УДК 517.43

# ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА И РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА 4-ГО ПОРЯДКА С ТРЕХКРАТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ КОРНЕМ

**Э. Г. Оруджев**[1], **С. А. Алиев**[2]

[1] — *Бакинский государственный университет;*
[2] — *Нахичеванский институт учителей*

Поступила в редакцию 17.12.2018 г.

**Аннотация**. В работе в пространстве $L_2(0;\infty)$ исследуется спектр и резольвента пучка дифференциальных операторов четвертого порядка, когда главный характеристический полином имеет один трехкратный корень. Показано, что пучок может иметь в открытой нижней и открытой верхней полуплоскостях конечное или счетное число собственных значений, а непрерывный спектр заполняет весь действительную ось, где могут находится спектральные особенности. Доказано, что резольвента пучка является ограниченным интегральным оператором, определенным на всей пространстве $L_2(0;\infty)$, с ядром типа Карлемана.

**Ключевые слова**: спектр, собственная функция, резольвента, сопряженный оператор, ядро типа Карлемана.

# STUDY OF THE SPECTRUM AND RESOLVENTS OF A SINGLE DIFFERENTIAL BEAM OF THE FOURTH ORDER WITH A THREE-TIME CHARACTERISTIC ROOT

**E. G. Orudzhev, S. A. Aliev**

**Abstract**. The article is considered that, the spectrum and the resolvent of a structure of fourth-order differential operators are investigated in space$L_2(0;\infty)$, when one triple root is the main characteristic polynomial . It is shown that, a beam can have a finite or countable number of eigenvalues in the open lower and open upper half-planes, and the continuous spectrum fills the entire real axis, where spectral features can be located. It is proved that, the resolvent of a structure is a bounded integral operator, defined on the whole space$L_2(0;\infty)$ , with a Carleman type.

**Keywords**: spectrum, eigen function, resolvent, ad joint operator, Carleman type.

В пространстве $L_2(0,\infty)$ рассмотрим пучок дифференциальных операторов $L_\lambda^\alpha$, порожденный дифференциальным выражением

$$l\left(x,\frac{d}{dx},\lambda\right)Y\equiv\left(\frac{d}{dx}-i\lambda\right)^3\left(\frac{d}{dx}+i\lambda\right)Y+r(x)\frac{dy}{dx}+(\lambda p(x)+q(x))Y=0\ , \tag{1}$$

и граничным условиям

$$U_\nu(Y)\equiv\alpha_{\nu0}Y(0,\lambda)+\alpha_{\nu1}Y'(0,\lambda)+\alpha_{\nu2}Y''(0,\lambda)+\alpha_{\nu3}Y'''(0,\lambda)=0\ ,\ \nu=\overline{1,3} \tag{2}$$

где $\lambda$ — спектральный параметр, $r(x)$ , $p(x)$, $q(x)$ комплекснозначные функции, определенные и непрерывные на $[0,\infty)$, соответственно имеют непрерывные производные до порядка 3, 4, 5 включительно, сходятся интегралы

$$\int\limits_0^\infty x^4\left|r^{(s)}(x)\right|dx<\infty, s=\overline{0,3};\ \int\limits_0^\infty x^4\left|p^{(s)}(x)\right|dx<\infty, s=\overline{0,5};\ \int\limits_0^\infty x^4\left|q^{(s)}(x)\right|dx<\infty, s=\overline{0,4}; \tag{3}$$

$\alpha_{\nu k}$, $\nu = \overline{1,3}$, $k = \overline{0,3}$ фиксированные комплексные числа такие, что формы $U_\nu(Y)$ линейно независимы, число граничных условий меняется в зависимости от место нахождения параметра $\lambda$ в комплексной плоскости.

Специфика пучка $L_\lambda^\alpha$ является то, что главный характеристический многочлен уравнения (1) имеет трехкратный корень $i$ и простой корень $-i$. В общем случае кратных корней этого многочлена формальные решения уравнения, с полиноминальным вхождением $\lambda$, могут содержать дробные степени параметра как в показателе экспоненты, так и при множителе экспоненты, и сама структура асимптотических представлений не только зависят от старших коэффициентов, но и алгебраических комбинаций при низких степенях параметра [1]. Здесь учтены эти свойства таким образом, что формальные решения не содержали дробные степени параметра.

Прямые спектральные аспекты обыкновенных дифференциальных операторов на конечном отрезке в случае различных корней главного характеристического многочлена изучены достаточно хорошо. Наиболее полные исследования различных спектральных аспектов проведены в работах Г. Д. Биркгофа, Я. Д. Тамаркина, М. А. Наимарка, М. В. Келдыша, А. Г. Костюченко, В. А. Ильина, В. А. Марченко, М. Г. Гасымова, М. Л. Расулова, А. А. Шкаликова и др. В частности, вопросы кратной полноты системы собственных и присоединенных функций подобных пучков решены в зависимости от расположения этих корней. При этом существенным условием кратной полноты является расположение характеристических корней на различных лучах, исходящих из начала координат. При нарушении этого условия данная система присоединенных функций обладает бесконечным дефектом в смысле кратной полноты [2, 3, 4].

Дифференциальные пучки, заданные на бесконечных интервалах также изучены довольно хорошо в случае различных характеристических корней. И, здесь обнаружено такой эффект, что число граничных условий на левом конце в случае полуоси, также зависит от местонахождения параметра $\lambda$ и связано с расположением корней характеристического полинома, и соответствующий несамосопряженный пучок не является аналитической функцией параметра $\lambda$ во всей комплексной плоскости [5, 6], но является аналитической функцией от $\lambda$ в верхней и нижней полуплоскостях с разрезом вдоль вещественной оси.

Ввиду того, что рассматриваемый здесь пучок имеет один трехкратный характеристический корень, а это означает, что все они лежат на одном луче, выходящего из начала координат, а второй корень на противоположном луче, относительно начала координат, надо провести специальное исследование этого пучка. Когда имеются характеристические кратные корни, но они симметрично расположены относительно начала координат, соответствующие результаты о разложении по собственным функциям непрерывных и дискретных спектров получены в работах [7, 8, 9].

