УДК 517.927.2

ЗАДАЧА О ДЕФОРМАЦИЯХ РАЗРЫВНОЙ СТИЛТЬЕСОВСКОЙ СТРУНЫ С НЕЛИНЕЙНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ*

М. Б. Зверева[1], М. И. Каменский[1], С. А. Шабров[1], Рено де Фитт Поль[2]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Руанский университет*

Поступила в редакцию 29.04.2020 г.

Аннотация. В настоящей работе вариационными методами изучается задача о деформациях разрывной стилтьесовской струны (цепочки из струн, скрепленных между собой пружинами), расположенной вдоль отрезка $[0, l]$. Соответствующая математическая модель описывается интегро-дифференциальным уравнением

$$-\left(pu'_\mu\right)(x) + \left(pu'_\mu\right)(0) + \int\limits_0^x u\,d[Q] = F(x) - F(0),$$

где $\mu = \mu(x)$ — заданная строго возрастающая на $[0, l]$ функция; u'_μ – производная по мере, порождаемой функцией $\mu(x)$; интеграл $\int\limits_0^x ud[Q]$ понимается в обобщенном смысле по Стилтьесу. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о таком интеграле, мы заключаем функцию, стоящую под знаком дифференциала в квадратные скобки. Решения $u(x)$ принадлежат классу μ – абсолютно-непрерывных на $[0, l]$ функций, производные которых имеют ограниченную вариацию на $[0, l]$. Здесь функция $u(x)$ определяет деформацию струны, $p(x)$ характеризует упругость струны, $Q(x)$ и $F(x)$ описывают упругую реакцию внешней среды и внешнюю нагрузку соответственно. Предполагается, что одно из краевых условий является нелинейным и имеет вид $-p(l-0)u'_\mu(l-0) \in N_{[-k,k]}u(l)$, где через $N_{[-k,k]}u(l)$ обозначен нормальный конус в точке $u(l)$ к отрезку $[-k, k]$. Такое условие возникает за счет втулки, представленной отрезком $[-k, k]$, которая ограничивает движение правого конца струны. В работе доказаны необходимое и достаточное условия экстремума энергетического функционала; вычислены критические нагрузки, при которых происходит соприкосновение конца струны с втулкой; проанализирована зависимость решения от длины втулки.

Ключевые слова: функционал энергии, вариация, интеграл Стилтьеса, мера, функция ограниченной вариации, разрывная стилтьесовская струна.

THE PROBLEM OF DEFORMATIONS OF A DISCONTINUOUS STIELTJES STRING WITH A NONLINEAR BOUNDARY CONDITION

M. B. Zvereva, M. I. Kamenskii, S. A. Shabrov, P. Raynaud de Fitte

Abstract. In the present paper, variational methods are used to study the problem of deformations of a discontinuous Stieltjes string (a chain of strings held together by springs) located along the segment $[0, l]$. The model is described by the integro-differential equation

$$-\left(pu'_\mu\right)(x) + \left(pu'_\mu\right)(0) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0),$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF–2020–0009), при финансовой поддержке РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20–51–15003 НЦНИ–а.

where $\mu = \mu(x)$ is a given function strictly increasing on $[0, l]$; u'_μ is a derivative with respect to the measure generated by the function $\mu(x)$; the integral $\int\limits_0^x u d[Q]$ is understood in the generalized sense according to Stieltjes. To emphasize that we are talking about such integral, we enclose the function under the differential in square brackets. The solutions $u(x)$ belong to the class of μ - absolutely continuous on $[0, l]$ functions whose derivatives have bounded variation on $[0, l]$. Here, the function $u(x)$ determines the deformation of the string, $p(x)$ characterizes the elasticity of the string, $Q(x)$ and $F(x)$ describe the elastic response of the environment and the external load, respectively. One of the boundary conditions is nonlinear and has the form $-p(l-0)u'_\mu(l-0) \in N_{[-k,k]}u(l)$, where $N_{[-k,k]}u(l)$ is a normal cone at the point $u(l)$ to the segment $[-k, k]$. Such condition occurs due to a sleeve, represented by the segment $[-k, k]$, which limits the movement of the right end of the string. In the present paper necessary and sufficient conditions for the extremum of the energy functional are established, the critical loads at which the contact of the end of the string with the sleeve occurs are determined, the dependence of the solution on the sleeve length is studied.

