УДК 517.956

КРИТЕРИЙ ОДНОЗНАЧНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

С. А. Алдашев

Институт математики и математического моделирование МОН РК, г. Алматы, Республика Казахстан

Поступила в редакцию 05.03.2018 г.

Аннотация. В цилиндрической области евклидова пространства для одного класса многомерных эллиптико-параболических уравнений рассматривается спектральная задача Дирихле с однородными краевыми условиями. Решение ищется в виде разложения по многомерным сферическим функциям. Доказаны теоремы существования и единственности решения. Получены условия однозначной разрешимости поставленной задачи, которые существенно зависят от высоты эллиптической части цилиндрической области.

Ключевые слова: эллиптико-параболические уравнения, спектральная задача Дирихле, многомерная цилиндрическая область, разрешимость, критерия.

A CRITERION FOR THE UNIQUE SOLVABILITY OF THE SPECTRAL DIRICHLET PROBLEM IN A CYLINDRICAL DOMAIN FOR A CLASS OF MULTIDIMENSIONAL ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

S. A. Aldashev

Abstract. In the cylindrical domain of Euclidean space, for one class of multidimensional elliptic-parabolic equations, the spectral Dirichlet problem with homogeneous boundary conditions is considered. The solution is sought in the form of an expansion in multidimensional spherical functions. The existence and uniqueness theorems of the solution are proved. Conditions are obtained for the unique solvability of the problem posed, which essentially depend on the height of the elliptic part of the cylindrical domain.

Keywords: elliptic-parabolic equations, Dirichlet spectral problem, multidimensional cylindrical domain, solvability, criterion.

ВВЕДЕНИЕ

Корректность краевых задач на плоскости для эллиптических уравнений методом теории аналитических функций комплексного переменного хорошо изучена в [1].

При исследовании аналогичных вопросов, когда число независимых переменных больше двух, возникают трудности принципиального характера. Весьма привлекательный и удобный метод сингулярных интегральных уравнений теряют свою силу из-за отсутствия сколько-нибудь полной теории многомерных сингулярных интегральных уравнений ([2]).

Для общих эллиптико-параболических уравнений второго порядка постановку первой краевой задачи впервые осуществил Г. Фикера [3]. В обобщенных пространствах эта задача изучена в [4].

В данной работе для одного класса многомерных эллиптико-параболических уравнений получена критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $\Omega_{\alpha\beta}$ — цилиндрическая область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,...,x_m,t)$, ограниченная цилиндром $\Gamma = \{(x,t) : |x| = 1\}$, плоскостями $t = \alpha > 0$ и $t = \beta < 0$, где $|x|$ — длина вектора $x = (x_1,...,x_m)$.

Обозначим через Ω_α и Ω_β части области $\Omega_{\alpha\beta}$, а через Γ_α, Γ_β — части поверхности Γ, лежащие в полупространствах $t > 0$и $t < 0$; σ_α — верхнее, а σ_β — нижнее основание области $\Omega_{\alpha\beta}$.

Пусть далее S — общая часть границ областей Ω_α и Ω_β, представляющая множество $\{t = 0,\ 0 < |x| < 1\}$ в E_m.

В области $\Omega_{\alpha\beta}$ рассмотрим многомерные эллиптико–параболические уравнения со спектральным действительным параметром γ

$$\gamma u = \begin{cases} \Delta_x u + u_{tt} + \sum\limits_{i=1}^{m} a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u, t > 0, \\ \Delta_x u - u_t + \sum\limits_{i=1}^{m} d_i(x,t)u_{x_i} + e(x,t)u,t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1,...,x_m$, $m \geqslant 2$.

В качестве многомерной спектральной задачи Дирихле рассмотрим следующую задачу.

Задача D. Найти решение уравнения (1) в области $\Omega_{\alpha\beta}$ при $t \neq 0$ из класса $C(\overline{\Omega}_{\alpha\beta}) \cap C^2(\Omega_\alpha \cup \Omega_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{\sigma_\alpha} = 0, \quad u\Big|_{\Gamma_\alpha} = 0, \tag{2}$$

$$u\Big|_{\Gamma_\beta} = 0,\ u\Big|_{\sigma_\beta} = 0. \tag{3}$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t, r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta_1 < 2\pi,\ 0 \leqslant \theta_i \leqslant \pi,\ i = 2,3,...,m-1,\ \theta = (\theta_1,...,\theta_{m-1})$.