В работах [10, 11] исследованы уравнение (1) и построены операторы преобразования, переводящее решения уравнения $\left(\frac{d}{dx} - i\lambda\right)^3 \left(\frac{d}{dx} + i\lambda\right) Y = 0$ на решения уравнения (1). В частности, в [11] получено, что уравнение (1) имеет фундаментальную систему решений $Y_j(x,\lambda)$, $j = \overline{1,4}$, которые удовлетворяют условиям:

$$\lim_{x\to\infty} \left[ Y_j(x,\lambda) - x^{j-1} e^{i\lambda x} \right] = 0\,, \ j = \overline{1,3}, \ Im\lambda \geqslant 0;$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[ Y_j(x,\lambda) - e^{-i\lambda x} \right] = 0\,, \ Im\lambda \leqslant 0; \tag{4}$$

существуют ядра $K_j^{\pm}(x,t)$, такие, что

$$Y_j(x,\lambda) = x^{j-1} e^{i\lambda x} + \int\limits_x^\infty K_j^+(x,t)\, e^{i\lambda t} dt\,, \ Im\lambda \geqslant 0$$

$$Y_4(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} + \int\limits_x^\infty K_4^-(x,t)\, e^{-i\lambda t}dt\,,\ Im\lambda \leqslant 0 \tag{5}$$

при этом $K_j^\pm(x,t)\,,\ j=\overline{1,4}$ удовлетворяют уравнениям

$$l\left(x, \frac{\partial}{\partial x},\ \pm i\frac{\partial}{\partial t}\right) K_j^\pm(x,t)\,dt = 0\,, \tag{6}$$

и имеет место

$$\lim_{x+t\to\infty} \frac{\partial^{\alpha+\beta}K_j^\pm(x,t)}{\partial x^\alpha \partial t^\beta} = 0\,,\ \ \alpha+\beta\leqslant 4\,,\quad \int\limits_x^\infty \left|K_j^\pm(x,t)\right|^2 dt < \infty\,, \tag{7}$$

кроме того, функции $K_j^\pm(x,t)$ и их производные удовлетворяют определенных интегральных условий на характеристике $t=x$.

В данной работе исследуется структура спектра пучка $L_\lambda^\alpha$, построится ядро её резольвенты и изучается аналитические свойства ядра.

Заметим, что для пучка $L_\lambda^\alpha$ не удается применить технику работы [5] в том отношении, что применяемый там подход предельного перехода при $b\to\infty$ для оператора $L_\lambda^\alpha$, порожденного дифференциальным выражениям (1) в конечном интервале $(0,b)$ и некоторыми регулярными распадающимися краевыми условиями на концах этого интервала. Ввиду того, что эти краевые условия являются нерегулярными в смысле работы [1] для пучка $L_{\lambda b}^\alpha$, с привлечением тонких свойств оператора $L_{\lambda b}^\alpha$ таких, как, например, поведение ядра резольвенты $(L_{\lambda b}^\alpha)^{-1}$ при $b\to\infty$ вне малой окрестности спектра, не позволительно использовать этого подхода при выводе интегрального представления резольвенты пучка $L_\lambda^\alpha$.

Сначала изучим структуру дискретного спектра пучка $L_\lambda^\alpha$. Обозначим через $D$ совокупность всех функций $Y(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$ таких, что: 1) производные $Y^{(\nu)}(x,\lambda)$ , $\nu=\overline{0,3}$ существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном интервале $[0,b],\ b>0$, при каждом $\lambda: \pm Im\lambda\geqslant 0$; 2) $l\left(x,\frac{d}{dx},\ \lambda\right)Y\in L_2(0,\infty)$. Далее, через $D_\alpha$ обозначим совокупность тех функций из $D$, для которого выполняются условия (2). Определим $L_\lambda^\alpha$ так: его область определения есть $D_\alpha$ и $L_\lambda^\alpha = l\left(x,\frac{d}{dx},\lambda\right)Y$ при $Y\in D$. Обозначим $A(\lambda)=\det\left\|U_i(Y_k)\right\|_{i,k=1}^3$ и рассмотрим верхнюю полуплоскость $\lambda: Im\lambda\geqslant 0$. В открытой её части решения $Y_k(x,\lambda)\,,\ k=\overline{1,3}$ принадлежат пространству $L_2(0,\infty)\,,$ а $Y_4(x,\lambda)\,\overline{\in}\,L_2(0,\infty)$. Если $\lambda$ находится в открытой нижней полуплоскости, ни одно из решений $Y_k(x,\lambda)\,,\ k=\overline{1,3}$ не принадлежит этому пространству, а $Y_4(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$. Тогда собственные значения пучка $L_\lambda^\alpha$ в открытой верхней полуплоскости определяются из уравнения $A(\lambda)=0$.

Собственные значения этого пучка в открытой нижней полуплоскости могут определятся одним краевым условием $U_\nu(Y_4)=0$, где $\nu$ может быть одно из чисел 1, 2, 3. А на действительной оси ни одно из решений $Y_k(x,\lambda)\,,\ k=\overline{1,4}$ не принадлежит пространству $L_2(0,\infty)\,,$ следовательно, при $Im\lambda=0$, не одно из краевых условий не входит в $D_\lambda^\alpha$. Значит, на действительной оси пучок дифференциальных операторов $L_\lambda^\alpha$ не имеет собственных значений. Действительно, если фиксируем $\lambda_0$ с $Im\lambda=0$, и, будем считать, что оно является собственным значением, тогда для решений из $Im\lambda\geqslant 0$, будем иметь $Y(x,\lambda)=\sum\limits_{k=1}^3 C_kY_k(x,\lambda)$ и $Y(x,\lambda_0)\in L_2(0,\infty)$, при этом хотя бы одно из чисел $C_k,\ k=\overline{1,3}$ должен быть отлично от нуля. Но, при $x\to\infty$ имеем

$$Y(x,\lambda_0) = \left\{C_0 + C_1x + C_2x^2 + 0(1)\right\}e^{i\lambda_0 x}.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^N |Y(x,\lambda_0)|^2\,dx = \int\limits_0^N \left|C_0 + C_1x + C_2x^2 + 0(1)\right|^2 dx = C_1^2\cdot N + C_2^2\cdot\frac{N^3}{3} + C_3^2\cdot\frac{N^5}{5} + 0(1). \quad (8)$$

Если $Y(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, тогда все $C_k,\ k = 0,1,2$ должны равняться нулю, т.е. $Y(x,\lambda_0) = 0$, а это означает, что соответственно к $\lambda_0$, не существует нетривиальное решение.