Keywords: energy functional, variation, Stieltjes integral, measure, functions of bounded variation, discontinuous Stieltjes string.

1. ПРЕДИСЛОВИЕ

Дифференциальное уравнение

$$-(pu')' + qu = f \tag{1.1}$$

более двух столетий служит основой самых разнообразных моделей естествознания, поэтому изучению данного уравнения посвящено большое количество работ (см. например, [1–33] и имеющуюся в них библиографию). В настоящее время достаточно активно ведутся исследования (1.1) для случаев разнообразных импульсных возмущений (сингулярных потенциалов). Наиболее глубокие результаты по данной тематике связаны, в первую очередь, с работами А. А. Шкаликова и А. М. Савчука [24–26], [29], Б. С. Митягина и П. Джакова [4], В. А. Михайлеца [16], [17], Р. О. Гринива и Я. В. Микитюк [6].

Подход к поточечному анализу решений уравнения (1.1) в случае сильных особенностей в потенциале q, когда q может считаться обобщенной производной от функции ограниченной вариации Q, был разработан Ю. В. Покорным в [18], где в развитие идей В. Феллера и М. Г. Крейна (см. [1], [5]), уравнение (1.1) с особенностями в коэффициентах и правой части (типа δ–функции) было заменено интегро-дифференциальным уравнением

$$-(pu')(x) + (pu')(0) + \int\limits_0^x u\,dQ = F(x) - F(0).$$

В отличие от работ [4], [6], [7], [15–17], [24–26], [29], последнее уравнение имеет поточечный характер, аналогичный обыкновенному дифференциальному уравнению. Этот факт позволил разработать [20] качественные методы, направленные на анализ классических осцилляционных свойств для задачи Штурма-Лиувилля.

В настоящей работе изучается модель деформаций разрывной стилтьесовской струны, имеющая вид

$$\begin{cases} -\left(pu'_\mu\right)(x) + \left(pu'_\mu\right)(0) + \int\limits_0^x u d[Q] = F(x) - F(0), \\ u(0) = 0, \\ -p(l-0)u'_\mu(l-0) \in N_{[-k,k]}u(l), \end{cases} \tag{1.2}$$

где через $N_{[-k,k]}u(l)$ обозначен нормальный конус в точке $u(l)$ к отрезку $[-k, k]$. Нелинейное краевое условие возникает за счет втулки, представленной отрезком $[-k, k]$, которая ограничивает движение правого конца струны. В зависимости от приложенной внешней нагрузки, соответствующий конец струны либо остается свободным, либо соприкасается с граничной точкой втулки. Здесь функция $p(x)$ характеризует упругость струны, функции $Q(x)$ и $F(x)$ описывают упругую реакцию внешней среды и внешнюю нагрузку соответственно; интеграл понимается в расширенном смысле по Стильтьесу. Мы предполагаем существование строго возрастающей на $[0,l]$ функции $\mu(x)$ такой, что решения $u(x)$ уравнения из (1.2) могут считаться μ – абсолютно - непрерывными. Случай, когда $\mu(x) = x$, соответствующий непрерывным решениям (1.2), был исследован в [11].

Как и в [11], [13], [18–23] существенным для нас будет являться положение о том, что изучаемая задача имеет физическую, а точнее – вариационную природу, т. е. интересующие нас решения минимизируют некоторый энергетический функционал. Заметим, что термин «струна» имеет чисто математический характер, равно как и в более простом случае, когда при гладких $p(x), Q(x), F(x)$ и $\mu(x) = x$ исследуемое уравнение оказывается эквивалентным уравнению (1.1) при $q = Q'$ и $f = F'$. Необходимо отметить, что такое уравнение универсально в самых разнообразных задачах естествознания и техники — от уравнения Шредингера в квантовой механике до процессов в электрических цепях, акустических трубах, нейронных волокнах, разнообразных волноводах и проч. (см. [30], [33], [34]).

2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Пространство $BV[0,l]$ — множество функций, каждая из которых имеет ограниченную вариацию (конечное изменение) (см. [35–37])

$$V_0^l(u) = \sup_{0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_k \leqslant l} \sum_{i=0}^{k-1} |u(x_{i+1}) - u(x_i)|.$$

Любая функция $u(x)$ из $BV[0,l]$ допускает разложение Жордана $u = u_1 - u_2$, где u_1, u_2 — неубывающие функции.