Пусть $\left\{Y_{n,m}^k(\theta)\right\}$ — система линейно независимых сферических функций порядка n, $1 \leqslant k \leqslant k_n$, $(m-2)!n!k_n = (n+m-3)!(2n+m-2)$, $W_2^l(S)$, $l = 0,1,...$ — пространства Соболева.

Через $\widetilde{d}_{in}^k(r,t)$, $d_{in}^k(r,t)$, $\widetilde{e}_n^k(r,t)$, $\widetilde{d}_n^k(r,t)$, ρ_n^k, обозначим коэффициенты разложения рядов по сферическим функциям $Y_{n,m}^k(\theta)$, соответственно функций $d_i(r,\theta,t)\rho, d_i\frac{x_i}{r}\rho$, $e(r,\theta,t)\rho, d(r,\theta,t)\rho$, $\rho(\theta)$, $i = 1,...,m$, причем $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$, H — единичная сфера в E_m.

Пусть $a_i(x,t), b(x,t), c(x,t) \in W_2^l(\Omega_\alpha) \subset C(\bar{\Omega}_\alpha), d_i(x,t), e(x,t) \in W_2^l(\Omega_\beta)$, $i = 1,...,m$, $l \geqslant m+1, c(x,t) - \gamma \leqslant 0, \forall (x,t) \in \Omega_\alpha$, $e(x,t) - \gamma \leqslant 0$, $\forall (x,t) \in \Omega_\beta$.

Тогда справедлива

Теорема 1. 1) Если $\gamma \geqslant -\mu_{s,n}^2$, то задача D имеет только нулевое решение; 2) При $\gamma < -\mu_{s,n}^2$, задача D имеет только тривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\sin\alpha\sqrt{|\gamma + \mu_{s,n}^2|} \neq 0,\ s = 1,2,...,$$

где $\mu_{s,n}$ — нули функций Бесселя первого рода $J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(z), n=0,1,....$

2. РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ D

В сферических координатах уравнение (1) в области Ω_β имеет вид

$$L_1 u \equiv u_{rr} + \frac{m-1}{r} u_r - \frac{1}{r^2}\delta u - u_t + \sum_{i=1}^{m} d_i(r,\theta,t) u_{x_i} + e(r,\theta,t)u = \gamma u, \tag{4}$$

$$\delta \equiv -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{g_j \sin^{m-j-1}\theta_j} \frac{\partial}{\partial\theta_j}\left(\sin^{m-j-1}\frac{\partial}{\partial\theta_j}\right), g_1 = 1, g_j = (\sin\theta_1 ... \sin\theta_{j-1})^2, j > 1.$$

Известно ([5]), что спектр оператора δ состоит из собственных чисел $\lambda_n = n(n+m-\\-2)$, $n = 0,1,...$, каждому из которых соответствует k_n ортонормированных собственных функций $Y_{n,m}^k(\theta)$.

Искомое решение задачи (1), (3) в области Ω_β будем искать в виде ряда

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} \bar{u}_n^k(r,t) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{5}$$

где $\bar{u}_n^k(r,t)$ — функции, подлежащие определению.

Подставив (5) в (4), умножив полученное выражение на $\rho(\theta) \neq 0$ и проинтегрировав по единичной сфере H для $\overline{u}_n^k$ получим ([6])

$$\begin{gathered}\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \left(\frac{m-1}{r}\rho_0^1 + \sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1\right)\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1\bar{u}_0^1 - \gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\{\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{nt}^k + \\ + \left(\frac{m-1}{r}\rho_n^k + \sum_{i=1}^{m} d_{in}^k\right)\bar{u}_{nr}^k + \left[\tilde{e}_n^k - \lambda_n\frac{\rho_n^k}{r^2} + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{d}_{in-1}^k - nd_n^k)\right]\bar{u}_n^k - \gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k\right\} = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Теперь рассмотрим бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\rho_0^1\bar{u}_{0rr}^1 - \rho_0^1\bar{u}_{0t}^1 + \frac{m-1}{r}\rho_0^1\bar{u}_{0r}^1 = \gamma\rho_0^1\bar{u}_0^1, \tag{7}$$

