УДК 517.955

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОЙ ДИФФУЗИИ

А. Ф. Тедеев

Северо-Осетинский государственный университет имени К. Л. Хетагурова

Поступила в редакцию 29.12.2018 г.

Аннотация. В данной работе рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения дробной диффузии. Решение рассматриваемой задачи определяется как граничное значение (след) некоторой гармонической функции. Пара функции — первая координата которой является искомым решением, а вторая координата его гармоническим продолжением — удовлетворяют некоторому интегральному тождеству. Такой локальный подход позволяет использовать итеративный метод О. А. Ладыженской, обобщенное неравенство Пуанкаре и теоремы вложения Соболева. На их основе доказана оценка искомого решения через интеграл площадей Лузина гармонической функции. В работе также доказана непрерывность решения задачи Коши в интегральной норме.
Ключевые слова: дробная диффузия, пара функции, след функции, задача Коши.

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE DIFFERENTIAL EQUATION OF FRACTIONAL DIFFUSION

A. F. Tedeev

Abstract. In this paper we consider the Cauchy problem for a nonlinear fractional diffusion equation. The solution of the problem is defined as the boundary value (trace) of a certain harmonic function. A pair of functions — the first coordinate of which is the desired solution, and the second coordinate is its harmonic continuation — satisfies some integral identity. This local approach allows us to use the integral Ladyzhenskaya method, generalized Poincare inequality, and Sobolev embedding theorems. Based on them, the estimation of the desired solution via the Luzin area integral of the harmonic function is proved. The paper also proves the continuity of the solution of the Cauchy problem in the integral norm.
Keywords: fractional diffusion, the trace of a function, pair of functions, the Cauchy problem.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматривается задача Коши для нелинейного дифференциального уравнения дробной диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u = \lambda u^{\gamma}, \quad x \in R^N, t > 0,\ \lambda > 0, 0 < \gamma < 1, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

R^N — N-мерное арифметическое пространство.

Оператор $(-\Delta)^{\frac{1}{2}}f(x)$ определяется в виде потенциала Рисса

$$(-\Delta)^{\frac{1}{2}}f(x) = C(N)\int\limits_{R^N}\frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{N+1}}\,dy, \tag{3}$$

$C(N)$ — постоянная, зависящая от размерности N.

Рассматривая гармоническое продолжение $v(x,y) = E(u(x))$ функции $u(x,t)$ по переменной x в области $R_+^{N+1} = \{(x,y):\ x\in R^N, y>0\}$ оператор (3) можно на основании [5] определить с помощью равенства

$$-\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{y=0} = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}u. \tag{4}$$

Используя равенства (1), (2) и (4), функции $v = v(x,y,t) = E(u(x,t))$ и $u(x,t) = T_r(v(x,y,t))$ могут быть соединены в одной краевой задаче вида

$$\Delta_{x,y}v = 0, \quad x\in R^N\ y>0, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda u^\gamma, \tag{6}$$

$$v(x,0,0) = u_0(x), \tag{7}$$

где $\Delta_{x,y}v = \sum\limits_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

В дальнейшем мы будем считать

$$u(x,t) = T_r(v), \quad v = E(u),$$

где $T_r(v)$ — это след функции v на R^N, а $E(u)$ — гармоническое продолжение функции u в область $\Omega = R^N\times R'_+ = \{(x,y) = (x_1,x_2,\ldots,x_N,y):\ x\in R^N, y>0\}$.

Замечание 1. Равенства (5), (6) и (7) мы понимаем в слабом (интегральном) смысле. Например, соотношения

$$\Delta v = 0, \quad (x,y)\in\Omega, t>0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda u^\gamma, \quad x\in R^N, t>0,$$

эквивалентны тождествам

$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial v}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy\,ds - \int\limits_0^T\int\limits_{R^N}\frac{\partial v}{\partial y}\varphi\,dx\,ds = 0$$

и

$$\int\limits_0^T\int\limits_{R^N}\frac{\partial v}{\partial y}\varphi\,dx\,ds = \int\limits_0^T\int\limits_{R^N}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda u^\gamma\right)\varphi\,dx\,ds$$

соответственно для любого $T>0$ и любой функции $\varphi\in C_0'(\overline{\Omega}\times[0,T))$.

Равенства

$$T_r(v(x,y,t)) = u(x,t), \quad \text{при любом} \quad t>0,$$

и

$$u(x,0) = v(x,0,0) = u_0(x)$$

определяются с помощью предельных соотношений

$$\lim_{y\to 0} v(x,y,t) = u(x,t), \quad \text{при любом} \quad t > 0, \quad \text{в} \quad L_2(\Omega)$$

и

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = u_0(x) \quad \text{в} \quad L_2(R^N),$$

соответственно.

