

## ОЦЕНКА ДЛИТЕЛЬНОСТИ ЛЧМ РАДИОИМПУЛЬСА С НЕИЗВЕСТНОЙ НАЧАЛЬНОЙ ФАЗОЙ\*

Ю. Э. Корчагин<sup>1</sup>, Р. В. Антипенский<sup>2</sup>, Е. Е. Назаров<sup>2</sup>,  
С. А. Космодемьянский<sup>1</sup>, А. А. Макаров<sup>3</sup>

<sup>1</sup> – Воронежский государственный университет;

<sup>2</sup> – ВУНЦ ВВС «ВВА имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»;

<sup>3</sup> – Национальный исследовательский университет «МЭИ»

Поступила в редакцию 15.10.2020 г.

**Аннотация.** Синтезированы квазиправдоподобный и максимально правдоподобный алгоритмы оценки длительности радиосигнала с линейной частотной модуляцией и непрямоугольной огибающей. Предполагалось, что на приёмной стороне неизвестны начальная фаза и параметр ЛЧМ. Квазиправдоподобная оценка длительности была синтезирована для некоторых ожидаемых значений неизвестных параметров. Найдены её асимптотически точные характеристики, справедливые при больших отношениях сигнал/шум. Если ожидаемые начальная фаза и параметр ЛЧМ равны истинным значениям, то квазиправдоподобная оценка длительности совпадает с оценкой максимального правдоподобия радиосигнала с априори известными параметрами. Найдены выражения, характеризующий проигрыш квазиправдоподобной оценки вследствие априорного незнания начальной фазы и параметра ЛЧМ. Синтезирован максимально правдоподобный алгоритм оценки длительности, учитывающий априорное незнание неизвестных параметров.

**Ключевые слова:** оценка максимального правдоподобия, длительность, линейная частотная модуляция, начальная фаза, смещение, рассеяние.

## ESTIMATION OF THE LFM DURATION OF A RADIO PULSE WITH AN UNKNOWN INITIAL PHASE

Yu. E. Korchagin, R. V. Antipensky, E. E. Nazarov, S. A. Kosmodemyansky,  
A. A. Makarov

**Abstract.** We have synthesized quasi-likelihood and maximum likelihood algorithms for estimating RF signal duration with linear frequency modulation and non-rectangular envelope. We assumed that the initial phase and the chirp parameter are unknown on the receiving side. A quasi-likelihood estimate of the duration has been synthesized for some expected values of the unknown parameters. Its asymptotically exact characteristics are found, which are valid for large signal-to-noise ratios. If the expected initial phase and the chirp parameter are equal to the true values, then the quasi-likelihood estimate of the duration coincides with the estimate of the maximum likelihood of a radio signal with a priori known parameters. Expressions are found that characterize the loss of a quasi-plausible estimate due to a priori ignorance of the initial phase and the chirp parameter. We have synthesized the most plausible algorithm for estimating the duration, taking into account the a priori ignorance of the unknown parameters.

**Keywords:** maximum likelihood estimation, duration, linear frequency modulation, phase, estimation characteristics.

---

\* Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект FSWF-2020-0022)

© Корчагин Ю. Э., Антипенский Р. В., Назаров Е. Е., Космодемьянский С. А., Макаров А. А., 2020

Для многих практических приложений теории связи, локации, навигации, управления является актуальной задача оценки длительности сигнала, наблюдаемого на фоне шума [1–5]. Методика синтеза оптимальных алгоритмов оценки параметров сигнала известна давно [1, 6, 7], однако возможности анализа синтезированных алгоритмов существенно зависят от свойств решающей статистики, в частности от её дифференцируемости [1, 7]. В литературе исследованы алгоритмы оценки длительности прямоугольного видеоимпульса [1], импульса произвольной формы [2], сигнала произвольной формы с неизвестной амплитудой [3], радиосигнала с неизвестными начальной фазой [4], а также амплитудой [5]. Однако зачастую, особенно в практических приложениях радиолокации, используются сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) [6, 8, 9]. Известны алгоритмы оценки длительности ЛЧМ радиопульсов на основе корреляционной обработки, когда оценка длительности определяется как положение максимума функции взаимной корреляции наблюдаемой реализации и ожидаемого сигнала [8]. Такой подход хорошо работает при условии отсутствия у сигнала неинформативных параметров, которые для опорного сигнала часто выбираются произвольно из области своих возможных значений. Огибающая ожидаемого сигнала, как правило, считается прямоугольной, а анализ известных алгоритмов оценки параметров ЛЧМ импульса выполнен методами компьютерного моделирования. Поэтому целесообразно исследовать алгоритмы оценки длительности ЛЧМ радиосигнала с непрямоугольной огибающей. В силу специфики распространения будем также считать неизвестной начальную фазу ЛЧМ радиопульса. В данной работе выполнен синтез и анализ алгоритмов оценки длительности ЛЧМ радиосигнала с произвольной формой огибающей, неизвестной начальной фазой и параметром ЛЧМ.