$$\rho_1^k\bar{u}_{1rr}^k - \rho_1^k\bar{u}_{1t}^k + \frac{m-1}{r}\rho_1^k\bar{u}_{1r}^k - \frac{\lambda_1}{r^2}\rho_1^k\bar{u}_1^k = \gamma\rho_0^1\bar{u}_1^k - \frac{1}{k_1}\left(\sum_{i=1}^{m} d_{i0}^1\bar{u}_{0r}^1 + \tilde{e}_0^1\bar{u}_0^1\right), \ n=1, \ k=\overline{1,k_1}, \tag{8}$$

$$\begin{gathered}\rho_n^k\bar{u}_{nrr}^k - \rho_n^k\bar{u}_{nt}^k + \frac{m-1}{r}\rho_n^k\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\rho_n^k\bar{u}_n^k = \gamma\rho_n^k\bar{u}_n^k - \frac{1}{k_n}\sum_{k=1}^{k_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{m} d_{in-1}^k\bar{u}_{n-1r}^k + \right. \\ \left. + \left[\tilde{e}_{n-1}^k + \sum_{i=1}^{m}(\tilde{d}_{in-2}^k - (n-1)d_{n-1}^k)\right]\bar{u}_n^k\right\}, \ k=\overline{1,k_n}, \ n=2,3\ldots.\end{gathered} \tag{9}$$

Суммируя уравнение (8) от 1 до k_1, а уравнение (9) — от 1 до k_n, а затем сложив полученные выражения вместо с (7), приходим у уравнению (6).

Отсюда следует, что если $\left\{\bar{u}_n^k\right\}$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,...$ — решение системы (7)–(9), то оно является и решением уравнения (6).

Нетрудно заметить, что каждое уравнение системы (7)–(9) можно представить в виде

$$\bar{u}_{nrr}^k - \bar{u}_{nt}^k + \frac{m-1}{r}\bar{u}_{nr}^k - \frac{\lambda_n}{r^2}\bar{u}_n^k - \gamma\bar{u}_n^k = \bar{f}_n^k(r,t), \tag{10}$$

где $\bar{f}_n^k(r,t)$ определяются из предыдущих уравнений этой системы, причем $\bar{f}_0^1(r,t) \equiv \equiv 0$.

Далее, из краевого условия (3), в силу (5), будем иметь

$$\bar{u}_n^k(r,\beta) = 0,\ \bar{u}_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{11}$$

В (10), (11) произведя замену $\bar{u}_n^k(r,t) = r^{\frac{(1-m)}{2}} u_n^k(r,t)$, получим

$$Lu_n^k \equiv \bar{u}_{nrr}^k - u_{nt}^k - \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} u_n^k - \gamma u_n^k = f_n^k(r,t), \tag{12}$$

$$u_n^k(r,\beta) = 0,\ u_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{13}$$

$$\bar{\lambda}_n = \frac{(m-1)(3-m) - 4\lambda_n}{4},\ f_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}} \bar{f}_n^k(r,t).$$

Решение задачи (12), (13) будем искать в виде

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} R_s(r) T_s(t), \tag{14}$$

при этом пусть

$$f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) R_s(r). \tag{15}$$

Подставляя (14) в (12), (13), с учетом (15), получим

$$R_{srr} + \frac{\bar{\lambda}_n}{r^2} R_s + (\mu - \gamma) R_s = 0,\ 0 < r < 1, \tag{16}$$

$$R_s(1) = 0,\ \left|R_s(0)\right| < \infty, \tag{17}$$

$$T_{st} + \mu T_s(t) = -a_{ns}^k(t),\ \beta < t < 0, \tag{18}$$

$$T_s(\beta) = 0. \tag{19}$$

Ограниченным решением задачи (16), (17) является ([7])

$$R_s(r) = \sqrt{r} J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{20}$$

где $\nu = n + \frac{(m-2)}{2}$, $\mu = \gamma + \mu_{s,n}^2$.