Скачки функций из BV**.** Для любой функции $u(x)$ из $BV[0,l]$ в каждой точке $\xi \in (0,l]$ существует левый, а в каждой точке $\xi \in [0,l)$ — правый пределы, т. е. $u(\xi - 0) = \lim\limits_{x \to \xi - 0} u(x)$ и $u(\xi + 0) = \lim\limits_{x \to \xi + 0} u(x)$.

Простым скачком $u(x)$ в точке $x = \xi$ мы называем величину $\Delta u(\xi) = u(\xi + 0) - u(\xi - 0)$, полагая $u(0 - 0) = u(0)$ и $u(l + 0) = u(l)$; левым скачком $u(x)$ в точке $x = \xi$ мы называем величину $\Delta^- u(\xi) = u(\xi) - u(\xi - 0)$; правым скачком $u(x)$ в точке $x = \xi$ мы называем величину $\Delta^+ u(\xi) = u(\xi + 0) - u(\xi)$.

Всюду далее через $S(u)$ обозначается множество точек разрыва $u(x)$. Для $u \in BV[0,l]$ множество $S(u)$ не более чем счетно.

Функция скачков $u_s(x)$ для функции ограниченной вариации $u(x)$ определяется как

$$u_s(x) = \sum_{0 < \xi \leqslant x} \Delta^- u(\xi) + \sum_{0 \leqslant \xi < x} \Delta^+ u(\xi),$$

где $u_s(0) = 0$.

Всякая функция $u(x)$ из $BV[0,l]$ может быть представлена в виде

$$u(x) = u_0(x) + u_s(x),$$

где $u_0(x)$ – непрерывная функция, $u_s(x)$ — функция скачков.

μ-абсолютная непрерывность. Пусть функция $\mu(x)$ монотонно возрастает на $[0,l]$. Обозначим через μ меру Лебега-Стилтьеса [35–37], порождаемую функцией $\mu(x)$ на $[0,l]$.

Теорема Радона–Никодима [35–37] утверждает, что если заряд ν, определенный на σ–алгебре измеримых множеств Σ, абсолютно непрерывен относительно меры μ, то существует μ–интегрируемая функция f такая, что

$$\nu(A) = \int_A f(x)d\mu$$

для любого $A \in \Sigma$.

Пусть заряд ν порожден функцией $u(x)$. Тогда функция $u(x)$ является μ–абсолютно непрерывной тогда и только тогда, когда

$$u(\beta) - u(\alpha) = \int_\alpha^\beta f d\mu,$$

где интеграл понимается по Лебегу–Стилтьесу. Функция $f(x)$ называется μ производной от u по мере μ и обозначается через u'_μ.

Заметим, что μ-абсолютная непрерывная функция $u(x)$ может быть разрывной лишь в точках разрыва $\mu(x)$. Причем, во всякой точке ξ разрыва функции μ справедливо равенство $u'_\mu(\xi) = \dfrac{u(\xi+0) - u(\xi-0)}{\mu(\xi+0) - \mu(\xi-0)}$.

π**–интеграл.** Интеграл, понимаемый в обобщенном смысле по Стилтьесу (когда мера сингулярных точек «расщепляется») $\int_\alpha^\beta u\,d[v]$ впервые был введен Ю. В. Покорным в [18]. Такой интеграл мы называем π–интегралом. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о π–интеграле, мы будем заключать функцию, стоящую под знаком дифференциала, в квадратные скобки. Следуя [18], для функций ограниченной вариации $u(x)$ и $v(x)$ π–интеграл $\int_\alpha^\beta ud[v]$ может быть представлен в виде

$$\int_\alpha^\beta u\,d[v] = \int_\alpha^\beta udv_0 + \sum_{\alpha<s\leqslant\beta} u(s-0)\Delta^- v(s) + \sum_{\alpha\leqslant s<\beta} u(s+0)\Delta^+ v(s),$$

где v_0 — непрерывная часть v; интеграл $\int_\alpha^\beta u\,dv_0$ понимается в обычном смысле по Лебегу–Стилтьесу.

Если одна из функций $u(x)$ или $v(x)$ непрерывна, то π–интеграл совпадает с обычным интегралом Стилтьеса.