Пусть на интервале времени  $[0, T]$  доступна наблюдению реализация

$$\xi(t) = s(t, \tau_0, \varphi_0, \zeta_0) + n(t) \quad (1)$$

аддитивной смеси полезного ЛЧМ сигнала

$$s(t, \tau_0, \varphi_0, \zeta_0) = \begin{cases} a_0 f(t) \cos(\omega t + \zeta_0 t^2/2 - \varphi_0), & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0, & t < 0, t > \tau_0, \end{cases} \quad (2)$$

и гауссовского белого шума  $n(t)$  с односторонней спектральной плотностью  $N_0$ . Здесь,  $\varphi_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\zeta_0$  — неизвестные начальная фаза, длительность и параметр ЛЧМ принимаемого сигнала соответственно,  $f(t)$  — функция, описывающая форму огибающей радиосигнала. Полагаем, что длительность сигнала  $\tau_0$  принимает значения из априорного интервала

$$\tau_0 \in [T_1, T_2]. \quad (3)$$

Располагая наблюдаемой реализацией  $\xi(t)$  необходимо сформировать оценку длительности  $\tau_0$  полезного сигнала (2).

Для синтеза алгоритма оценки длительности воспользуемся методом максимального правдоподобия (МП) [6, 7]. Если неизвестны длительность, начальная фаза и параметр ЛЧМ, логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) зависит от трёх параметров [1, 6]

$$L(\tau, \varphi, \zeta) = \frac{2}{N_0} \int_0^T [\xi(t) - s(t, \tau, \varphi, \zeta)] s(t, \tau, \varphi, \zeta) dt. \quad (4)$$

Следовательно, имеется априорная параметрическая неопределённость относительно начальной фазы и параметра ЛЧМ. Воспользуемся двумя способами преодоления неопределённости. Первый способ заключается в применении квазиправдоподобного (КП) алгоритма оценки. Вместо неизвестной начальной фазы  $\varphi$  в выражении (4) для логарифма ФОП используем

некоторое её ожидаемое значение  $\varphi^*$ . Также вместо неизвестного параметра ЛЧМ  $\zeta$  — его ожидаемое значение  $\zeta^*$ . Второй способ преодоления незнания неизвестных параметров заключается в применении МП алгоритма, согласно которому неизвестная фаза  $\varphi$  и параметр ЛЧМ  $\zeta$  должны быть заменены в выражении (4) на их МП оценки.

Рассмотрим сначала КП алгоритм оценки длительности. КП приёмник формирует логарифм ФОП (4) для некоторых ожидаемых величин  $\varphi^*$ ,  $\zeta^*$  и всех возможных значений длительности (3)

$$L^*(\tau) = L(\tau, \varphi^*, \zeta^*) = \frac{2}{N_0} \int_0^{\tau} [\xi(t) - s(t, \tau, \varphi^*, \zeta^*)/2] s(t, \tau, \varphi^*, \zeta^*) dt \quad (5)$$

и находит КП оценку длительности как положение абсолютного (наибольшего) максимума решающей статистики (5)

$$\tau^* = \arg \sup L^*(\tau). \quad (6)$$

Подставляя сигнал (2) в выражение (5), перепишем решающую статистику в виде

$$L^*(\tau) = \frac{2a_0}{N_0} \int_0^{\tau} [\xi(t) - a_0 f(t) \cos(\omega t + \zeta^* t^2/2 - \varphi^*)/2] f(t) \cos(\omega t + \zeta^* t^2/2 - \varphi^*) dt. \quad (7)$$

Выражения (6), (7) определяют структуру приёмного устройства. Его блок-схема изображена на рис. 1, где блок 1 — интегратор, работающий на интервале времени  $[0, t]$ ,  $t \in [T_1, T_2]$ , блок 2 — решающее устройство, осуществляющее поиск положения максимума входного сигнала на интервале времени  $[T_1, T_2]$ .

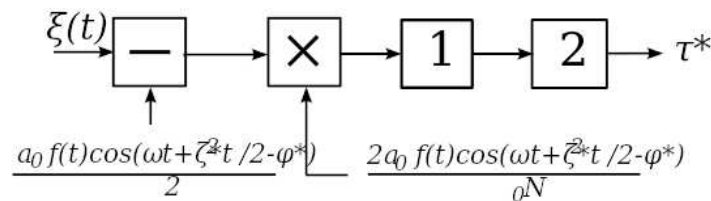


Рис. 1. Блок-схема КП измерителя длительности ЛЧМ радиосигнала.

Выполним анализ КП алгоритма оценки длительности. Согласно (7) случайный процесс  $L^*(\tau)$  является гауссовским. Поэтому для полного его статистического описания достаточно найти математическое ожидание и корреляционную функцию. Выполняя усреднение, находим математическое ожидание

$$S^*(\tau) = \langle L^*(\tau) \rangle = \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^{\min(\tau, \tau_0)} f^2(t) \cos[\Delta\zeta t^2/2T_2^2 - \Delta\varphi] dt - \frac{a_0^2}{2N_0} \int_0^{\tau} f^2(t) dt \quad (8)$$

и корреляционную функцию

$$K^*(\tau_1, \tau_2) = \langle [L^*(\tau_1) - \langle L^*(\tau_1) \rangle] [L^*(\tau_2) - \langle L^*(\tau_2) \rangle] \rangle = \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^{\min(\tau_1, \tau_2)} f^2(t) dt = q(\min(\tau_1, \tau_2)), \quad (9)$$

где обозначено

$$q(\tau) = \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^\tau f^2(t) dt \quad (10)$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ) на выходе приёмника МП для радиосигнала длительностью  $\tau$ ,  $\Delta\varphi = \varphi^* - \varphi_0$ ,  $\Delta\zeta = (\zeta^* - \zeta_0) T_2^2$  — расстройки фазы и параметра ЛЧМ ожидаемого сигнала относительно истинных значений. Здесь и далее отброшены интегралы от функций, осциллирующих с удвоенной частотой.