Решением задачи (18), (19) является функция ([7])

$$T_{s,n}(t) = (\exp(-\gamma - \mu_{s,n}^2) t) \int_t^\beta a_{ns}^k(\xi) (\exp(\gamma + \mu_{s,n}^2) \xi) d\xi. \tag{21}$$

Подставляя (20) в (15) будем иметь

$$r^{-\frac{1}{2}} f_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} a_{ns}^k(t) J_\nu(\mu_{s,n} r),\ 0 < r < 1. \tag{22}$$

Ряд (22) — разложение в ряд Фурье-Бесселя ([8]), если

$$a_{ns}^k(t) = \frac{1}{[J_{\nu+1}(\mu_{s,n})]^2} \int_0^1 \sqrt{\xi} f_n^k(\xi,t) J_\nu(\mu_{s,n} \xi) d\xi, \tag{23}$$

$\mu_{s,n}, s = 1,2,...$ — положительные нули функций Бесселя $J_\nu(z)$ расположенные в порядке возрастания их величины.

Из (20), (21) получим решение задачи (12), (13)

$$u_n^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r} T_{s,n}(r) J_\nu(\mu_{s,n} r), \tag{24}$$

где $a_{ns}^k(t)$ находятся из (23).

Следовательно, сначала решив задачу (7), (11) ($n = 0$), а затем (8), (11) ($n = 1$) и т. д. найдем последовательно все $u_n^k(r,t)$ из (24), $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$.

Итак, в области Ω_β, имеет место

$$\int_H \rho(\theta)(L_1 - \gamma) u dH = 0. \tag{25}$$

Пусть $f(r,\theta,t) = R(r)\rho(\theta)T(t)$, причем $R(r) \in V_0$, V_0 — плотна в $L_2((0,1))$, $\rho(\theta) \in C^\infty(H)$ — плотна в $L_2(H)$, а $T(t) \in V_1$, V_1 — плотна в $L_2((\beta,0))$. Тогда $f(r,\theta,t) \in \in V$, $V = V_0 \otimes H \otimes V_1$ — плотна в $L_2(\Omega_\beta)$ ([9]).

Отсюда и из (25), следует, что

$$\int_{\Omega_\beta} f(r,\theta,t)(L_1 - \gamma) u d\Omega_\beta = 0$$

и

$$L_1 u = \gamma u, \ \forall (r,\theta,t) \in \Omega_\beta.$$

Таким образом, решением задачи (1), (3) в области Ω_β является функция

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \sum_{s=1}^{\infty} r^{\frac{(2-m)}{2}} T_{s,n}(t) J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r) Y_{n,m}^k(\theta), \tag{26}$$

где $T_{s,n}(t)$ определяются из (21).

Из (23), (21), (24) следует, что $a_{ns}^k(t) = T_{s,n}(t) = 0$ и $u_n^k(r,t) = 0, s = 1,2,...,$ $k = \overline{1,k_n}, n = 0,1,\ldots$.

Далее, из (26) в свою очередь получим $u(r,\theta,t) = 0$ в Ω_β.

Отсюда при $t \to -0$ получим

$$u(r,\theta,0) = 0. \tag{27}$$

Таким образом, учитывая краевые условия (2), (27) получим в области Ω_α спектральную задачу Дирихле для уравнения

$$\Delta_x u + u_{tt} + \sum_{i=1}^{m} a_i(x,t) u_{x_i} + b(x,t) u_t + c(x,t) u, = \gamma u \tag{28}$$

с данными

$$u\Big|_{S \cup \Gamma_\alpha \cup \sigma_\alpha} = 0. \tag{29}$$

В [10] показано, справедливость теоремы 1 для задачи (28), (29).

Следовательно, разрешимость задачи D установлено.