В краевой задаче (5)–(7) функции $v = v(x,y,t)$ и $u = u(x,t)$ будем считать неизвестными, а функцию $u_0(x)$ заданной. Следуя работе [4], введем определение слабого решения краевой задачи (5)–(7).

Определение. *Будем считать пару функций* (u,v) *слабым решением задачи* (5)–(7), *если* $v \in L_2([0,T); W_2^1(\Omega))$, $u = u(x,t) = T_r(v) \in L_2((0,T); L_2(R^N))$ *для любого* $T > 0$, *и имеет место тождество*

$$-\int_0^T \int_\Omega Dv \cdot D\varphi \, dx\, dy\, dt + \int_0^T \int_{R^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx\, dt + \lambda \int_0^T \int_{R^N} u^\gamma \varphi \, dx\, dt = 0, \tag{8}$$

для любой функции $\varphi(x,y,t) \in C_0^1(\overline{\Omega} \times [0,T))$, *где*

$$Dv \cdot D\varphi = \sum_{j=1}^N \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Нетрудно проверить, что приведенное определение слабого решения корректно краевой задаче (5)–(7). При этом если пара (u,v) является слабым решением краевой задачи (5)–(7), тогда в силу (3), (6) и (7) первая координата $u = u(x,t)$ является решением задачи Коши (1), (2). Обратно, если $u = u(x,t)$ — решение задачи Коши (1), (2), и $v = v(x,y,t)$ его гармоническое продолжение в область $R_+^{N+1} = \{(x,y) : \ x \in R^N, y > 0\}$, то пара функций (u,v) — слабое решение краевой задачи (5)–(7).

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Пусть

$$u_h(x,t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(x,\tau)\, d\tau, \quad v_h(x,y,t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(x,y,\tau)\, d\tau,$$

$$(x,y) \in \Omega = R_+^{N+1},\ 0 < t < T - \delta,\ 0 < h < \delta,$$

— средние Стеклова функций $u(x,\tau)$ и $v(x,y,\tau)$ по переменной τ, δ — произвольное фиксированное положительное число, удовлетворяющее условию $0 < h < \delta < \frac{T}{2}$.

Имеет место следующее предложение.

Лемма 1. *Пусть* (u,v) — *слабое решение задачи* (5)–(7). *Тогда для любых* t_1 *и* t_2, *удовлетворяющих условию* $0 < \delta < t_1 < t_2 < T - \delta$ *имеет место тождество*

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{R^N} u_{ht} \, \psi \, dx\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega D(v_h) D(\psi^*) \, dx\, dy\, dt + \lambda \int_{t_1}^{t_2} \int_{R^N} (u^\gamma)_h \, \psi \, dx\, dt = 0, \tag{9}$$

для любой функции $\psi^* \in C_0^1(\overline{\Omega} \times [0,T))$, $\psi \in T_r(\psi^*)$.

Доказательство. Пусть $\varphi^*(x,y,t) \in C_0^1(\overline{\Omega} \times [0,T))$ удовлетворяет условию

$$\varphi^*(x,y,t) = 0, \quad 0 < t < \delta, \quad T - \delta < t < T.$$

В тождестве (8) в качестве пробной функции выберем функцию

$$\zeta(x,y,t) = \varphi^*_{-h}(x,y,t),$$

где

$$\varphi^*_{-h}(x,y,t) = \frac{1}{h} \int\limits_{t-h}^{t} \varphi^*(x,y,\tau)\, d\tau.$$

Используя свойства средних Стеклова из тождества (8) на основании определения функции φ^* получим тождество

$$\int\limits_0^T \int\limits_{R^N} -u_h\, \varphi_t\, dx\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} D(v_h) D\varphi^*\, dx\, dy\, dt + \lambda \int\limits_0^T \int\limits_{R^N} (u^\gamma)_h\, \psi\, dx\, dt = 0,$$

где $\varphi = T_r(\varphi^*)$.