Положим аналогично [2], что функция  $f(t)$ , описывающая форму сигнала, обращается в нуль только на части интервала  $[0, \tau]$ , имеющей нулевую меру. Тогда  $q(\tau)$  (10) является монотонно возрастающей функцией и имеет место равенство  $q(\min(\tau_1, \tau_2)) = \min(q(\tau_1), q(\tau_2))$ . При больших ОСШ положение максимума решающей статистики (5) располагается в малой окрестности положения максимума её математического ожидания (8). Ограничимся рассмотрением таких соотношений между расстройками  $\Delta\varphi$  и  $\Delta\zeta$ , при которых положение максимума математического ожидания (8) совпадает с истинным значением неизвестной длительности  $\tau_0$ . Исследуем поведение функций (8) и (9) в малой окрестности точки  $\tau = \tau_0$ . Для этого разложим (8) и (9) в ряды Тейлора в окрестности  $\tau_0$  и ограничимся первыми членами

$$S^*(\tau) \approx S_0 + \frac{\rho^2}{T_2} \cos[\Delta\zeta t^2/2T_2^2 - \Delta\varphi] \min(\tau - \tau_0, 0) - \frac{\rho^2}{2T_2} (\tau - \tau_0),$$

$$K^*(\tau_1, \tau_2) \approx \min[z_0^2 + \rho^2(\tau_1 - \tau_0)/T_2, z_0^2 + \rho^2(\tau_2 - \tau_0)/T_2],$$

где  $S_0 = \frac{a_0^2}{N_0} \int_0^{\tau_0} f^2(t) [\cos(\Delta\zeta t^2/2T_2^2 - \Delta\varphi) - 1/2] dt$ ,  $\rho^2 = a_0^2 f^2(\tau_0) T_2/N_0$ ,  $z_0^2 = q(\tau_0)$  — ОСШ на выходе приёмника МП для радиосигнала длительностью  $\tau_0$ . Перейдём далее к новой переменной  $\lambda = \rho^2 \tau/T_2$ , причём  $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$ ,  $\Lambda_1 = \rho^2 T_1/T_2$ ,  $\Lambda_2 = \rho^2$ ,  $\lambda_0 = \rho^2 \tau_0/T_2$ :

$$S^*(\lambda) \approx S_0 + \cos[\Delta\zeta t^2/2T_2^2 - \Delta\varphi] \min(\lambda - \lambda_0, 0) - \frac{1}{2} (\lambda - \lambda_0), \quad (11)$$

$$K^*(\lambda_1, \lambda_2) \approx \min[z_0^2 + \lambda_1 - \lambda_0, z_0^2 + \lambda_2 - \lambda_0]. \quad (12)$$

Будем решающую статистику (5) как функцию переменной  $\lambda$  аппроксимировать случайным процессом  $\mu^*(\lambda)$  с математическим ожиданием (11) и корреляционной функцией (12).

Случайная величина

$$\lambda^* = \arg \sup \mu^*(\lambda) \quad (13)$$

связана с оценкой длительности (6) взаимно-однозначным преобразованием  $\tau^* = \lambda^* T_2/\rho^2$ . Следовательно, условную плотность вероятности  $W_\tau^*(\tau|\tau_0)$  оценки длительности (6) можно выразить через плотность вероятности  $W_\lambda^*(\lambda|\lambda_0)$  случайной величины (13)

$$W_\tau^*(\tau|\tau_0) = W_\lambda^*(\rho^2 \tau/T_2 | \rho^2 \tau_0/T_2) \frac{\rho^2}{T_2}. \quad (14)$$

Для плотности вероятности  $W_\lambda^*(\lambda|\lambda_0)$  согласно [1] запишем

$$W_\lambda^*(\lambda|\lambda_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{\partial F_{21}^*(u, v, \lambda)}{\partial u} \Big|_{v=u} \right] du, \quad (15)$$

где

$$F_{21}^*(u, v, \Lambda) = P \left\{ \sup_{\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda} \mu^*(\lambda) < u, \sup_{\Lambda < \lambda \leq \Lambda_2} \mu^*(\lambda) < v \right\} \quad (16)$$

— двумерная функция распределения абсолютного максимума случайного процесса  $\mu^*(\lambda)$ . Для нахождения функции (16) воспользуемся методикой [1]. Согласно (11) и (12), случайный процесс  $\mu^*(\lambda)$  является гауссовским марковским процессом с коэффициентами сноса и диффузии [10]

$$k_1 = \begin{cases} \cos [\Delta\zeta t^2/2T_2^2 - \Delta\varphi] - 1/2, & \lambda \leq \lambda_0, \\ -1/2, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad k_2 = 1.$$

Следовательно, функция (16) представляет собой вероятность недостижения марковским случайным процессом  $\mu^*(\lambda)$  границ  $-\infty$  и  $u$  на отрезке  $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda]$  и границ  $-\infty$  и  $v$  на отрезке  $\lambda \in (\Lambda, \Lambda_2]$ .