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ D

Сначала рассмотрим задачу (1), (3) в области Ω_β и докажем ее единственность решения. Для этого сначала построим решение первой краевой задачи для уравнения

$$L_1^* \upsilon \equiv \Delta_x \upsilon - \upsilon_t - \sum_{i=1}^{m} d_i \upsilon_{x_i} + d\upsilon = \gamma\upsilon, \tag{4*}$$

с данными

$$\upsilon\big|_S = \tau(r,\theta) = \bar{\tau}_n^k(r) Y_{n,m}^k(\theta), \quad \upsilon\big|_{\Gamma_\beta} = 0, \tag{30}$$

где $d(x,t) = e - \sum\limits_{i=1}^{m} d_{ix_i}$, $\bar{\tau}_n^k(r) \in G$, G — множество функций $\tau(r)$ из класса $C([0,1]) \cap C^1((0,1))$. Множество G плотно всюду в $L_2((0,1))$ ([9]).

Решение задачи (4*), (30) будем искать в виде (5), где функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ будут определены ниже. Тогда, аналогично п.2, функции $\bar{\upsilon}_n^k(r,t)$ удовлетворяют систему уравнений (7)-(9), где $\widetilde{d}_{in}^k$, d_{in}^k заменены на $-\widetilde{d}_{in}^k$, $-d_{in}^k$, а $\widetilde{e}_n^k$ на $\widetilde{d}_n^k$, $i = 1,...,m$, $k = \overline{1,k_n}$, $n = 0,1,\ldots$.

Далее, из краевого условия (30), в силу (5), получим

$$\bar{\upsilon}_n^k(r,0) = \overline{\tau}_n^k(r),\ \bar{\upsilon}_n^k(1,t) = 0,\ k = \overline{1,k_n}, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{31}$$

Как ранее замечено, что каждое уравнение системы (7)-(9) представимо в виде (10). Задачу (10),(31) приведем к следующей задаче

$$L\upsilon_n^k \equiv \upsilon_{nrr}^k - \upsilon_{nt}^k + \frac{\overline{\lambda_n}}{r^2}\upsilon_n^k - \gamma\upsilon_n^k = f_n^k(r,t), \tag{32}$$

$$\upsilon_n^k(r,0) = \tau_n^k(r),\ \upsilon_n^k(1,t) = 0, \tag{33}$$

$$\upsilon_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\upsilon}_n^k(r,t),\ f_n^k(r,t) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{f}_n^k(r,t),\ \tau_n^k(r) = r^{\frac{(m-1)}{2}}\bar{\tau}_n^k(r).$$

Решение задачи (32), (33) будем искать в виде

$$\upsilon_n^k(r,t) = \upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t),$$

где $\upsilon_{1n}^k(r,t)$ — решение задачи для (12) с данными

$$\upsilon_{1n}^k(r,0) = 0,\ \upsilon_{1n}^k(1,t) = 0, \tag{34}$$

а $\upsilon_{2n}^k(r,t)$ — решение задачи для уравнения

$$L\upsilon_{2n}^k = 0 \tag{35}$$

с условием

$$\upsilon_{2n}^k(r,0) = \tau_n^k(r),\ \upsilon_{2n}^k(1,t) = 0. \tag{36}$$

Как показано в [6], решениями задач (12), (34) и (35), (36), соответственно являются функции

$$\upsilon_{1n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \sqrt{r}[\exp(-\gamma - \mu_{s,n}^2)t \int_t^0 a_{ns}^k(\xi)(\exp(\gamma + \mu_{s,n}^2))d\xi] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r),$$

$$\upsilon_{2n}^k(r,t) = \sum_{s=1}^{\infty} \tau_s \sqrt{r}[\exp(-\gamma - \mu_{s,n}^2)t] J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n} r),$$

где

$$\tau_s = 2[J_{\nu+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n})]^{-2}\int\limits_0^1 \sqrt{\xi}\tau_n^k(\xi)J_{n+\frac{(m-2)}{2}}(\mu_{s,n}\xi)d\xi.$$

Таким образом, решение задачи (4*), (30) в виде ряда

$$\upsilon(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n} r^{\frac{(1-m)}{2}}[\upsilon_{1n}^k(r,t) + \upsilon_{2n}^k(r,t)]Y_{n,m}^k(\theta),$$

построено, которая, как в [6] доказывается, что она принадлежит классу $C(\bar{\Omega}_\beta) \cap C^2(\Omega_\beta)$.