Приближаясь к действительной оси из открытой нижней полуплос-кости и из условии, что $Y_4(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, $Y_k(x,\lambda) \overline{\in} L_2(0,\infty)$, $k = 1,2,3$, $Im\lambda < 0$ подобным образом проверяется, что на действительной оси не имеются собственные значения.

Теперь предположим, что $\lambda_0$ является точкой открытого верхнего и открытого нижнего полуплоскостей.

**Теорема 1.** *Для того, чтобы* $\lambda_0 : +Im\lambda > 0$ *являлась собственным значением пучка* $L_\lambda^\alpha$*необходимо и достаточно, что* $A(\lambda_0) = 0$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что число $\lambda_0$ из открытой верхней полуплоскости является собственным значением оператора $L_\lambda^\alpha$. Тогда решение уравнения (1), принадлежащее пространству $L_2(0,\infty)$ является линейной комбинацией решений $Y_k(x,\lambda_0)$, $k = 1,2,3$ :

$$Y(x,\lambda_0) = C_1Y_1(x,\lambda_0) + C_2Y_2(x,\lambda_0) + C_3Y_3(x,\lambda_0), \quad (9)$$

здесь $C_i,\ i = \overline{1,3}$ определенные коэффициенты. С другой стороны $Y(x,\lambda_0)$ как решение уравнения (1) из $L_2(0,\infty)$ должен удовлетворить краевые условия (2). Подставляя (9) в (2) получаем:

$$\sum_{k=1}^{3} C_kU_\nu(Y_k) = 0,\ \nu = 1,2,3. \quad (10)$$

Для того, чтобы (10) имело ненулевое решение относительно $C_k,\ k = \overline{1,3}$ должно быть $A(\lambda_0) = 0$.

Достаточность. Предположим, что $A(\lambda_0) = 0$. Тогда система (10) имеет нетривиальную систему решений $\{C_1,\ C_2,\ C_3\}$, причем $|C_1| + |C_2| + |C_3| \neq 0$. Разрешая систему (10), затем подставляя найденные решения в (9), находим функцию $Y(x,\lambda_0) \in D_\lambda$ для которой $l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda_0\right) Y = 0$, т. е. является собственным значением пучка $L_\alpha$. Теорема доказана.

Подобным образом получаем, что в открытой нижней полуплоскости имеются собственные значения, которые являются корнями уравнения $B(\lambda) \equiv U_v(Y_4) = 0$, где $v$ одно из чисел 1, 2, 3.

**Теорема 2.** *Оператор* $L_\lambda^\alpha$ *в открытой верхней и в открытой нижней полуплоскостях имеет собственные значения, которые являются соответственно корнями уравнения* $A(\lambda) = 0$ *и* $B(\lambda) = 0$. *Этот оператор не имеет собственных значений на действительной оси. Если числа* $\lambda_0$ *и* $\lambda_1$ *с* $Im\lambda_0 = 0$ *и* $Im\lambda_1 = 0$ *соответственно, являются корнями уравнения* $A(\lambda) = 0$ *и* $B(\lambda) = 0$,*тогда эти числа являются спектральными особенностями пучка* $L_\lambda^\alpha$.

Предположим, что $\lambda_\mu$ является собственным значением пучка $L_\lambda^\alpha$. Тогда соответствующая собственная функция определяется из формулы $Y_\mu(x) = \sum\limits_{k=1}^{3} C_kY_k(x,\lambda_\mu)$. Положим $C_3 = 1$. Тогда из краевых условий (2) находим:

$$\sum_{k=1}^{2} C_kU_\nu(Y_k) + U_\nu(Y_3) = 0,\ \ \nu = \overline{1,2,3}. \quad (11)$$

Ввиду того, что мы ищем ненулевые решения, ранг этой системы должен меньше 3. Пусть $ranq = 2$. Тогда при условии, что

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(Y_1) & U_1(Y_2) \\ U_2(Y_1) & U_2(Y_2) \end{vmatrix} \neq 0,$$

можно из системы

$$\begin{cases} C_1 U_1(Y_1) + C_1 U_1(Y_2) = -U_1(Y_3) \\ C_1 U_2(Y_1) + C_2 U_2(Y_2) = -U_2(Y_3) \end{cases} \tag{12}$$

определить $C_i,\ i = \overline{1,2}$. Для них $C_i = -\frac{\Delta_i(\lambda)}{\Delta_0(\lambda)},\ i = \overline{1,2}$. Здесь $\Delta_i(\lambda)$ получается из $\Delta_0(\lambda)$ заменой элементов столбца с номером $i$ на элементы $\{-U_1(Y_3),\, -U_2(Y_3)\}'$.