Введём вспомогательный случайный процесс

$$y^*(\lambda) = \begin{cases} u - \mu^*(\lambda), & \Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda, \\ v - \mu^*(\lambda), & \Lambda < \lambda \leq \Lambda_2, \end{cases}$$

который согласно (11), (12) является гауссовским марковским с коэффициентами сноса и диффузии

$$k_1 = \frac{1}{2} \begin{cases} 1 - 2 \cos [\Delta\zeta t^2/2T_2^2 - \Delta\varphi], & \lambda \leq \lambda_0, \\ 1, & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad k_2 = 1. \quad (17)$$

Тогда вероятность (16)

$$F_{21}^*(u, v, \Lambda) = P \left\{ \sup_{\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2} y^*(\lambda) > 0 \right\}$$

представляет собой вероятность недостижения границ  $y = 0$  и  $y = +\infty$  марковским случайным процессом  $y^*(\lambda)$  на отрезке  $\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2]$ . Согласно [10] для искомой вероятности можно записать

$$F_{21}^*(u, v, \Lambda) = \int_0^\infty W(y, \Lambda_2) dy. \quad (18)$$

Здесь  $W(y, \lambda)$  — решение уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова [1, 10]

$$\frac{\partial W(y, \lambda)}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial y} [k_1 W(y, \lambda)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [k_2 W(y, \lambda)] = 0 \quad (19)$$

при граничных условиях  $W(y = 0, \lambda) = W(y = \infty, \lambda) = 0$  и начальном условии

$$W(y, \lambda)|_{\lambda = \max(\Lambda_1, \lambda_0 - z_0^2)} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(y - u + m)^2}{2\sigma^2} \right],$$

где  $\sigma^2 = \max(0, z_0^2 - \lambda_0 + \Lambda_1)$ ,  $m = S_0 - \min(z_0^2, \lambda_0 - \Lambda_1)$ . Применяя метод отражения с переменной знака [10], находим решение уравнения (19) с коэффициентами (17) отдельно для случаев  $\lambda \in [\Lambda_1, \lambda_0]$  и  $\lambda \in (\lambda_0, \Lambda_2]$ . Подставляя найденные решения в выражение (18), а затем (18) в (15) получаем выражения для плотности вероятности случайной величины (13)

$$W_\lambda^*(\lambda | \lambda_0) = \frac{1}{2} \begin{cases} R^2 \Psi \left[ R^2 \frac{\lambda_0 - \lambda}{2}, R^2 \frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{2}, \frac{\Lambda_2 - \lambda_0}{2}, \frac{1}{R} \right], & \lambda \leq \lambda_0, \\ \Psi \left[ \frac{\lambda - \lambda_0}{2}, \frac{\Lambda_2 - \lambda_0}{2}, R^2 \frac{\lambda_0 - \Lambda_1}{2}, R \right], & \lambda > \lambda_0, \end{cases} \quad (20)$$

где обозначено  $R = 2 \cos [\Delta\zeta \tau_0^2/2T_2^2 - \Delta\varphi] - 1$ ,

$$\Psi(y, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}|y|^{3/2}} \left\{ \Phi \left( \sqrt{\frac{y_1 - y}{2}} \right) + \exp \left[ -\frac{y_1 - y}{4} \right] / \sqrt{\pi(y_1 - y)} \right\} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \xi \exp \left[ -\frac{(\xi + y)^2}{4y} \right] \left[ \Phi \left( \frac{y_2 + y_3 \xi}{\sqrt{2y_2}} \right) - \exp(-y_3 \xi) \Phi \left( \frac{y_2 - y_3 \xi}{\sqrt{2y_2}} \right) \right] d\xi, \quad (21)$$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp(-t^2/2) dt$  — интеграл вероятности.

На основе полученной плотности вероятности, с использованием формулы (14), запишем выражения для условных смещения и рассеяния КП оценки длительности (6)

$$B(\tau^* | \tau_0) = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - \tau_0) W_{\lambda}^* \left( \frac{\rho^2 \tau}{T_2} \mid \frac{\rho^2 \tau_0}{T_2} \right) \frac{\rho^2}{T_2} d\tau, \quad (22)$$

$$V(\tau^* | \tau_0) = \int_{T_1}^{T_2} (\tau - \tau_0)^2 W_{\lambda}^* \left( \frac{\rho^2 \tau}{T_2} \mid \frac{\rho^2 \tau_0}{T_2} \right) \frac{\rho^2}{T_2} d\tau. \quad (23)$$

Рассмотрим асимптотическое поведение плотности вероятности (20), смещения (22) и рассеяния (23) при увеличении ОСШ. Введём нормированную переменную (или обобщённую КП оценку длительности)

$$\kappa^* = R(\lambda^* - \lambda_0)/2 = R\rho^2(\tau^* - \tau_0)/2T_2, \quad (24)$$