Так как $u_{ht} \in L_2(R^N \times (0,T))$, то к первому слагаемому последнего равенства можно применить интегрирование по частям по переменной τ. В результате получим тождество

$$\int\limits_0^T \int\limits_{R^N} u_{ht}\, \varphi\, dx\, d\tau + \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega} D(v_h) D\varphi^*\, dx\, dy\, d\tau + \lambda \int\limits_0^T \int\limits_{R^N} (u^\gamma)_h\, \varphi\, dx\, d\tau = 0. \tag{10}$$

Пусть, далее t_1 и t_2 — значения переменной τ, удовлетворяющие условию леммы 1, и $\chi(t)$ — характеристическая функция интервала (t_1,t_2). Рассмотрим гладкую аппроксимацию $\varphi_n(t)$ функции $\chi(t)$, и заменим в (10) функцию φ на функцию $\psi_n(x,\tau) = \varphi_n(\tau) \cdot \psi(x,\tau)$, а функцию φ^* соответствующим продолжением $\varphi_n(\tau) \cdot \psi^*(x,y,\tau)$, где $\psi^*(x,y,\tau) \in C_0^1(\overline{\Omega} \times [0,T))$. Переходя затем к пределу в полученном равенстве при $n \to \infty$, получим тождество (9). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если* (u,v) *— слабое решение задачи* (5)–(7), *тогда для всех* $0 < t_0 < t_1 < T$ *и* $\zeta(x,y,t) \in C_0^1(\overline{\Omega} \times [0,T))$ *имеет место соотношение*

$$\int\limits_{R^N} u(x,t_1)\zeta(x,0,t_1)\, dx - \int\limits_{R^N} u(x,t_0)\zeta(x,0,t_0)\, dx -$$

$$- \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^N} u(x,\tau)\zeta_\tau(x,0,\tau)\, dx\, d\tau + \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\Omega} D(v) \cdot D(\zeta)\, dx\, dy\, d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{R^N} u^\gamma(x,\tau)\zeta(x,0,\tau)\, dx\, d\tau = 0. \tag{11}$$

Доказательство. Подберем $\delta > 0$ и $h > 0$ таким образом, чтобы $0 < h < \delta < t_0 < t_1 < T - \delta$. Используя равенство

$$u_{ht} \cdot \zeta = (u_h \cdot \zeta)_t - u_h \cdot \zeta_t,$$

на основании леммы 1 получим соотношение

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{R^N}(u_h\cdot\zeta)_t\,dx\,dt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{R^N}u_h\zeta_t\,dx\,dt+\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega}D(v_h)\cdot D\zeta\,dx\,dy\,dt+$$

$$+\lambda\int_{t_0}^{t_1}\int_{R^N}(u^\gamma)_h\zeta\,dx\,dt=0. \qquad (12)$$

Применяя к первому интегралу тождества (12) формулу Ньютона — Лейбница и переходя к пределу в полученном равенстве при $h\to 0$, получим соотношение (11). Лемма 2 доказана.

Замечание 2. В определении слабого решения задачи (5)–(7) пространство пробных функций $C_0^1(\overline{\Omega}\times[0,T))$ может быть заменено на пространство $L_2\big((0,T);\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\big)$, где $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ — пополнение пространства $C_0^1(\Omega)$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)$. Чтобы убедиться в этом, необходимо для любой функции $\zeta(x,y,t)\in L^2\big((0,T);W_2^1(\Omega)\big)$ построить аппроксимирующую последовательность $\zeta_n(x,y,t)\in C_0^1((0,T)\times\Omega)$ в норме $L_2(0,T)$, заменить в равенстве (8) φ на ζ_n и сделать предельный переход.

В дальнейшем существование слабого решения задачи (5)–(7) будем предполагать заранее.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $t>0$ и $\sigma\in(0,1)$ фиксированы. Рассмотрим последовательности

$$\rho_n=\rho(1+\sigma 2^{-n}),\quad t_n=\frac{1}{2}t(1-\sigma 2^{-n}),\quad n=0,1,2,\ldots$$

Положим $B_{\rho_n}^{N+1}=B_n^{N+1}$, где $B_{\rho_n}^{N+1}$ — шар с центром в начале координат и радиусом ρ_n в $\mathbb{R}^{N+1}$. Пусть, далее $B_{n,+}^{N+1}=B_n^{N+1}\bigcap R_+^{N+1}$, и $B_{\rho_n}^N=B_n^N$ — шар с центром в начале координат радиусом ρ_n в R^N, $\Omega_n^{N+1}=B_n^{N+1}\times(t_n,t)$; $\Omega_n^N=B_n^N\times(t_n,t)$.

Рассмотрим последовательность гладких срезающих функций $\zeta_n(x,y,\tau)$ в Ω_n^{N+1}, равные единице в Ω_{n+1}^{N+1}, и такие, что

$$0\leqslant\frac{\partial\zeta_n}{\partial\tau}\leqslant\frac{c2^n}{\sigma\tau},\quad |D\zeta_n|\leqslant\frac{c2^n}{\sigma\rho},\quad 0\leqslant\zeta_n(x,y,t)\leqslant 1, \qquad (13)$$

где c — константа, зависящая только от размерности N. Примеры таких срезающих функций приведены, например, в работах [2] и [3].