Таким образом, собственная функция, отвечающая собственному значению $\lambda_\mu$ выражается формулой

$$Y_\mu(x) = -\sum_{i=1}^{2} \frac{\Delta_i}{\Delta_0} Y_i\left(x,\, \lambda_\mu\right) + Y_3\left(x,\, \lambda_\mu\right). \tag{13}$$

Непосредственным вычислением с использованием формулы Лейбница для дифференцирования производных, из формул (5) перенумерацией $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4$, на $Y_0^+, Y_1^+, Y_2^+, Y_0^-$, получаем

$$\left(Y_j^{\pm}(x,\lambda)\right)^{(k)} = e^{\pm i\lambda x} \sum_{v=0}^{k} (\pm i)^v \lambda^v C_k^v \left(x^j\right)^{(k-v)} + e^{\pm i\lambda x} \sum_{\mu=0}^{k} \lambda^v g^{\pm}_{\mu,k,j}(x) + \int_x^{\infty} \frac{\partial^k K_j^{\pm}(x,t)}{\partial x^k} e^{\pm i\lambda t} dt\,, \tag{14}$$

где

$$g^{\pm}_{kk0} = 0,\ g^{\pm}_{0,1,j} = -K_j^{\pm}(x,x)\,,\ g^{\pm}_{1,2,j} = \mp K_j^{\pm}(x,x)\,,$$

$$K_j^{\pm}(x,x) = \pm\frac{1}{8i}\int_x^{\infty} \xi^j p(\xi)(\xi - x)\, d\xi + \frac{1}{8}\int_x^{\infty} \xi^j r(\xi)\,[i-\xi] d\xi,$$

$$\frac{d}{dx} K_j^{\pm}(x,x) = \mp\frac{1}{8i}\int_x^{\infty} \xi^j p(\xi)\, d\xi - \frac{1}{8}(i-x)\, x^j r(x),$$

$$g^{\pm}_{02j}(x) = -\frac{d}{dx} K_j^{\pm}(x,x) - \left.\frac{\partial K_j^{\pm}(x,t)}{\partial x}\right|_{t=x},$$

$$g^{\pm}_{2\,3j}(x) = \pm i g^{\pm}_{1\,2j}(x)\,, \qquad g^{\pm}_{1\,3j}(x) = g^{\pm}_{1\,2j}(x)' \pm i g^{\pm}_{0\,2j}(x)\,.$$

Используя оценки $\left.\frac{\partial^k K_j^{\pm}(0,t)}{\partial x^k}\right|_{x=0},\ k = \overline{0,1,2,3}$ из [11], подставляя (14) в (2), убеждаемся, что функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ соответственно, являются регулярными функциями в верхней и нижней полуплоскостях, следовательно, нули этих функций образуют конечное или счетное множество.

**Теорема 3.** *Операторный пучок $L_\lambda^\alpha$ может иметь лишь конечное или счетное число собственных значений, образующих ограниченное множество в комплексной $\lambda$ — плоскости с разрезом вдоль вещественной оси. Предельные точки этого множества могут находится только на вещественной оси.*

Теперь построим явный вид резольвенты $R_\lambda^{(\pm)\alpha}$ дифференциального пучка $L_\lambda^{(\pm)\alpha}$ в каждой полуплоскости $\pm Im\lambda > 0$ в отдельности.

Предположим, что область определения резольвенты $R_\lambda^{(\pm)\alpha}$ содержит функции $f(x)$, равные нулю вне произвольного конечного интервала $[0,a]$. Положим $R_\lambda^{+\alpha} f = Y$, т. е. $L_\lambda^Y = f$. Это означает, что $Y(x,\lambda)$ есть решение уравнения

$$l\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right) Y = f \tag{15}$$

для любой функции $f(x) \in L_2(0,\infty)$. Это решение принадлежит $L_2(0,\infty)$ и удовлетворяет краевым условиям (2).

Имея фундаментальные системы решений $Y_i(x,\lambda)$, $k = \overline{1,4}$ однородного дифференциального уравнения (1), методом вариации произвольных постоянных находим общее решение неоднородного дифференциального уравнения (15). Общее решение ищем в виде

$$Y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{4} C_i Y_i(x,\lambda). \tag{16}$$

Согласно этому методу, предположим, что $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$ являются функциями от $x$. Вычисляя все производные до 4–го порядка включительно, выражения (16) и подчиняя дополнительным условиям, получаем некоторую систему уравнений относительно $C_i'(x)$, $i = \overline{1,4}$. Решая полученные системы, относительно $C_i'(x)$ имеем

$$C_i'(x) = Z_{5-i}^{+}(x,\lambda) f(x), \tag{17}$$

где

$$Z_{5-i}^{+}(x,\lambda) = \frac{W_i(x,\lambda)}{W(x,\lambda)}, \quad i = 1,2,3,4 \tag{18}$$

Здесь $W(x,\lambda)$ определитель Вронского от $Y_1(x,\lambda)$, $Y_2(x,\lambda)$, $Y_3(x,\lambda)$, $Y_4(x,\lambda)$, а $W_i(x,\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента $Y_i^{(3)}(x,\lambda)$ в вронскиане $W(x,\lambda)$. Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что функции $Z_i^{+}(x,\lambda)$, $i = \overline{1,4}$ являются решениями уравнения $l^*\left(x, \frac{d}{dx}, \lambda\right) Z = 0$, транспонированную к уравнению (1). Из (17) получаем

$$C_i(x) = C_i + \int_0^x Z_{5-i}^{+}(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi \tag{19}$$

Подставляя (19) в (16), имеем

$$Y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{4} \left[ C_i + \int_0^x Z_{5-i}^{+}(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_i(x,\lambda). \tag{20}$$

В открытой верхней полуплоскости $Y_i(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, $i = 1,2,3$; $Y_4(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, $Z_1^{+}(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$, $Z_i^{+}(x,\lambda) \overline{\in} L_2(0,\infty)$, $i = 2,3,4$. Поэтому $Y(x,\lambda) \in L_2(0,\infty)$ возможно лишь тогда, когда сумма коэффициентов при $Y_4(x,\lambda)$ равна нулю, т.е. когда $C_4 = -\int_0^a Z_1^{+}(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi$. Подобнее равенство можно также записать в виде $C_4 = -\int_0^\infty Z_1^{+}(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi$, ибо $f(x) = 0$ при $x > a$. С учетом этого, выражение (20) имеет вид

$$Y(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{3} \left[ C_i + \int_0^x Z_{5-i}^{+}(\xi,\lambda) f(\xi) d\xi \right] Y_i(x,\lambda) - \int_x^\infty Z_1^{+}(\xi,\lambda) f(\xi)\, d\xi \cdot Y_4(x,\lambda). \tag{21}$$