$\kappa^* \in [K_1, K_2]$ ,  $K_1 = \rho^2(\tau_0 - T_1)R/2T_2$ ,  $K_2 = \rho^2(T_2 - \tau_0)R/2T_2$ . Плотность вероятности величины  $\kappa^*$  (24) имеет вид

$$W(\kappa) = \begin{cases} R\Psi[-R\kappa, RK_1, K_2/R, 1/R], & \kappa \leq 0, \\ \Psi[\kappa/R, K_2/R, RK_1, R]/R, & \kappa > 0. \end{cases} \quad (25)$$

Положим в (25), что  $K_1 \rightarrow \infty$ ,  $K_2 \rightarrow \infty$ . Это в частности имеет место при  $\lambda_0 \rightarrow \infty$  и фиксированных значениях  $T_1$ ,  $T_2$ . Учитывая (21), находим предельную плотность вероятности нормированной переменной (24)

$$W(\kappa) = \begin{cases} RW_0(-R\kappa, 1/R), & \kappa \leq 0, \\ W_0(\kappa/R, R)/R, & \kappa > 0, \end{cases} \quad (26)$$

$$W_0(x, y) = \Psi(x, \infty, \infty, y) =$$

$$= (2y + 1) \exp\{y(y + 1)|x|\} \left( 1 - \Phi\left\{(2y + 1)\sqrt{|x|/2}\right\} \right) + \Phi\left\{\sqrt{|x|/2}\right\} - 1.$$

Используя (24) и (27), для асимптотических значений смещения и рассеяния КП оценки длительности можно записать

$$B_{\varphi}(\tau^* | \tau_0) = \frac{2T_2}{\rho^2} \cdot \frac{R^3(R + 2) - (2R + 1)}{R^2(R + 1)^2}, \quad (27)$$

$$V_{\varphi}(\tau^* | \tau_0) = \frac{8T_2^2}{\rho^4} \cdot \frac{R^5(2R^2 + 6R + 5) + (5R^2 + 6R + 2)}{R^4(R + 1)^3}. \quad (28)$$

Если начальная фаза радиоимпульса  $\varphi_0$  и параметр ЛЧМ  $\zeta_0$  априори известны, то  $R = 1$ , и выражения (27) и (28) приобретают вид

$$B_0 = 0, \quad V_0 = 26T_2^2/\rho^4. \quad (29)$$

Они представляют собой асимптотические значения смещения и рассеяния оценки длительности радиоимпульса с априори известной начальной фазой.

Чтобы оценить, насколько сильно незнание начальной фазы и параметра ЛЧМ радиоимпульса влияет на точность оценки длительности, введём в рассмотрение нормированные смещение

$$b(\Delta\varphi) = B_\varphi(\tau^*|\tau_0) / \sqrt{V_\varphi(\tau^*|\tau_0)} \quad (30)$$

и рассеяние

$$v(\Delta\varphi) = V_\varphi(\tau^*|\tau_0) / V_0 \quad (31)$$

КП оценки длительности. На рис. 2 и 3 представлены зависимости величин (30) и (31) соответственно от нормированной расстройки параметра ЛЧМ  $\Delta\zeta$  при различных расстройках начальной фазы  $\Delta\varphi$ , а на рис. 4, 5 — зависимости от расстройки начальной фазы  $\Delta\varphi$  при различных расстройках параметра ЛЧМ  $\Delta\zeta$ . При построении предполагалось, что истинное значение длительности располагается посередине априорного интервала  $\tau_0 = (T_1 + T_2)/2 = T_2(k + 1)/2k$ , где  $k = T_2/T_1 = 10$ . Как видно из рисунков, отклонение ожидаемых значений начальной фазы и параметра ЛЧМ от их истинных значений приводят к существенному ухудшению точности оценки длительности. При  $\Delta\varphi \neq 0$  и  $\Delta\zeta \neq 0$  КП оценка длительности является смещённой, а её рассеяние быстро растёт по мере отклонения величины  $R = 2 \cos [\Delta\zeta\tau_0^2/2T_2^2 - \Delta\varphi] - 1$  от единицы. Более существенное влияние на точность КП оценки оказывает расстройка  $\Delta\zeta$  параметра ЛЧМ.

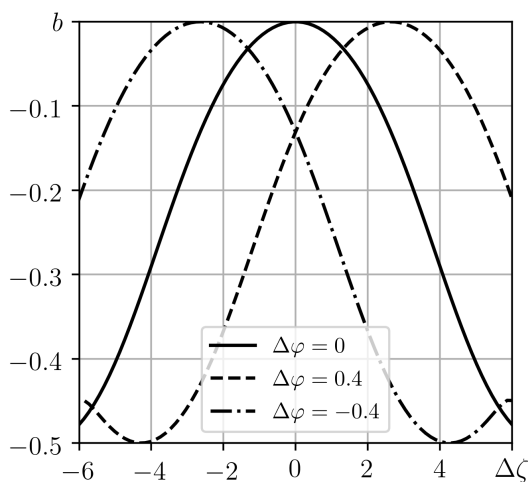


Рис. 2.