Если $v(x)$ и $u(x)$ — функции ограниченной вариации, то для π–интеграла $\int_\alpha^\beta u\,d[v]$ имеет место равенство

$$\int_\alpha^\beta u\,d[v] = u(\beta)v(\beta) - u(\alpha)v(\alpha) - \int_\alpha^\beta v\,du,$$

где интеграл $\int_\alpha^\beta v\,du$ понимается в обычном смысле по Лебегу–Стилтьесу.

Интегро–дифференциальное уравнение. Центральный объект настоящей работы — интегро–дифференциальное уравнение

$$-(pu'_\mu)(x) + \int\limits_0^x u\, d[Q] = F(x) - F(0) - (pu'_\mu)(0), \tag{2.1}$$

где интеграл понимается как π–интеграл. Мы предполагаем существование строго возрастающей функции $\mu(x)$, масштабирующей отрезок $[0,l]$, такой, что решения уравнения (2.1) могут считаться μ — абсолютно непрерывными. Мы предполагаем, что p, F — функции ограниченной вариации на $[0,l]$, причем $\inf\limits_{[0,l]} p > 0$. Функция $Q(x)$ не убывает на $[0,l]$. Функции μ, Q, F, p непрерывны в точках $x = 0$ и $x = l$.

Корректное распространение методов классического анализа на изучаемую нами ситуацию требует замены конфликтных точек некоторыми их расширениями (точнее — раздвижениями). Пусть $S(\mu)$ — множество точек разрыва $\mu(x)$. Отметим, что мы допускаем случай и когда $S(\mu)$ счетно, и когда $S(\mu)$ конечно. Решения $u(x)$ уравнения (2.1) будем искать в классе E μ–абсолютно непрерывных функций, производные которых u'_μ являются функциями ограниченной вариации на $[0,l]$. Тем самым всякое решение $u(x)$ уравнения (2.1) есть функция ограниченной вариации на $[0,l]$, которая может терпеть разрывы только в точках из $S(\mu)$. При этом значения $u(\xi_i)$, где $\xi_i \in S(\mu)$, не определены: в π-интеграле играют роль лишь предельные значения $u(\xi_i - 0)$, $u(\xi_i + 0)$.

Положим $J_\mu = [0,l] \backslash S(\mu)$. Введем на J_μ метрику $\rho(x,y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Метрическое пространство (J_μ, ρ), очевидно, не является полным. Обозначим через $\overline{[0,l]}_\mu$ его пополнение по метрике ρ. Заметим, что множество $\overline{[0,l]}_\mu$ вместо всякой точки разрыва ξ функции $\mu(x)$ содержит пару элементов, обозначаемых через $\xi - 0$ и $\xi + 0$. Таким образом, всякое решение уравнения (2.1) определено на $\overline{[0,l]}_\mu$.

Пусть $R_\mu = \overline{[0,l]}_\mu \bigcup S(\mu)$. Введем функцию $\sigma(x) = x + p_1 + p_2 + Q_1 + Q_2 + F_1 + F_2$, где z_1 и z_2 — возрастающие функции из жорданова представления функции ограниченной вариации $z(x) = z_1 - z_2$. При этом можно считать, что функция $\sigma(x)$ содержит лишь точки разрыва p, Q, F. Обозначим через S множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, не лежащих в $S(\mu)$. Пусть $JR_\mu = R_\mu \backslash S$. Пополним JR_μ по метрике $\rho(x,y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$, заменив всякую точку $s \in S$ парой $\{s-0, s+0\}$ и обозначим полученное множество через $\overline{[0,l]}_S$. Заметим, что множество $\overline{[0,l]}_S$ вместе со всякой точкой ξ разрыва функции $\mu(x)$ содержит пару $\{\xi - 0, \xi + 0\}$, а всякая точка $s \in S$ заменена парой $\{s-0, s+0\}$.