Отсюда

$$Y^{(\nu)}(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\left[C_i+\int\limits_0^x Z_{5-i}^{+}(\xi,\lambda)\,f(\xi)d\xi\right]Y_i^{(\nu)}(x,\lambda)-\int\limits_x^\infty Z_1^{+}(\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi\cdot Y_4(x,\lambda)\,.$$

Поскольку из определения функции $Z_i^{+}(x,\lambda)\,,\quad i=\overline{1,4}$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{4}Y_i^{(k)}(x,\lambda)\cdot Z_{5-i}^{+}(x,\lambda)=0,\quad k=0,1,2.$$

С помощью граничных условий имеем:

$$U_\nu(Y)=\sum_{i=1}^{3}C_iU_\nu(Y_i)-\left[\int\limits_0^\infty Z_1^{+}(\xi,\lambda)\,f(\xi)d\xi\right]U_\nu(Y_4)=0,$$

т. е. $\sum\limits_{i=1}^{3}C_iU_\nu(Y_i)=\int\limits_0^\infty Z_1^{+}(\xi,\lambda)\,f(\xi)d\xi U_\nu(Y_4)\,.$

Решая эту систему уравнений относительно $C_i,\quad i=\overline{1,3}$, получим

$$C_i=\frac{A_i(\lambda)}{A(\lambda)}\int\limits_0^\infty Z_1^{+}(\xi,\lambda)\,f(\xi)d\xi\,, \tag{22}$$

где $A(\lambda)=\det\left|U_\nu(Y_k)\right|_{\nu,k=1}^{3}\neq 0\,,$ $A_i(\lambda)$ определитель, полученный из $A_3(\lambda)$ заменой $U_\nu(Y_i)$ на $U_\nu(Y_4)\,.$

Обозначая через

$$h_i^{+}(x,\lambda)=\frac{A_i(\lambda)}{A(\lambda)}Z_1^{+}(x,\lambda)\,,\ \ i=\overline{1,3} \tag{23}$$

можем записать:

$$C_i=\int\limits_0^\infty h_i^{+}(\xi,\lambda)\,f(\xi)d\xi\,,\,i=1,2,3\,. \tag{24}$$

Подставляя эти значения в (21) имеем:

$$\begin{aligned}Y(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\left[\int\limits_0^x\left(h_i^{+}(\xi,\lambda)+Z_{5-i}^{+}(\xi,\lambda)\right)f(\xi)d\xi\right]Y_i(x,\lambda)+\\+\left[\sum_{i=1}^{3}\int\limits_x^\infty h_i^{+}(\xi,\lambda)\,f(\xi)d\xi\right]Y_i(x,\lambda)-\int\limits_x^\infty Z_1^{+}(\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi\cdot Y_4(x,\lambda)\,.\end{aligned}$$

Обозначая через $K^{+}(x,t,\lambda)$ ядро резольвенты $R_\lambda^{+\alpha}$ в верхней полуплоскости

$$K^{+}(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3}\left[h_i^{+}(\xi,\lambda)+Z_{5-i}^{+}(\xi,\lambda)\right]Y_i(x,\lambda)\,, & \text{при }\ \xi<x\\ \sum\limits_{i=1}^{3}h_i^{+}(\xi,\lambda)\,Y_i(x,\lambda)-Z_1^{+}(\xi,\lambda)\,Y_4(x,\lambda)\,, & \text{при }\ \xi>x\,,\end{cases} \tag{25}$$

и введя переобозначения $Z^+_{5-i}(\xi,\lambda)=\omega^+_i(\xi,\lambda)$, $i=\overline{1,4}$, имеем

$$K^+(x,\xi,\lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{3}\left[h^+_i(\xi,\lambda)+\omega^+_i(\xi,\lambda)\right]Y^+_{i-1}(x,\lambda), & \text{при } \xi<x\\ \sum\limits_{i=1}^{3}h^+_i(\xi,\lambda)Y^+_{i-1}(x,\lambda)-\omega^+_4(\xi,\lambda)Y^-_0(x,\lambda), & \text{при } \xi>x,\end{cases} \tag{26}$$

где $h^+_i(x,\lambda)=\frac{A_i(\lambda)}{A}(\lambda)\cdot\omega^+_4(\xi,\lambda)$.

Из последнего выражения можем написать

$$Y(x,\lambda)=R^{+\alpha}_\lambda f=\int\limits_0^\infty K^+(x,\xi,\lambda)f(\xi)\,d\xi\,. \tag{27}$$

Теперь рассмотрим открытую нижнюю полуплоскость. В этой полуплоскости $Y^-_0(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$, а $Y^+_0\ Y^+_1$, $Y^+_2$, не принадлежать пространству $L_2(0,\infty)$. А для решений сопряженного уравнения $Z^-_i(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$, $i=\overline{1,3}$; $Z^-_4(x,\lambda)\,\overline{\in}\,L_2(0,\infty)$. В этом случае, перенумеруя $Y^-_0$, $Y^+_0\ Y^+_1$, $Y^+_2$ соответственно через $Y_1$, $Y_2$, $Y_4$, $Y_4$ имеем, что $Y_1(x,\lambda)\in L_2(0,\infty)$, $Y_i(x,\lambda)\,\overline{\in}\,L_2(0,\infty)$. Тогда функция $Y(x,\lambda)$, выраженная в виде

$$Y(x,\lambda)=\sum_{i=1}^{4}\left[C_i+\int\limits_0^x Z^-_{5-i}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_i(x,\lambda), \tag{28}$$

принадлежит $L_2(0,\infty)$ тогда и только тогда, когда сумма коэффициентов функций $Y_i(x,\lambda)$, $i=2,3,4$ равен нулю, т. е.

$$C_i=-\int\limits_0^\infty Z^-_{5-i}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi,\ \ i=2,3,4 \tag{29}$$

где $f(x)=0$ при $x\geqslant a$.