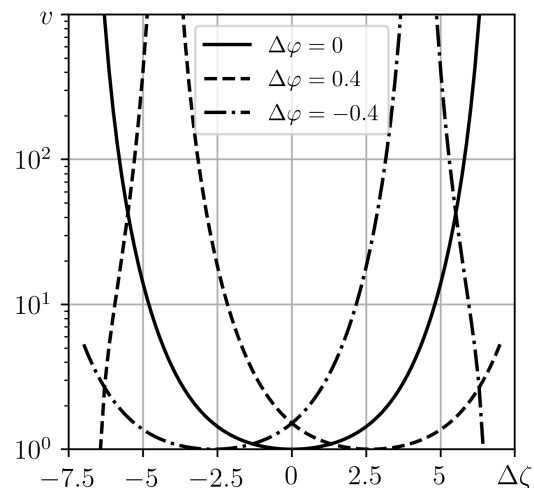


Рис. 3.

С целью улучшения точности оценки длительности можно применить МП алгоритм, согласно которому приёмник выполняет максимизацию логарифма ФОП (4) как по длительности, так и по фазе и параметру ЛЧМ

$$L(\tau) = \sup_{\varphi, \zeta} L(\tau, \varphi, \zeta), \quad \tau_m = \arg \sup_{\tau} L(\tau). \quad (32)$$

Максимизацию логарифма ФОП (4) по переменной  $\varphi$  можно выполнить аналитически. Для этого подставим сигнал (2) в выражение (4) и представим логарифм ФОП в виде

$$L(\tau, \varphi, \zeta) = X(\tau, \zeta) \cos \varphi + Y(\tau, \zeta) \sin \varphi - q(\tau)/2, \quad (33)$$

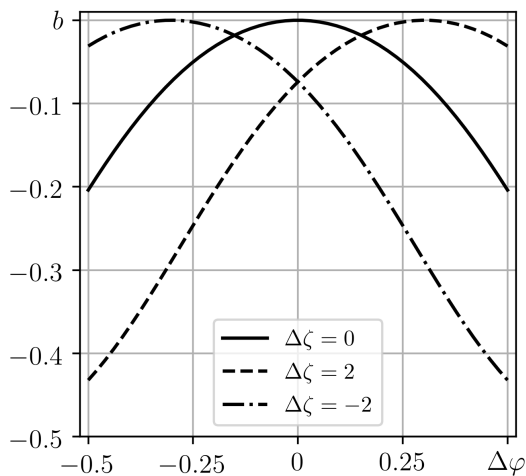


Рис. 4.

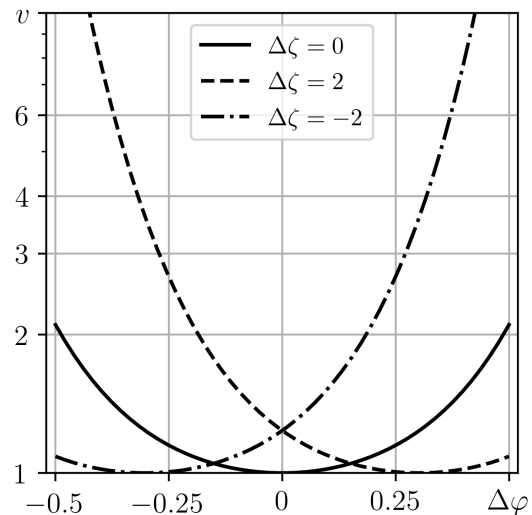


Рис. 5.

где обозначено

$$X(\tau, \zeta) = \frac{2a_0}{N_0} \int_0^\tau \xi(t) f(t) \cos(\omega t + \zeta t^2/2) dt, \quad Y(\tau, \zeta) = \frac{2a_0}{N_0} \int_0^\tau \xi(t) f(t) \sin(\omega t + \zeta t^2/2) dt, \quad (34)$$

а  $q(\tau)$  определено в (10). Найдём производную функции (33) по  $\varphi$ , приравняем её нулю

$$\left. \frac{dL(\tau, \varphi, \zeta)}{d\varphi} \right|_{\varphi=\varphi_m} = -X(\tau, \zeta) \sin \varphi_m + Y(\tau, \zeta) \cos \varphi_m = 0$$

и решим полученное уравнение правдоподобия относительно  $\varphi_m$

$$\varphi_m = \operatorname{arctg}(Y(\tau, \zeta)/X(\tau, \zeta)). \quad (35)$$

Подставляя решение (35) в (32), получим

$$L(\tau, \zeta) = \sup_{\varphi} L(\tau, \varphi, \zeta) = \sqrt{X^2(\tau, \zeta) + Y^2(\tau, \zeta)} - q(\tau)/2. \quad (36)$$

Выполнить аналитически максимизацию выражения (36) по неизвестному параметру ЛЧМ  $\zeta$  не представляется возможным. Поэтому для получения МП оценки длительности необходимо формировать двумерное случайное поле (36) и находить положение его наибольшего максимума. Как функцию переменной  $\tau$  при фиксированном  $\zeta$  функцию (36) можно сформировать в реальном времени на основе блок-схемы, изображенной на рис. 6, где обозначено: блок 1 — интеграторы на интервале времени  $[0, t]$ ,  $t \in [T_1, T_2]$ , блок 2 — решающее устройство (экстрематор), осуществляющее поиск положения максимума входного сигнала на интервале времени  $[T_1, T_2]$ .