Основным результатом настоящей работы является следующее утверждение.

Теорема. *Если* (u,v) *— слабое решение задачи* (5)–(7), *и*

$$A_{B_{2\rho}^{N+1}}(x,t)=\int\limits_{\Gamma_a(x)\bigcap B_{2\rho}^{N+1}}y^{1-N}|D(v(s,y,t))|^2ds\,dy$$

— интеграл площадей Лузина функции v, *где* $\Gamma_a(x)$ *— конус с вершиной в точке* $x\in R^N$ *раствора* a, *то для всех* $t\geqslant 1$, $\rho\geqslant 1$ *имеет место оценка*

$$t^{\frac{1}{2}}\|u(\cdot,t)\|_{\infty,B_\rho^N}\leqslant c\left\|A_{B_{2\rho}^{N+1}}(\cdot,t)\right\|_{L_2((0,t);L_2(B_{2\rho}^N))}, \qquad (14)$$

c *— несущественная константа.*

Доказательство. Применим итеративный метод О. А. Ладыженской. Для этого положим в интегральном тождестве (8) $\varphi(x,y,t)$ равным:

$$\varphi(x,y,t) = (v(x,y,t) - k_n)_+ \zeta_n^2(x,y,t),$$

где $k_n = k - \frac{k}{2^n}$, $n = 0,1,2,\ldots$, k — произвольное положительное число, $\zeta_n(x,y,t)$ — срезающие функции, удовлетворяющие условиям (13), и

$$(v(x,y,t) - k_n)_+ = \max\{0, v(x,y,t) - k_n\}.$$

После элементарных преобразований для первого слагаемого тождества (8) имеем

$$-\int_0^T \int_\Omega Dv \cdot D\varphi \, dx\, dy\, dt = -\int_0^T \int_\Omega |D[(v-k_n)_+ \zeta_n]|^2 \, dx\, dy\, dt \; + \int_0^T \int_\Omega (v-k_n)_+^2 |D\zeta_n|^2 \, dx\, dy\, dt. \quad (15)$$

Для второго слагаемого тождества (8) будем иметь:

$$\int_0^T \int_{R^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial t} \, dx\, dt = \int_0^T \int_{R^N} u \left[\frac{\partial (u-k_n)_+}{\partial t} \zeta_n^2 + 2(u-k_n)_+ \zeta_n \cdot \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \right] dx\, dt \; =$$

$$= \int_0^T \int_{R^N} (u-k_n)_+ \frac{\partial (u-k_n)_+}{\partial t} \zeta_n^2 \, dx\, dt + \int_0^T \int_{R^N} k_n \frac{\partial (u-k_n)_+}{\partial t} \zeta_n^2 \, dx\, dt +$$

$$+ 2\int_0^T \int_{R^N} (u-k_n)_+^2 \zeta_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \, dx\, dt + 2\int_0^T \int_{R^N} k_n (u-k_n)_+ \zeta_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \, dx\, dt \; =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{R^N} \frac{\partial (u-k_n)_+^2}{\partial t} \zeta_n^2 \, dx\, dt - 2k_n \int_0^T \int_{R^N} (u-k_n)_+ \zeta_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \, dx\, dt +$$

$$+ 2\int_0^T \int_{R^N} (u-k_n)_+^2 \zeta_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \, dx\, dt + 2k_n \int_0^T \int_{R^N} (u-k_n)_+ \zeta_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \, dx\, dt \; =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{R^N} \frac{\partial (u-k_n)_+^2}{\partial t} \zeta_n^2 \, dx\, dt + 2\int_0^T \int_{R^N} (u-k_n)_+^2 \zeta_n \cdot \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \, dx\, dt \; =$$

$$= \int_0^T \int_{R^N} (u-k_n)_+^2 \zeta_n \cdot \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \, dx\, dt. \quad (16)$$

Наконец, третье слагаемое можно оценить следующим образом:

$$\lambda \int_0^T \int_{R^N} u^\gamma \varphi \, dx\, dt = \lambda \int_0^T \int_{R^N} u^\gamma (u-k_n)_+ \zeta_n^2 \, dx\, dt \; =$$

$$= \lambda \int_0^T \int_{R^N} [(u-k_n)_+ + k_n]^\gamma (u-k_n)_+ \zeta_n^2 \, dx\, dt \; \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \int\limits_0^T \int\limits_{R^N} (u-k_n)_+^{\gamma+1} \zeta_n^2 \, dx\, dt + \lambda k_n^\gamma \int\limits_0^T \int\limits_{R^N} (u-k_n)_+ \zeta_n^2 \, dx\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \left(\int\limits_0^T \int\limits_{R^N} [(u-k_n)_+ \zeta_n]^2 \, dx\, dt \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \cdot \left(\int\limits_0^T \int\limits_{R^N} \zeta_n^2 \, dx\, dt \right)^{\frac{1-\gamma}{2}} +$$