Из (2.1) следует, что для любой точки x, в которой все функции μ, p, Q, F непрерывны, существует производная $u'_\mu(x)$. Во всех других точках существуют левая и правая производные $u'_\mu(\xi - 0)$ и $u'_\mu(\xi + 0)$, совпадающие с односторонними пределами. Из (2.1) вытекает, что в точках разрыва ξ функции $\mu(x)$ справедливы равенства

$$-p(\xi)\frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} + p(\xi - 0)u'_\mu(\xi - 0) + u(\xi - 0)\Delta^- Q(\xi) = \Delta^- F(\xi), \tag{2.2}$$

$$p(\xi)\frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} - p(\xi + 0)u'_\mu(\xi + 0) + u(\xi + 0)\Delta^+ Q(\xi) = \Delta^+ F(\xi), \tag{2.3}$$

а в точках $s \in S$ равенство

$$-p(s+0)u'_\mu(s+0) + p(s-0)u'_\mu(s-0) + u(s)\Delta Q(s) = \Delta F(s). \tag{2.4}$$

Уравнение (2.1) напоминает по своим свойствам обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Доказательство основных фактов базируется на следующих результатах.

Теорема 2.1. (см. [19]) *Для любой точки* $x_0 \in \overline{[0,l]}_S \backslash S(\mu)$ *и любых чисел* u_0, v_0 *задача*

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + \int\limits_0^x u d[Q] = F(x) - F(0) - (pu')_\mu(0); \\ u(x_0) = u_0; \\ u'_\mu(x_0) = v_0, \end{cases} \tag{2.5}$$

имеет единственное решение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$-(pu'_\mu)(x) + \int\limits_0^x u d[Q] = -(pu'_\mu)(0). \tag{2.6}$$

Теорема 2.2. *Для любой точки* $x_0 \in \overline{[0,l]}_S \backslash S(\mu)$ *двум начальным задачам*

$$u(x_0) = 0, u'_\mu(x_0) = 1, \tag{2.7}$$

$$u(x_0) = 1, u'_\mu(x_0) = 0, \tag{2.8}$$

отвечают линейно независимые решения уравнения (2.6). Все пространство решений уравнения (2.6) исчерпывается их линейной оболочкой.

Доказательство непосредственно следует из теоремы 2.1.

Пусть функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются решениями уравнения (2.6). Определим функции $W_1(x)$ и $W_2(x)$ следующим образом:

$$W_1(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1{}'_\mu(x) & \varphi_2{}'_\mu(x) \end{vmatrix} & \text{при } x \in \overline{[0,l]}_S \backslash S(\mu); \\ \begin{vmatrix} \varphi_1(x-0) & \varphi_2(x-0) \\ \varphi_1{}'_\mu(x) & \varphi_2{}'_\mu(x) \end{vmatrix} & \text{при } x \in S(\mu), \end{cases}$$

$$W_2(x) = \begin{cases} \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1{}'_\mu(x) & \varphi_2{}'_\mu(x) \end{vmatrix} & \text{при } x \in \overline{[0,l]}_S \backslash S(\mu); \\ \begin{vmatrix} \varphi_1(x+0) & \varphi_2(x+0) \\ \varphi_1{}'_\mu(x) & \varphi_2{}'_\mu(x) \end{vmatrix} & \text{при } x \in S(\mu). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $W_1(x) \equiv W_2(x)$. Их общее значение мы назовем аналогом вронскианом, и обозначим через $W(x)$.

Непосредственным следствием теоремы 2.1 является

Теорема 2.3. *Пусть* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *произвольные решения уравнения (2.6). Тогда следующие утверждения эквивалентны :*

1) для любого x*, принадлежащего* $\overline{[0,l]}_S$*, функция* $W(x)$ *отлична от нуля;*

2) найдется точка x^* *множества* $\overline{[0,l]}_S$*, в которой* $W(x)$ *не равна нулю;*

3) функции $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ *линейно независимы.*

Лемма 2.1. *Пусть* $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2)$ *решения однородного уравнения (2.6). Тогда функция* $(pW)(x)$ *равна константе.*

Утверждение леммы следует из μ–абсолютной непрерывности $(pW)(x)$ на $\overline{[0,l]}_S$, и легко проверяемого равенства $(pW)'_\mu(x) \equiv 0$.

Пусть $u(x)$ — функция ограниченной вариации на $[0,l]$, непрерывная в точках $x = 0$ и $x = l$. Будем называть $s \in (0,l)$ нулевой точкой функции $u(x)$, если $u(s-0)u(s+0) \leqslant 0$. Заметим, что если в нулевой точке ξ функция $u(x)$ непрерывна, то $u(\xi) = 0$. Если же нулевая точка ξ является точкой разрыва u, то либо один из пределов $u(\xi - 0)$, $u(\xi + 0)$ равен нулю, либо функция $u(x)$ меняет в точке ξ знак.