Для анализа МП алгоритма оценки длительности рассмотрим логарифм ФОП (33). Он представляет собой случайное поле, дифференцируемое по параметрам  $\varphi$  и  $\zeta$  и недифференцируемое по переменной  $\tau$ . Следовательно, начальная фаза и параметр ЛЧМ являются регулярными параметрами сигнала (2), а длительность — разрывным параметром [1]. Таким образом, условия регулярности частично нарушаются. В работе [11] показано, что асимптотически (с ростом ОСШ) точность МП оценок регулярных параметров (начальной фазы



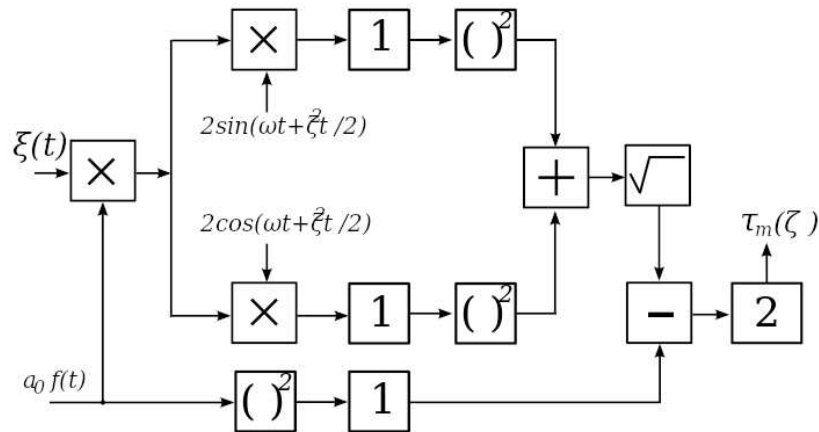


Рис. 6. Блок-схема МП измерителя длительности.

и параметра ЛЧМ) не зависит от наличия неизвестного разрывного параметра (длительности). Аналогично, точность МП оценки разрывного параметра (длительности) не зависит от наличия неизвестных регулярных параметров (начальной фазы и параметра ЛЧМ). Это означает, что смещение и рассеяние МП оценки длительности (32), при больших ОСШ асимптотически совпадают со смещением и рассеянием МП оценки длительности радиосигнала с априори известными начальной фазой и параметром ЛЧМ, найденными в [4] и совпадающими с выражениями (29). Следовательно, зависимости, приведённые на рис. 2-5, можно интерпретировать как функции, характеризующие выигрыш в точности МП оценки (32) по сравнению с точностью КП оценки (6).

Полученные результаты синтеза и анализа алгоритмов оценки длительности ЛЧМ радиоимпульса с неизвестной фазой и параметром ЛЧМ позволяют сделать обоснованный выбор необходимого алгоритма оценки в зависимости от имеющейся априорной информации о фазе сигнала, а также от требований, предъявляемых к точности оценки и степени простоты реализации алгоритма.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Трифонов, А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М. : Радио и связь, 1986. — 264 с.
2. Трифонов, А. П. Приём сигнала с неизвестной длительностью / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, // Известия вузов. Радиофизика. — 2002. — Т. 45, № 7. — С. 625–637.
3. Трифонов, А. П. Эффективность оценки длительности сигнала с неизвестной амплитудой / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, П. А. Кондратович // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2011. — Т. 54, № 11. — С. 3–12.
4. Корчагин, Ю. Э. Оценка длительности радиоимпульса с неизвестной фазой / Ю. Э. Корчагин // Известия вузов. Радиоэлектроника. — 2013. — Т. 56, № 7. — С. 29–37.
5. Корчагин, Ю. Э. Оценка длительности радиосигнала с неизвестными амплитудой и фазой / Ю. Э. Корчагин // Радиотехника. — 2013. — № 9. — С. 11–19.
6. Тихонов, В. И. Оптимальный приём сигналов / В. И. Тихонов. — М. : Радио и связь, 1983. — 320 с.
7. Куликов, Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М. : Сов. радио, 1978. — 296 с.
8. Антипенский, Р. В. Методика оценки длительности ЛЧМ-радиоимпульса при цифровой

обработке зондирующего сигнала бортовых РЛС / Р. В. Антипенский, А. Н. Катруша // Информационно-измерительные и управляющие системы. — 2017. — Т. 15, № 4. — С. 18–24.

9. Van, K. Nguyen A Low Complexity Parameter Estimation Technique for LFM CW Signals / K. Van // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems. — 2014. — V. 50. — P. 2554–2563.

10. Тихонов, В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. — М. : Радио и связь, 1977. — 488 с.

11. Трифонов, А. П. Характеристики совместных оценок параметров сигнала при частичном нарушении условий регулярности / А. П. Трифонов, В. К. Бутейко // Радиотехника и электроника. — 1991. — Т. 36, № 2. — С. 319–327.