Из определения сопряженных операторов L_1, L_1^*([11])

$$\upsilon L_1 u - u L_1^*\upsilon = -\upsilon P(u) + uP(\upsilon) - u\upsilon Q,$$

где

$$P(u) = \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}\cos\left(N^{\perp}, x_i\right), Q = \cos\left(N^{\perp}, t\right) - \sum_{i=1}^{m} a_i\cos\left(N^{\perp}, x_i\right),$$

а $N^{\perp}$ — внутренняя нормаль к границе $\partial\Omega_\beta$.

Отсюда, по формуле Грина, получим

$$\int\limits_S \tau(r,\theta)u(r,\theta,0)ds = 0. \qquad (37)$$

Поскольку линейная оболочка системы функций $\{\bar{\tau}_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta)\}$ плотна $L_2(S)$ ([9]), то из (37) заключаем, что $u(r,\theta,0) = 0, \forall(r,\theta) \in S$. Стало быть, по принципу экстремума для уравнений (4) ([12]) $u \equiv 0$ в $\overline{\Omega}_\beta$.

В области Ω_α получаем задачу (28), (29) для которого имеет место теорема 1 ([10]).

Теорема 1 доказано полностью.

Отметим, что эта теорема для модельного эллиптико-параболического уравнения получена в [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе, А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка / А. В. Бицадзе. — М. : Наука, 1966. — 203 с.

2. Бицадзе, А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных / А. В. Бицадзе. — М. : Наука, 1981. — 448 с.

3. Фикера, Г. К единой теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка / Г. Фикера // Математика. — 1963. — Т. 7, № 6. — С. 99–121.

4. Врагов, В. Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В. Н. Врагов. — Новосибирск : НГУ, 1983. — 84 с.

5. Михлин, С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С. Г. Михлин. — М. : Физматгиз, 1962. — 254 с.

6. Алдашев, С. А. Корректность задачи Дирихле для одного класса многомерных гиперболо-параболических уравнений / С. А. Алдашев // Укр. матем. вестник. — 2013. — Т. 10, № 2. — С. 147–157.

7. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М. : Наука, 1965. — 703 с.

8. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 2 / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1974. — 295 с.

9. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 543 с.

10. Алдашев, С. А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле в цилиндрической области для одного класса многомерных эллиптических уравнений / С. А. Алдашев // Вестник КазНУ. Сер. матем. мех., инф. — 2017. — № 4(96). — С. 23–30.

11. Смирнов, В. И. Курс высшей математики. Т. 4, ч. 2 / В. И. Смирнов. — М. : Наука, 1981. — 550 с.

12. Фридман, А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 527 с.

13. Алдашев, С. А. Критерий однозначной разрешимости спектральной задачи Дирихле для многомерного эллиптико-параболического уравнения / С. А. Алдашев // Мат. VI-межд. научно-мет. конф. «Математическое моделирование и инф. технологии в образовании и науке». — Алматы, 2013. — Т. 1. — С. 17–20.

14. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

15. Шабров, С. А. Об одной спектральной задаче четвертого порядка с производными Радона–Никодима и со спектральным параметром / С. А. Шабров, Н. И. Бугакова, О. М. Ильина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 163–167.

16. Шабров, С. А. О скорости роста собственных значений одной разнопорядковой спектральной задачи с производными по мере / С. А. Шабров, Н. И. Головко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 3. — С. 186–195.

17. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

REFERENCES

1. Bitsadze A.V. Boundary value problems for second order elliptic equations. [Bicadze A.V. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj vtorogo poryadka]. Moscow, 1966, 203 p.

2. Bitsadze A.V. Some classes of partial differential equations. [Bicadze A.V. Nekotorye klassy uravneniyj v chastnyx proizvodnyx]. Moscow, 1981, 448 p.

3. Fichera G. On a unified theory of boundary value problems for elliptic-parabolic equations of second order. [Fikera G. K edinoyj teorii kraevyx zadach dlya elliptiko-parabolicheskix uravneniyj vtorogo poryadka]. Matematika — Mathematics, 1963, vol. 7, no. 6, pp. 99–121.