Будем называть уравнение (2.6) неосциллирующим на $[0, l]$, если всякое нетривиальное решение (2.6) имеет на $[0, l]$ не более одной нулевой точки.

Согласно [19], всякое нетривиальное решение $u(x)$ уравнения (2.6) может иметь лишь конечное число нулевых точек.

Теорема 2.4. *Для неосцилляции на* $[0, l]$ *уравнения (2.6) достаточно, чтобы функция* $Q(x)$ *монотонно неубывала на* $[0, l]$.

Доказательство. Пусть $\xi_1 < \xi_2$ — две соседние нулевые точки нетривиального решения $u(x)$ уравнения (2.6). Рассмотрим случай, когда $u(\xi_1 - 0) < 0$, $u(\xi_1 + 0) > 0$, $u(\xi_2 - 0) > 0$, $u(\xi_2 + 0) < 0$. Из уравнения (2.6) следует, что

$$p(\xi_1 + 0)u'_\mu(\xi_1 + 0) = p(\xi_1)u'_\mu(\xi_1) + u(\xi_1 + 0)\Delta^+ Q(\xi_1),$$

$$p(\xi_2 - 0)u'_\mu(\xi_2 - 0) = p(\xi_2)u'_\mu(\xi_2) - u(\xi_2 - 0)\Delta^- Q(\xi_2).$$

Значит, $p(\xi_1 + 0)u'_\mu(\xi_1 + 0) > 0$, $p(\xi_2 - 0)u'_\mu(\xi_2 - 0) < 0$. С другой стороны, перепишем на $[\xi_1 + 0, \xi_2 - 0]$ уравнение (2.6) в виде

$$(pu'_\mu)(x) = \int\limits_{\xi_1+0}^{x} ud[Q] + p(\xi_1 + 0)u'_\mu(\xi_1 + 0), \tag{2.9}$$

откуда следует, что $p(\xi_2 - 0)u'_\mu(\xi_2 - 0) > 0$, приходим к противоречию. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Теорема доказана.

Нормальный конус. Пусть задано замкнутое выпуклое множество $G \subset H$, где H — гильбертово пространство. Пусть $x \in G$. Нормальным конусом в точке x ко множеству G называется множество

$$N_G(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x \rangle \leqslant 0 \quad \forall c \in G\}.$$

Заметим, что если x—внутренняя точка G, то $N_G(x) = \{0\}$. Если $G = [-k, k]$, где $k > 0$, то $N_G(k) = [0, +\infty)$, $N_G(-k) = (-\infty, 0]$.

3. ВАРИАЦИОННАЯ МОТИВАЦИЯ ПОДХОДА

Пусть вдоль отрезка $[0, l]$ оси Ox расположена разрывная стилтьесовская струна (цепочка из струн, скрепленных между собой пружинами), левый конец которой жестко закреплен. Правый конец с помощью кольца прикреплен к вертикальной спице, по которой он может скользить (без учета трения). При этом спица расположена внутри втулки, представленной отрезком $[-k, k]$, где $k > 0$. Заметим, что правый конец струны не может оказаться вне втулки.

Под воздействием внешней силы, определяемой с помощью функции ограниченной вариации $F(x)$, струна переходит из положения равновесия в положение $u(x)$. Так как левый конец струны жестко закреплен, то выполнено условие $u(0) = 0$. Условие нахождения правого конца струны внутри втулки означает, что $|u(l)| \leqslant k$. Соприкоснется или нет правый конец струны с граничными точками втулки зависит от внешней нагрузки. Заметим, что скачки функции F в точках разрыва соответствуют сосредоточенным в соответствующих точках силам.

Мы рассматриваем случай, когда функция $u(x)$ может быть разрывна в не более чем счетном множестве точек. Заметим, что во всякой точке разрыва ξ функция $u(x)$ не определена, но определены и имеют физический смысл предельные значения $u(\xi - 0)$, $u(\xi + 0)$. описывающие отклонения от положения равновесия соответствующих концов струн.