$$+ \lambda k_n^\gamma \left(\int\limits_0^T \int\limits_{R^N} (u-k_n)_+^2 \zeta_n^2 \, dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^T \int\limits_{R^N} \zeta_n^2 \, dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda \left(\operatorname{meas} \Omega_n^N\right)^{\frac{1-\gamma}{2}} \left(\int\limits_0^T \int\limits_{R^N} [(u-k_n)_+ \zeta_n]^2 \, dx\, dt \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} +$$

$$+ \lambda k_n^\gamma \left(\operatorname{meas} \Omega_n^N\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^T \int\limits_{R^N} [(u-k_n)_+ \zeta_n]^2 \, dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{17}$$

На основании (14), (15) и (16) из (8) следует, что

$$-\int\limits_0^T \int\limits_\Omega |D[(v-k_n)_+ \zeta_n]|^2 \, dx\, dy\, dt + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (v-k_n)_+^2 |D\zeta_n|^2 \, dx\, dy\, dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_{R^N} (u-k_n)_+^2 \zeta_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} \, dx\, dt +$$

$$+ \lambda \left(\operatorname{meas} \Omega_n^N\right)^{\frac{1-\gamma}{2}} \left(\int\limits_0^T \int\limits_{R^N} [(u-k_n)_+ \zeta_n]^2 \, dx\, dt \right)^{\frac{\gamma+1}{2}} +$$

$$+ \lambda k_n^\gamma \left(\operatorname{meas} \Omega_n^N\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^T \int\limits_{R^N} [(u-k_n)_+ \zeta_n]^2 \, dx\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \geqslant 0. \tag{18}$$

Оценим интеграл

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (v-k_n)_+^2 \zeta_n^2 \, dx\, dy\, dt$$

снизу. Имеем:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (v-k_n)_+^2 \zeta_n^2 \, dx\, dy\, dt \geqslant \int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_\rho^{N+1}} (v-k_n)_+^2 \, dx\, dy\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_\rho^{N+1} \bigcap \{v \geqslant k_{n+1}\}} (v-k_n)_+^2 \, dx\, dy\, dt \geqslant \int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_\rho^{N+1}} (k_{n+1}-k_n)^2 \, dx\, dy\, dt =$$

$$= (k_{n+1}-k_n)^2 (t-t_n) \cdot \operatorname{meas}(B_\rho^{N+1}).$$

Отсюда

$$C(N)k^2 2^{-2n} t \cdot \rho^{N+1} \leqslant \int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} (v-k_n)_+^2 \zeta_n^2 \, dx\, dy\, dt \; = $$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_\Omega (v-k_n)_+^2 \zeta_n^2 \, dx\, dy\, dt, \tag{19}$$

здесь $C(N)$ — константа, зависящая от N.

Используя неравенство Пуанкаре [1], и свойства срезающих функций для второго слагаемого равенства (17) имеем:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (v-k_n)_+^2 |D\zeta_n|^2 \, dx\, dy\, dt \leqslant \frac{c 2^{2n}}{\sigma^2 \rho^2} \int\limits_0^T \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} [(v-k_n)_+]^2 \, dx\, dy\, dt \; \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c 2^{2n}}{\sigma^2 \rho^2} \cdot \left[\text{meas}\left(B_{\rho_n}^{N+1}\right)\right]^{\frac{2}{N+1}} \int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D[(v-k_n)_+]|^2 \, dx\, dy\, dt \; \leqslant$$

$$\leqslant C(N) \frac{2^{2n}}{\sigma^2} \int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D[(v-k_n)_+]|^2 \, dx\, dy\, dt. \tag{20}$$

Пусть ε — произвольное положительное число, тогда из (18) и (19), используя неравенство Пуанкаре, получим