С учетом (29), выражение (28) имеет вид

$$Y(x,\lambda)=\left[C_1+\int\limits_0^x Z^-_4(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_1(x,\lambda)-\sum_{i=2}^{4}\left[\int\limits_0^x Z^-_{5-1}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y_i(x,\lambda)\,. \tag{30}$$

Отсюда

$$Y^{(k)}(x,\lambda)=\left[C_1+\int\limits_0^x Z^-_4(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y^{(k)}_1(x,\lambda)-\sum_{i=2}^{4}\left[\int\limits_x^\infty Z^-_{5-i}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]Y^{(k)}_i(x,\lambda)\,.$$

Учитывая, что

$$\sum_{i=1}^{4}Y^{(k)}_i(x,\lambda)\cdot Z^-_{5-i}(\xi,\lambda)=0,\ \ k=0,1,2,$$

для фиксированного граничного условия имеем

$$U_\nu(Y)=C_1U_\nu(Y_1)-\sum_{i=2}^{4}\left[\int\limits_0^\infty Z^-_{5-i}(\xi,\lambda)f(\xi)d\xi\right]U_\nu(Y_i)=0,\quad \nu\text{ — фиксировано.}$$

Отсюда

$$C_1 = \frac{1}{U_\nu (Y_1)} \cdot \sum_{i=2}^{4} \left[ \int\limits_0^\infty Z_{5-i}^- (\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] \cdot U_\nu (Y_i).$$

Обозначая

$$h^- (x, \lambda) = \frac{1}{U_\nu (Y_1)} \cdot \sum_{i=2}^{4} U_\nu (Y_i) Z_{5-i}^- (x, \lambda) \tag{31}$$

можем написать

$$C_1 = \int\limits_0^\infty h^- (\xi, \lambda) f(\xi) d\xi. \tag{32}$$

Подставляя это значение в (30) получаем:

$$\begin{gathered} Y (x, \lambda) = \left[ \int\limits_0^x \left[ h^- (\xi, \lambda) + Z_4^- (\xi, \lambda) \right] f(\xi) d\xi \right] \cdot Y_1 (x, \lambda) + \\ + \left[ \int\limits_x^\infty h^- (\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] \cdot Y_1 (x, \lambda) - \sum_{i=2}^{4} \left[ \int\limits_x^\infty Z_{5-i}^- (\xi, \lambda) f(\xi) d\xi \right] \cdot Y_i (x, \lambda) . \end{gathered} \tag{33}$$

Обозначая через $K^- (x, \xi, \lambda)$ выражению:

$$K^- (x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \left[ h^- (\xi, \lambda) + Z_4^- (\xi, \lambda) \right] Y_1 (x, \lambda) , & \text{при } \xi < x \\ h^- (\xi, \lambda) Y_1 (x, \lambda) - \sum\limits_{i=2}^{4} Z_{5-i}^- (\xi, \lambda) Y_i (x, \lambda) , & \text{при } \xi > x , \end{cases} \tag{34}$$

и снова введя обозначения $Z_{5-i}^- (\xi, \lambda) = \omega_i^- (\xi, \lambda)$, $i = \overline{1,4}$ получаем:

$$K^- (x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \left[ h^- (\xi, \lambda) + \omega_1^- (\xi, \lambda) \right] Y_0^- (x, \lambda) , & \text{при } \xi < x , \\ h^- (\xi, \lambda) Y_0^- (x, \lambda) - \sum\limits_{i=2}^{4} \omega_i^- (\xi, \lambda) Y_{i-2}^+ (x, \lambda) , & \text{при } \xi > x, \end{cases} \tag{35}$$

где $h^- (x, \lambda) = \frac{1}{U_\nu \left(Y_0^-\right)} \sum\limits_{i=2}^{4} U_\nu \left(Y_{i-2}^+\right) \cdot \omega_i^- (\xi, \lambda)$.

Введенное обозначение удобна для записи ядра в компактном виде и мы имеем следующее представление:

$$Y (x, \lambda) = \int\limits_0^\infty K^- (x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi. \tag{36}$$

**Теорема 4.** *Для всех значений спектрального параметра $\lambda$ из открытой верхней и открытой нижней полуплоскостей, не являющихся корнями уравнения $A(\lambda) = 0$ и $B(\lambda) = 0$, резольвента оператора $L_\lambda^\alpha$ определена на всей пространстве $L_2 (0, \infty)$, в нём является ограниченным интегральным оператором, с ядрами типа Карлемана. При приближении $\lambda$ к действительной оси норма резольвенты неограниченно возрастает и вся действительная ось принадлежит непрерывному спектру пучка $L_\lambda^\alpha$.*

Доказательство. В представлениях (25) и (34) ядра резольвенты, в верхней полуплоскости $Y_j (x, \lambda) \in L_2 (0, \infty)$, $j = \overline{1,3}$; $Y_4 (x, \lambda) \overline{\in} L_2 (0, \infty)$; $Z_1^+ (x, \lambda) \in L_2 (0, \infty)$, $Z_j^+ (x, \lambda) \overline{\in} L_2 (0, \infty)$, $j = \overline{1,3}$, а в нижней полуплоскости $Y_j (x, \lambda) \overline{\in} L_2 (0, \infty)$, $j = \overline{1,3}; Y_4 (x, \lambda) \in L_2 (0, \infty); Z_1^- (x, \lambda) \overline{\in} L_2 (0, \infty)$, $Z_j^- (x, \lambda) \in L_2 (0, \infty)$, $j = \overline{1,3}$. Учитывая, что $x^j \xi^j e^{i\lambda(x-\xi)}$, $x^j \xi^j e^{-i\lambda(x-\xi)}$ являются доминантными членами в соответствующих выражениях, с привлечением неравенства $\left|\sum\limits_{\alpha=1}^{k} x_\alpha\right|^2 \leqslant k\sum\limits_{\alpha=1}^{k} |x_\alpha|^2$ получается оценка

$$\int\limits_0^\infty \left|\int\limits_0^\infty K(x,\xi,\lambda) f(\xi) d\xi\right|^2 dx < const \cdot \int\limits_0^\infty |f(\xi)|^2 d\xi,$$