Функционал потенциальной энергии такой физической системы имеет вид (см. [18], [19])

$$\Phi(u) = \int_0^l \frac{pu_\mu'^2}{2} d\mu + \int_0^l \frac{u^2}{2} d[Q] - \int_0^l u d[F]. \tag{3.1}$$

Мы предполагаем существование строго возрастающей функции $\mu(x)$, масштабирующей отрезок $[0, l]$, такой, что функции $u(x)$ могут считаться μ–абсолютно непрерывными. Функция $p \in BV[0, l]$ характеризует натяжение струн. Мы предполагаем, что значения функции $p(x)$ в точках разрыва $\mu(x)$ совпадают с коэффициентами упругости пружин, соединяющих концы струн. Неубывающая функция $Q(x)$ определяет упругую реакцию внешней среды. В частности, мы допускаем наличие в не более чем счетном множестве точек дополнительных упругих опор (пружин). Скачки функции $Q(x)$ в точках разрыва совпадают с жесткостями соответствующих пружин. Мы предполагаем, что $\inf\limits_{[0,l]} p > 0$; функции μ, Q, F, p непрерывны в точках $x = 0$ и $x = l$.

В функционале (3.1) первый интеграл понимается по Лебегу–Стилтьесу по мере, порождаемой функцией $\mu(x)$ (мера всякой точки ξ разрыва $\mu(x)$ определяется с помощью скачка $\Delta\mu(\xi) = \mu(\xi + 0) - \mu(\xi - 0)$). Второй и третий интегралы понимаются в расширенном смысле, предложенным Ю. В. Покорным в [18], когда мера ξ всякой точки разрыва, например, функции Q «расщепляется» на левую и правую, т. е. определяется с помощью левого скачка $\Delta^- Q(\xi) = Q(\xi) - Q(\xi - 0)$ и правого скачка $\Delta^+ Q(\xi) = Q(\xi + 0) - Q(\xi)$.

Подчеркнем, что рассматриваемая здесь функция $u(x)$ — это гипотетическая (виртуальная) деформация. Будем рассматривать функционал (3.1) на множестве E μ–абсолютно непрерывных функций, таких что $u'_\mu \in BV[0, l]$, и удовлетворяющих условиям

$$u(0) = 0, \quad |u(l)| \leqslant k. \tag{3.2}$$

Согласно принципу Гамильтона–Лагранжа, реальная деформация u_0 минимизирует функционал Φ при условиях (3.2), т. е.

$$u_0 \to \min_{u(0)=0, |u(l)| \leqslant k} \Phi(u).$$

Заметим, что в силу непрерывности μ, Q, F в точках $x = 0$ и $x = l$ все интегралы в (3.1) можем рассматривать по интервалу $(0, l)$.

Рассмотрим функции $h \in E$ такие, что $h(0) = h(l) = 0$. Пусть $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$, где λ принимает вещественные значения. Заметим, что $u \in E$, $u(0) = 0$, $|u(l)| = |u_0(l)| \leqslant k$. Тогда $\Phi(u_0) \leqslant \Phi(u_0 + \lambda h)$. Зафиксировав h, рассмотрим функцию $\varphi_h(\lambda)$ вещественной переменной λ, определяемую как $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$. Тогда для всех $\lambda \in R$ верно $\varphi_h(0) \leqslant \varphi_h(\lambda)$, и по теореме Ферма $\dfrac{d}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$. Последнее равенство можно переписать как

$$\int_0^l p u'_{0\mu} h'_\mu d\mu + \int_0^l u_0 h d[Q] - \int_0^l h d[F] = 0.$$

Обозначим $g(x) = \int\limits_0^x u_0 d[Q]$. Тогда последнее равенство примет вид

$$\int_0^l (p u'_{0\mu} - g + F) dh = 0. \tag{3.3}$$

Равенство (3.3) верно для всех функций $h \in E$ таких, что $h(0) = h(l) = 0$.

Лемма 3.1 *Пусть $A(x)$ — функция ограниченной вариации на $[0, l]$, функция $\mu(x)$ строго возрастает на $[0, l]$ и непрерывна в точках $x = 0$, $x = l$. Пусть для любой $h \in E$, удовлетворяющей условиям $h(0) = h(l) = 0$,*

$$\int\limits_0^l A h'_\mu d\mu = 0. \tag{3.4}$$

Тогда $A(x)$ есть константа на $(0, l)$.