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega (v-k_n)_+^2 |D\zeta_n|^2 \, dx\, dy\, dt \; \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{2^{2n}}{\sigma^2} \frac{\left(C(N)k^2 2^{-2n} t \rho^{N+1}\right)^\varepsilon}{\left(C(N)k^2 2^{-2n} t \rho^{N+1}\right)^\varepsilon} \cdot \int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D[(v-k_n)_+]|^2 \, dx\, dy\, dt \; \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(N) 2^{2n}}{\sigma^2 \left(C(N)k^2 2^{-2n} t \rho^{N+1}\right)^\varepsilon} \left(\int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} [(v-k_n)_+ \zeta_n]^2 \, dx\, dy\, dt \right)^\varepsilon \times$$

$$\times \left(\int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D[(v-k_n)_+]|^2 \, dx\, dy\, dt \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(N) 2^{2n} \left(\text{meas}\, B_{\rho_n}^{N+1}\right)^{\frac{2\varepsilon}{N+1}}}{\sigma^2 \left(C(N)k^2 2^{-2n} t \rho^{N+1}\right)^\varepsilon} \left(\int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D[(v-k_n)_+]|^2 \, dx\, dy\, dt \right)^{1+\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant C(N) \frac{2^{2n}}{\sigma^2 \left(C(N)k^2 2^{-2n} t \rho^{N-1}\right)^\varepsilon} \left(\int\limits_{t_n}^{t} \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D[(v-k_n)_+]|^2 \, dx\, dy\, dt \right)^{1+\varepsilon}. \tag{21}$$

Применяя теорему вложения, третье слагаемое соотношения (18) оценивается следующим образом:

$$\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{R}^n} u\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dt = \int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_{\rho_n}^N} (u-k_n)_+^2 \zeta_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^n}{\sigma t_n} \int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_{\rho_n}^N} (u-k_n)_+^2\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^n}{\sigma t_n} \int\limits_{t_n}^t \left(\int\limits_{B_{\rho_n}^N} (u-k_n)_+^{\frac{2N}{N-1}}\,dx \right)^{\frac{N-1}{N}} \cdot \left(\operatorname{meas} B_{\rho_n}^N\right)^{\frac{1}{N}}\,d\tau =$$

$$= \frac{C(N)\rho_n 2^n}{\sigma t_n} \int\limits_{t_n}^t \left(\int\limits_{B_{\rho_n}^N} (u-k_n)_+^{\frac{2N}{N-1}}\,dx \right)^{\frac{N-1}{N}} dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(N)\rho_n 2^n}{\sigma t_n} \int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D[(v-k_n)_+]|^2\,dx\,dy\,d\tau.$$

Используя оценку (19) и неравенство Пуанкаре, будем иметь

$$\int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_{\rho_n}^N} (u-k_n)_+^2 \zeta_n \frac{\partial \zeta_n}{\partial t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(N)\rho_n 2^n}{\sigma t_n} \cdot \frac{\left(C(N)k^2 2^{-2n} t\rho^{N+1}\right)^{\varepsilon}}{\left(C(N)k^2 2^{-2n} t\rho^{N+1}\right)^{\varepsilon}} \cdot \int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D(v-k_n)_+|^2\,dx\,dy\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(N)\rho_n 2^n}{\sigma t_n} \cdot \frac{1}{\left(C(N)k^2 2^{-2n} t\rho^{N+1}\right)^{\varepsilon}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} (v-k_n)_+^2\,dx\,dy\,dt \right)^{\varepsilon} \cdot \left(\int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D(v-k_n)_+|^2\,dx\,dy\,dt \right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(N)\rho_n 2^n}{\sigma t_n} \cdot \left(\frac{C(N)\left(\operatorname{meas} B_{\rho_n}^{N+1}\right)^{\frac{2}{N+1}}}{C(N)k^2 2^{-2n} t\rho^{N+1}} \right)^{\varepsilon} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D(v-k_n)_+|^2\,dx\,dy\,dt \right)^{1+\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(N)2^n\rho}{\sigma(1-\sigma)t} \cdot \left(\frac{C(N)2^{2n}}{k^2 t\rho^{N-1}}\right)^{\varepsilon} \left(\int\limits_{t_n}^t \int\limits_{B_{\rho_n}^{N+1}} |D(v-k_n)_+|^2\,dx\,dy\,dt \right)^{1+\varepsilon}. \tag{22}$$

Оценим четвертое слагаемое соотношения (18).

Применяя неравенство Гёльдера и вложение $W_2'(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-1}}(R^N)$, получим

$$\lambda \left(\operatorname{meas}\Omega_n^N\right)^{\frac{1-\gamma}{2}} \left(\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{B_{\rho n}^N} [(u-k_n)_+\zeta_n]^2\,dx\,d\tau\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda C(N)\left(\operatorname{meas}\Omega_n^N\right)^{\frac{1-\gamma}{2}} \rho_n^{\frac{\gamma+1}{2}} \left(\int\limits_{t_n}^{t}\left(\int\limits_{B_{\rho n}^N}(u-k_n)_+^{\frac{2N}{N-1}}\,dx\right)^{\frac{N-1}{N}} d\tau\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda C(N)\left(\operatorname{meas}\Omega_n^N\right)^{\frac{1-\gamma}{2}} \rho_n^{\frac{\gamma+1}{2}} \left(\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{B_{\rho n}^{N+1}} |D(v-k_n)_+|^2\,dx\,dy\,d\tau\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} =$$

