya sistemy differencial'nyx uravneniyj v chastnyx proizvodnyx pervogo poryadka s nepreryvnymi i ogranichennymi pravymi chastyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 116–130.

10. Alekseenko S.N. A basic scheme to investigate two first order quasi – linear partial differential equations. Analytical and Approximate Methods. International Conference at the Kyrgyz–Russian–Slavic University. Bishkek–Aachen: Shaker Verlag, 2003, pp. 1–14.

11. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

12. Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modeling of discontinuous string oscillations for the case of the third boundary value problem. [Zvereva M.B., Zalukaeva Zh.O., Shabrov S.A. Modelirovanie kolebanij razryvnoj struny dlya sluchaya tret'ej kraevoj zadachi]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 3, pp. 134–142.

13. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A. On a priori estimates for solutions of boundary value problems for a class of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. Ob apriornyx ocenkax resheniyj granichnyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 77–92.

14. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

Донцова М. В., кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Институт информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru

Dontsova M. V., candidate of Physical and Mathematical Sciences, senior lecturer of the department of differential equations, mathematical and numerical analysis, Institute of Informational Technology, Mathematics and Mechanics, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: dontsowa.marina2011@yandex.ru