4. Vragov V.N. Boundary value problems for non-classical equations of mathematical physics. [Vragov V.N. Kraevye zadachi dlya neklassicheskix uravneniyj matematicheskoyj fiziki]. Novosibirsk, 84 p.

5. Mikhlin S.G. Multidimensional singular integrals and integral equations. [Mixlin S.G. Mnogomernye singulyarnye integraly i integral'nye uravneniya]. Moscow, 1962, 254 p.

6. Aldashev S.A. Correctness of the Dirichlet problem for a class of multidimensional hyperbolic-parabolic equations. [Aldashev S.A. Korrektnost' zadachi Dirixle dlya odnogo klassa mnogomernyx giperbolo-parabolicheskix uravneniyj]. Ukrainskiyj matematicheskiyj zhurnal — Ukrainian mathematical journal, 2013, vol. 10, no. 2, pp. 147–157.

7. Kamke E. Ordinary Differential Equations Handbook. [Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam]. Moscow, 1965, 703 p.

8. Bateman G., Erdeyi A. Higher transcendental functions, vol. 2. [Beyjtmen G., Erdeyji A. Vysshie transcendentnye funkcii, t. 2]. Moscow, 1974, 295 p.

9. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elements of function theory and functional analysis.

[Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funkciyj i funkcional'nogo analiza]. Moscow, 1976, 543 p.

10. Aldashev S.A. A criterion for the unique solvability of the spectral Dirichlet problem in a cylindrical domain for a class of multidimensional elliptic equations. [Aldashev S.A. Kriteriyj odnoznachnoyj razreshimosti spektral'noyj zadachi Dirixle v cilindricheskoyj oblasti dlya odnogo klassa mnogomernyx ellipticheskix uravneniyj]. Vestnik Kazaxskogo nacional'nogo universiteta. Seriya: Matematika, mexanika, informatika — Bulletin of the Kazakh National University. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics, 2017, no. 4(96), pp. 23–30.

11. Smirnov V.I. Higher Mathematics Course, vol. 4, part 2. [Smirnov V.I. Kurs vyssheyj matematiki, t. 4, ch. 2]. Moscow, 1981, 550 p.

12. Friedman A. Partial differential equations of parabolic type. [Fridman A. Uravneniya s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa]. Moscow, 1968, 527 p.

13. Aldashev S.A. A criterion for the unique solvability of the spectral Dirichlet problem for a multidimensional elliptic-parabolic equation. [Aldashev S.A. Kriteriyj odnoznachnoyj razreshimosti spektral'noyj zadachi Dirixle dlya mnogomernogo elliptiko-parabolicheskogo uravneniya]. Materials of the VI-International Scientific and Methodological Conference «Mathematical Modeling and Information Technologies in Education and Science», Almaty, 2013, vol. 1, pp. 17–20.

14. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2014, no. 2, pp. 66–73.

15. Shabrov S.A., Bugakova N.I., Ilina O.M. On one spectral problem of the fourth order with Radon–Nikodim derivatives and with spectral parameter at the second derivative. [Shabrov S.A., Bugakova N.I., Il'ina O.M. Ob odnoyj spektral'noyj zadache chetvertogo poryadka s proizvodnymi Radona–Nikodima i so spektral'nym parametrom]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 163–167.

16. Shabrov S.A., Golovko N.I. About the velocity of increase of eigenvalue of a different order spectral problem with derivative on the measure. [Shabrov S.A., Golovko N.I. O skorosti rosta sobstvennyx znacheniyj odnoyj raznoporyadkovoyj spektral'noyj zadachi s proizvodnymi po mere]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 3, pp. 186–195.

17. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2018, no. 4, pp. 162–172.

Алдашев Серик Аймурзаевич, доктор физико-математических наук, профессор, ГНС, Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан
E-mail: aldash51@mail.ru

Aldashev Serik Aimurzaevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, STS, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the KN MES RK, Almaty, Kazakhstan
E-mail: aldash51@mail.ru