$$= \lambda C(N)\left(\operatorname{meas}\Omega_n^N\right)^{\frac{1-\gamma}{2}} \rho_n^{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{\left(C(N)k^2 2^{-2n} t\rho^{N+1}\right)^{\frac{1-\gamma}{2}+\varepsilon}}{\left(C(N)k^2 2^{-2n} t\rho^{N+1}\right)^{\frac{1-\gamma}{2}+\varepsilon}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{B_{\rho n}^{N+1}} |D(v-k_n)_+|^2\,dx\,dy\,dt\right)^{\frac{\gamma+1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda C(N)\left(\operatorname{meas}\Omega_n^N\right)^{\frac{1-\gamma}{2}} \rho_n^{\frac{\gamma+1}{2}} \frac{\left(C(N)\left(\operatorname{meas}B_{\rho_n}^{N+1}\right)^{\frac{2}{N+1}}\right)^{\frac{1-\gamma}{2}+\varepsilon}}{\left(C(N)k^2 2^{-2n} t\rho^{N+1}\right)^{\frac{1-\gamma}{2}+\varepsilon}} \times$$

$$\times \left(\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{B_{\rho n}^{N+1}} |D(v-k_n)_+|^2\,dx\,dy\,d\tau\right)^{1+\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(N,\gamma)C(N)^{\varepsilon}2^{n(1-\gamma+2\varepsilon)}}{k^{1-\gamma+2\varepsilon}t^{\varepsilon}\rho^{\varepsilon(N-1)-1}} \cdot \left(\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{B_{\rho n}^{N+1}} |D(v-k_n)_+|^2\,dx\,dy\,d\tau\right)^{1+\varepsilon}. \tag{23}$$

Аналогично оценивается последнее слагаемое соотношения (18). А именно:

$$\lambda k_n^{\gamma}\left(\operatorname{meas}\Omega_n^N\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{B_{\rho n}^N} [(u-k_n)_+\zeta_n]^2\,dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(N)^{\varepsilon}2^{n(1+2\varepsilon)}}{k^{1-\gamma+2\varepsilon}t^{\varepsilon}\rho^{\varepsilon(N-1)-1}} \cdot \left(\int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{B_{\rho n}^{N+1}} |D(v-k_n)_+|^2\,dx\,dy\,d\tau\right)^{1+\varepsilon}. \tag{24}$$

Введем обозначение $Y_n = \int\limits_{t_n}^{t}\int\limits_{B_{\rho n}^{N+1}} |D(v-k_n)_+|^2\,dx\,dy\,d\tau$.

Тогда на основании (21), (22), (23) и (24) из (18), в силу того, что $\rho \geqslant 1$ и $t \geqslant 1$, получим оценку:

$$Y_{n+1} \leqslant \frac{C(N,\gamma,\sigma)C(N)^{\varepsilon}2^{n(2+2\varepsilon)}}{t^{\varepsilon}\rho^{\varepsilon(N-1)-1}}\left(\frac{k^{1-\gamma}+1}{k^{1-\gamma+2\varepsilon}}\right)Y_n^{1+\varepsilon}. \tag{25}$$

Напомним, что параметры k и ε в неравенстве (25) являются произвольными положительными числами. При

$$k = \left(\frac{C_1 b^{\frac{1}{\varepsilon}} Y_0^{\varepsilon}}{\rho^{\varepsilon(N-1)-1} t^{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma+2\varepsilon}} + \left(\frac{C_2 b^{\frac{1}{\varepsilon}} Y_0^{\varepsilon}}{\rho^{\varepsilon(N-1)-1} t^{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{2\varepsilon}}, \tag{26}$$

где $b = 2^{2+2\varepsilon}$, все условия леммы 5.6 (стр. 113) монографии [1] выполняются. Поэтому при выбранном значении параметра k

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = 0.$$

Следовательно, в силу вложения $W_2' \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-1}}(R^N)$, тем более

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{t_n}^{t} \left(\int\limits_{B_{\rho_n}^N} (u-k_n)_+^{\frac{2N}{N-1}}\, dx \right)^{\frac{N-1}{N}} d\tau = 0,$$

то есть

$$\int\limits_{\frac{t}{2}}^{t} \left(\int\limits_{B_{\rho}^N} (u-k)_+^{\frac{2N}{N-1}}\, dx \right)^{\frac{N-1}{N}} d\tau = 0.$$