## REFERENCES

1. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. The joint assessment of the distinction between signals and their parameters on the background noise. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ocenka ih parametrov na fone pomekh]. Moscow, 1986, 264 p.

2. Trifonov A.P. Korchagin Yu.E. Receiving the signal of unknown duration. [Trifonov A.P. Korchagin Yu.E. Priem signala s neizvestnoy dlitel'nost'yu]. *Izvestiya vysshix uchebnykh zavedenij. Radiofizika — Radiophysics and Quantum Electronics*, 2002, vol. 45, no. 7, pp. 625–637.

3. Trifonov A.P., Korchagin Y.E., Kondratovich P.A. Efficiency Of Estimating Duration Of A Signal With Unknown Amplitude. [Trifonov A.P., Korchagin Y.E., Kondratovich P.A. Effektivnost' ochenki dlitel'nosti signala s neizvestnoy amplitudoy]. *Izvestiya vuzov. Radioelektronika — Radioelectronics and Communications Systems*, 2011, vol. 54, no. 11, pp. 3–12.

4. Korchagin Yu.E. Estimation Of The Radio Pulse Duration With Unknown Phase. [Korchagin Yu.E. Ocenka dlitel'nosti radioimpul'sa s neizvestnoy fazoy]. *Izvestiya vuzov. Radioelektronika — Radioelectronics and Communications Systems*, 2013, vol. 56, no. 7, pp. 29–37.

5. Korchagin Yu.E. Estimation duration of signal with unknown amplitude and phase. [Korchagin Yu.E. Ocenka dlitel'nosti radiosignala s neizvestnymi amplitudoi i fazoi]. *Radiotekhnika — Radio engineering*, 2013, no. 9, pp. 11–19.

6. Tihonov V.I. Optimal reception of signals. [Tihonov V.I. Optimalnyi priyem signalov]. Moscow, 1983, 320 p.

7. Kulikov E.I., Trifonov A.P. Parameter estimation of signals in noise. [Kulikov E.I., Trifonov A.P. Ocenka parametrov signalov na fone pomekh]. Moscow, 1978, 296 p.

8. Antipensky R.V. Katrusha A.N. Methodology for estimating the duration of the chirp radio pulse during digital processing of the sounding signal of onboard radars. [Antipensky R.V. Katrusha A.N. Metodika ochenki dlitel'nosti LChM-radioimpul'sa pri cifrovoy obrabotke zondiruyushhego signala bortovykh RLS]. *Informacionno-izmeritel'nye i upravlyayushhie sistemy — Information-measuring and control systems*, 2017, vol. 15, no. 4, pp. 18–24.

9. Van K. Nguyen A Low Complexity Parameter Estimation Technique for LFM CW Signals. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 2554–2563.

10. Tihonov V.I., Mironov M.A. Markov processes. [Tihonov V.I., Mironov M.A. Markovskie processy]. Moscow, 1977, 488 p.

11. Trifonov A.P., Buteyko V.K. Characteristics of joint estimates of signal parameters with partial violation of the regularity conditions. [Trifonov A.P., Buteyko V.K. Harakteristiki sovmestnykh ocenok parametrov signala pri chastichnom narushenii uslovii reguliarnosti]. *Radiotekhnika i elektronika — Journal of Communications Technology and Electronics*, 1991, vol. 36, no. 2, pp. 319–327.

Корчагин Юрий Эдуардович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой радиоп физики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация  
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru  
Тел.: +7(473)220-89-16

Korchagin Yuri Eduardovich, Doctor of physico-mathematical sciences, Head of the Department of radiophysic of Voronezh State University. Voronezh, Russian Federation,  
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru  
Tel.: +7(473)220-89-16

Антипенский Роман Валериевич, кандидат технических наук, доцент, начальник кафедры радиоэлектроники ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация  
E-mail: antipensky@yandex.ru

Antipensky Roman Valerievich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Radio Electronics of MSEC of AF AFA, Voronezh, Russian Federation  
E-mail: antipensky@yandex.ru

Назаров Егор Евгеньевич, адъюнкт кафедры радиоэлектроники ВУНЦ ВВС ВВА, г. Воронеж, Российская Федерация  
E-mail: e.nazarov@rambler.ru

Nazarov Yegor Eugenevich, Postgraduate Officer of the Department of Radio Electronics of MSEC of AF AFA, Voronezh, Russian Federation  
E-mail: e.nazarov@rambler.ru

Космодемьянский Сергей Александрович, аспирант кафедры радиоп физики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация  
E-mail: kosm7777777@yandex.ru

Kosmodemyansky Sergey Alexanderovich, graduate student of the Department of radiophysic of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation  
E-mail: kosm7777777@yandex.ru

Макаров Александр Андреевич, аспирант кафедры электроники и наноэлектроники Национального исследовательского университета "МЭИ", г. Москва, Российская Федерация  
E-mail: al.an.makarov@mail.ru

Makarov Alexandr Andreevich, graduate student of the Department of Electronics and Nanoelectronics of the National Research University "MPEI", Moscow, Russian Federation,  
E-mail: al.an.makarov@mail.ru