где

$$K(x,\xi,\lambda) = \begin{cases} K^+(x,\xi,\lambda), & \text{при } \ Im\lambda > 0 \\ K^-(x,\xi,\lambda), & \text{при } \ Im\lambda < 0. \end{cases}$$

А это означает, что $K(x,\xi,\lambda)$ является ограниченным интегральным оператором на всем пространстве $L_2(0,\infty)$. Ввиду того, что ядро является ядром Гильберта-Шмидта, оно порождает вполне непрерывный оператор.

Оценки $\int\limits_0^\infty |K(x,\xi,\lambda)|^2 dx < +\infty$, $\int\limits_0^\infty |K(x,\xi,\lambda)|^2 d\xi < \infty$, типа Карлемана, получаются из асимптотических разложений функций $Y_i(x,\lambda)$, $Z_i(x,\lambda)$, $j=\overline{1,4}$; из представлений (25) и (34).

Теперь возьмем $a>0$ так, что при $x \geqslant a > 0$ выполнялось неравенство $0(1) < \frac{1}{2}$.

Из оценки

$$\int\limits_0^\infty |Y_k(x,\lambda)|^2 dx = \int\limits_a^\infty \left|x^{2(x-1)} e^{2i\lambda x}\left[1+0(1)\right]^2\right| dx = \int\limits_a^\infty x^{2(x-1)} e^{-2Im\lambda x}\left[1+0(1)\right]^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\int\limits_a^\infty x^{2(x-1)} e^{-Im\lambda x} dx, \ \ k=\overline{1,4}$$

частично интегрируя правую часть, имеем следующую оценку

$$\|R_\lambda^\alpha f\|^2 = \int\limits_0^\infty |R_\lambda^\alpha f|^2 dx \geqslant C_\lambda^\pm \cdot \|f\|^2,$$

где $C_\lambda^\pm$ является многочленом третьей степени относительно $\frac{1}{Im\lambda}$.

Из этой формулы вытекает, что при приближении $\lambda$ к действительной оси норма резольвенты неограниченно растет. Теперь покажем, что при $\lambda \in (-\infty;\infty)$ область определения оператора $R_\lambda^\alpha$ плотна в $L_2(0,\infty)$, т. е. область значений $L_\lambda^\alpha$ является плотной в $L_2(0;\infty)$. Предположим противное. Тогда в $L_2(0;\infty)$, существует отличная от нуля функция $f(x)$, что равенство $(L_\lambda^\alpha Y, f) = 0$ (т.е. $(f, L_\lambda^{*\alpha} f) = 0$) должно выполнятся для всех $Y(x,\lambda) \in D(L_\lambda^\alpha)$. А это означает, что $L_\lambda^{*\alpha} f$, т.е. $\bar{\lambda}$ является собственным оператора $(L_\lambda^\alpha)^*$. Но, тогда $\lambda$ стала бы собственным значением оператора $L_\lambda^\alpha$. Получили противоречие. Поэтому, предположение $f \neq 0$ не имеет место.

Таким образом, вся действительная ось принадлежит непрерывному спектру оператора $L_\lambda^\alpha$. Если $A(\lambda) = 0$, $B(\lambda) = 0$ имеют действительные корни, тогда эти числа являются спектральными особенностями пучка $L_\lambda^\alpha$. Теорема доказана.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оруджев, Э. Г. Прямые спектральные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка, полиноминально зависящего от спектрального параметра / Э. Г. Оруджев // Доклады АН Азербайджана. — 1998. — Т. LIV, № 1. — С. 9–15.

2. Вагабов, А. И. Квадратичные пучки обыкновенных дифференциальных операторов / А. И. Вагабов // Математические заметки. — 1987. — Т. 42, № 3. — С. 381–393.

3. Богомолова, Е. П. О базисных свойствах системы собственных функций краевой задачи с кратным корнем характеристического многочлена / Е. П. Богомолова, А. С. Печенцов // Вестник московского университета. Сер. 1 : Математика. Механика. — 1989. — № 4. — С. 17–22.

4. Гасымов, М. Г. Исследование одного класса операторных пучков четного порядка / М. Г. Гасымов, А. М. Магеррамов // ДАН СССР. — 1982. — Т. 265, № 2. — С. 277–280.

5. Фунтаков, В. Н. О разложении по собственным функциям несамосопряженно дифференциального пучка произвольного порядка на полуоси $[0;\infty)$. I-II / В. Н. Фунтаков // I-II Известия АН Азерб. ССР. сер. физ.–матем. и техн. наук. — I : 1960. — № 6. — С. 3–19, II : 1961. — № 1. — С. 3–21.

6. Максудов, Ф. Г. Спектральный анализ пучков дифференциальных операторов специального вида / Ф. Г. Максудов, А. М. Магеррамов, М. З. Мамедов // ДАН СССР. — 1990. — Т. 310, № 1. — С. 24–28.

7. Оруджев, Э. Г. Спектральный анализ дифференциальных операторов с кратными характеристиками на полуоси / Э. Г. Оруджев // Успехи математических наук. — 1999. — Т. 54, № 2(326). — С. 181–182.

8. Оруджев, Э. Г. Резольвента и спектр одного класса несамосопряженных дифференциальных операторов с кратными характеристиками / Э. Г. Оруджев // Труды Института матем. и мех. АН Азербайджана. — 1997. — Т. VI(XII). — С. 148–160.