Отсюда следует, что почти всюду в $\{(t/2,t) \times B_\rho^N\}$

$$u(x,\tau) \leqslant k. \tag{27}$$

Из (26) и (27) вытекает неравенство

$$\|u(\cdot,t)\|_{B_\rho^N} \leqslant \left(\frac{C_1 b^{\frac{1}{\varepsilon}} Y_0^{\varepsilon}}{\rho^{\varepsilon(N-1)-1} t^{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{1-\gamma+2\varepsilon}} + \left(\frac{C_2 b^{\frac{1}{\varepsilon}} Y_0^{\varepsilon}}{\rho^{\varepsilon(N-1)-1} t^{\varepsilon}} \right)^{\frac{1}{2\varepsilon}}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to +\infty$, находим, что

$$\|u(\cdot,t)\|_{B_\rho^N} \leqslant C \frac{Y_0^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{N-1}{2}} t^{\frac{1}{2}}}. \tag{28}$$

Пусть

$$A_{B_{2\rho}^{N+1}}(x) = \left(\int\limits_{\Gamma_a(x)\cap B_{2\rho}^{N+1}} y^{1-N} |Dv|^2\, ds\, dy \right)^{\frac{1}{2}}$$

— интеграл площадей Лузина функции $v(x,y,t)$, при фиксированном значении t. Тогда из (28) следует

$$\|u(\cdot,t)\|_{\infty,\, B_\rho^N} \leqslant C \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t \int\limits_{B_{2\rho}^N} A^2_{B_{2\rho}^{N+1}}(x)\, dx\, d\tau \right)^{\frac{1}{2}},$$

что соответствует неравенству (14). Теорема доказана.

Используя лемму 2 и поступая так же, как в доказательстве теоремы в [4], можно доказать, что решение задачи Коши (1), (2) удовлетворяет условию

$$u(x,t) \in C\left((0,T); L_{2,\mathrm{loc}\,(R^N)}\right),$$

при любом $T > 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболичесвкого типа / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева. — М., 1967. — 736 с.

2. Тедеев, А. Ф. Свойство конечной скорости распростронения возмущений для решения задачи Дирихле дифференчиального уравнения неоднородной диффузии / А. Ф. Тедеев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2016. — № 4. — С. 1–39.

3. Тедеев, А. Ф. Свойства решений задачи Коши для нелинейного параболического уравнения второго порядка с вырождением по независимой переменной / А. Ф. Тедеев Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 185–196.

4. Тедеев, А. Ф. Существование и единственность решения дифференциального уравнения дробной диффузии / А. Ф. Тедеев // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2019. — № 4. — С. 74–85.

5. Caffarelli, L. An expension problem related to the fractional Laplacian / L. Caffarelli, L. Silvestre // Communications in Partial Differential Equations. — 2008. — № 8. — P. 1–15.

6. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

7. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

REFERENCES

1. Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. [Ladyzhenskaya O.A., Solonnikov V.A., Ural'ceva N.N. Linejnye i kvazilinejnye uravneniya parabolichesvkogo tipa]. Moscow, 1967, 736 p.

2. Tedeev A.F. Finite speed of propagation of perturbations for the Dirichlet problem of the differential equation of inhomogeneous diffusion. [Tedeev A.F. Svojstvo konechnoj skorosti rasprostroneniya vozmushchenij dlya resheniya zadachi Dirikhle differenchial'nogo uravneniya neodnorodnoj diffuzii]. *Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya — Differential Equations and Control Processes*, 2016, no. 4, pp. 1–39.

3. Tedeev A.F. Properties of solutions of the Cauchy problem for a second order nonlinear parabolic equation with independent variable degeneracy. [Tedeev A.F. Svojstva reshenij zadachi Koshi dlya nelinejnogo parabolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka s vyrozhdeniem po nezavisimoj peremennoj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 185–196.

4. Tedeev A.F. Existence and uniqueness of the solution of the differential equation of fractional diffusion. [Tedeev A.F. Sushchestvovanie i edinstvennost' resheniya differencial'nogo uravneniya drobnoj diffuzii]. *Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya — Differential Equations and Control Processes*, 2019, no. 4, pp. 74–85.

5. Caffarelli L., Silvestre L. An expension problem related to the fractional Laplacian, Communications in Partial Differential Equations, 2008, no. 8, pp. 1–15.

6. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

7. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 162–172.

Тедеев Александр Федорович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры функционального анализа и дифференциальных уравнений, Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, г. Владикавказ, Российская федерация
E-mail: tedeev92@bk.ru

Tedeev Alexander Fedorovich, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of Functional Analysis and Differential Equations Department, North Ossetian State University Named after K. L. Hetagurov, Vladikavkaz, Russian Federation
E-mail: tedeev92@bk.ru