9. Мирзоев, С. С. Спектральный анализ одного дифференциального пучка четвертого порядка на всей оси / С. С. Мирзоев, Э. Г. Оруджев, А. Р. Алиев // Доклады РАН. — 2012. — Т. 442, № 3. — С. 312–314.

10. Aliyev, S. A. On the existence of transformation operator for a fourth order differential equation with triple characteristics / S. A. Aliyev // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan. — 2013. — V. XXXIX. — P. 3–8.

11. Orudzhev, E. G. Construction of a kernel of the transformation operator for a fourth order differential bundle with multiple charac-teristics / E. G. Orudzhev, S. A. Aliyev // Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan. — 2014. — V. 40, special iss. — P. 351–358.

## REFERENCES

1. Orudzhev E.G. Direct spectral problems for an ordinary differential equation of the 4th order polynomially depending on the spectral parameter. [Orudzhev E.G. Pryamye spektral'nye zadachi dlya obyknovennogo differencial'nogo uravneniya 4-go poryadka, polinominal'no zavisyashhego ot spektral'nogo parametra]. *Doklady AN Azerbayjdzhana – Reports of the Academy of Sciences of Azerbaijan*, 1998, vol. LIV, no. 1, pp. 9–15.

2. Vagabov A.I. Quadratic pencils of ordinary differential operators. [Vagabov A.I. Kvadratichnye puchki obyknovennyx differencial'nyx operatorov]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1987, vol. 42, no. 3, p. 381–393.

3. Bogomolova E.P., Pechentsov A.S. On basic properties of a system of eigenfunctions of a boundary value problem with a multiple root of the characteristic polynomial. [Bogomolova E.P., Pechencov A.S. O bazisnyx svoyjstvax sistemy sobstvennyx funkciyj kraevoyj zadachi s kratnym kornem xarakteristicheskogo mnogochlena]. *Vestnik Moskovskogo universiteta, seriya 1, matematika, mexanika – Moscow University Bulletin, Series 1, Mathematics, Mechanics*, 1989, no. 4, pp. 17–22.

4. Gasimov M.G., Maharramov A.M. Investigation of one class of operator pencils of even order. [Gasymov M.G., Magerramov A.M. Issledovanie odnogo klassa operatornyx puchkov chetnogo poryadka]. *DAN SSSR – DAN USSR*, 1982, vol. 265, no. 2, pp. 277–280.

5. Funtakov V.N. Expansion in eigenfunctions of a non-self-adjoint differential pencil of arbitrary order on the semiaxis $[0;\infty)$. I–II. [Funtakov V.N. O razlozhenii po sobstvennym funkciyam

nesamosopryazhenno differencial'nogo puchka proizvol'nogo poryadka na poluosi $[0;\infty)$. I–II]. *Izvestiya AN Azerbayjdzhanskoyj SSR, seriya fiziko-matematematicheskix i texnicheskix nauk — Izvestia of the Academy of Sciences of the Azerbaijan SSR, series of physical, mathematical and technical sciences*, I: 1960, no. 6, pp. 3–19, II: 1961, no. 1, pp. 3–21.

6. Maksudov F.G., Magerramov A.M., Mamedov M.Z. Spectral analysis of beams of differential operators of a special form. [Maksudov F.G., Magerramov A.M., Mamedov M.Z. Spektral'nyyj analiz puchkov differencial'nyx operatorov special'nogo vida]. *DAN SSSR — DAN USSR*, 1990, vol. 310, no. 1, pp. 24–28.

7. Orudzhev E.G. Spectral analysis of differential operators with multiple characteristics on the semiaxis. [Orudzhev E.G. Spektral'nyyj analiz differencial'nyx operatorov s kratnymi xarakteristikami na poluosi]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1999, vol. 54, no. 2(326), pp. 181–182.

8. Orudzhev E.G. Resolvent and spectrum of one class of non-self-adjoint differential operators with multiple characteristics. [Orudzhev E.G. Rezol'venta i spektr odnogo klassa nesamosopryazhennyx differencial'nyx operatorov s kratnymi xarakteristikami]. *Trudy Instituta matematiki i mexaniki AN Azerbayjdzhana — Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics of the Academy of Sciences of Azerbaijan*, 1997, vol. VI(XII), pp. 148–160.

9. Mirzoev S.S., Orudzhev E.G., Aliev A.R. Spectral analysis of a single fourth-order differential beam on the entire axis. [Mirzoev S.S., Orudzhev E.G., Aliev A.R. Spektral'nyyj analiz odnogo differencial'nogo puchka chetvertogo poryadka na vseyj osi]. *Doklady RAN — RAS reports*, 2012, vol. 442, no. 3, pp. 312–314.

10. Aliyev S.A. On the existence of transformation operator for a fourth order differential equation with triple characteristics. Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 2013, vol. XXXIX, pp. 3–8.

11. Orudzhev E.G., Aliyev S.A. Construction of a kernel of the transformation operator for a fourth order differential bundle with multiple charac-teristics. Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, National Academy of Sciences of Azerbaijan, 2014, vol. 40, special iss., 2014, pp. 351–358.

*Оруджев Э. Г., Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математической экономики Бакинского государственного университета, Баку, Азербайджанская Республика*
*E-mail: elsharorucov63@mail.ru*

*Orudzhev E. G., Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Head of the Department of Mathematical Economics of Baku State University, Baku, Republic of Azerbaijan*
*E-mail: elsharorucov63@mail.ru*

*Алиев С. А., Нахичеванский институт учителей, кафедра "Высшей математики и информатики", старший преподаватель, Нахичевань, Азербайджан*
*E-mail: sahil.liyev83@mail.ru*

*Aliev S.A., Nakhichevan Institute of Teachers, Department of Higher Mathematics and Informatics, Senior Lecturer, Nakhichevan, Azerbaijan*
*E-mail: sahil.liyev83@mail.ru*