Доказательство. Так как $h(0) = h(l) = 0$, то из равенства (3.4) вытекает, что для любой константы c верно

$$\int\limits_0^l (A(x) - c) dh = 0. \tag{3.5}$$

Полагая в (3.5)

$$c = \frac{\int\limits_0^l A d\mu}{\mu(l) - \mu(0)}, \quad h(x) = \int\limits_0^x (A(t) - c)\, d\mu(t),$$

получим, что

$$\int\limits_0^l (A(x) - c)^2 d\mu = 0.$$

Откуда для почти всех x (по μ-мере) следует равенство $A(x) = c$. Так как всякая точка ξ разрыва $\mu(x)$ имеет ненулевую μ-меру, то равенство $A(\xi) = c$ для точек разрыва верно. Предположим, что $A(\xi - 0) \neq c$, и пусть, для определенности, $A(\xi - 0) > c$. Тогда найдется $\delta > 0$, что для всех $x \in (\xi - \delta, \xi)$ будет верно $A(x) > c$. Но μ-мера интервала $(\xi - \delta, \xi)$ равна $\mu(\xi - 0) - \mu(\xi - \delta + 0)$, и в силу строгого возрастания μ, отлична от нуля, что приводит к противоречию с равенством $A(x) = c$ почти всюду по μ-мере. Значит, $A(\xi - 0) = c$. Аналогично, $A(\xi + 0) = c$.

Рассмотрим теперь функцию $A(x)$ в точках непрерывности $\mu(x)$, и пусть s – произвольная из таких точек. Покажем, что если в точке s функция $A(x)$ непрерывна, то $A(s - 0) = A(s) = A(s + 0)$. Если же в точке s функция $A(x)$ терпит разрыв, то должно выполняться $A(s - 0) = A(s + 0)$. Рассмотрим сначала случай, когда функция $A(x)$ непрерывна в точке s. Предположим, что $A(s) \neq c$, и пусть, для определенности, $A(s) > c$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $A(x) > c$ для всех $x \in (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$. Но μ-мера интервала $(\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ равна $\mu(\xi + \varepsilon - 0) - \mu(\xi - \varepsilon + 0)$ и отлична от нуля. Значит, $A(s - 0) = A(s) = A(s + 0) = c$. Покажем теперь, что во всякой точке s разрыва $A(x)$ должно выполняться $A(s - 0) = A(s + 0) = c$. Так как функция $A(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, l]$, то множество ее точек разрыва не более чем счетно, причем, все точки разрыва – первого рода. Пусть, для определенности, $s > 0$. Тогда найдется последовательность точек $\{x_n\}$ такая, что x_n сходится к s слева при $n \to \infty$, и во всех точках x_n функция $A(x)$ непрерывна. Но, как было показано выше, $A(x_n) = c$. Значит, $A(s - 0) = c$. Аналогично, $A(s + 0) = c$. Лемма доказана.

Применив данную лемму к равенству (3.3) получим, что

$$(p u'_{0\mu})(x) - g(x) + F(x) = \text{const}, \tag{3.6}$$

что можно переписать как

$$-\left(p u'_{0\mu}\right)(x) + \left(p u'_{0\mu}\right)(0) + \int\limits_0^x u d[Q] = F(x) - F(0).$$

Зафиксируем теперь любое число $c \in [-k,k]$. Рассмотрим функцию $h \in E$ такую, что $h(0)=0$, $h(l)=c-u_0(l)$. Например, $h(x)=\dfrac{c-u_0(l)}{\mu(l)-\mu(0)}(\mu(x)-\mu(0))$. Пусть $u(x)=u_0(x)+\lambda h(x)$. Заметим, что $u \in E$, и $u(0)=0$. Рассмотрим условие на правом конце. Имеем

$$u(l)=u_0(l)+\lambda h(l)=u_0(l)+\lambda(c-u_0(l))=\lambda c+(1-\lambda)u_0(l).$$

Так как $c \in [-k,k]$, $u_0(l) \in [-k,k]$, отрезок $[-k,k]$ — выпуклое множество, то для всех $\lambda \in [0,1]$ имеем $u(l) \in [-k,k]$. Значит верно неравенство $\Phi(u_0) \leqslant \Phi(u_0+\lambda h)$. Зафиксировав h, введем функцию $\varphi_h(\lambda)=\Phi(u_0+\lambda h)$, где $\lambda \in [0,1]$. Имеем $\varphi_h(0) \leqslant \varphi_h(\lambda)$. Значит, для правой производной имеет место неравенство $\dfrac{d^+}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} \geqslant 0$, т. е.

$$\int_0^l (pu'_{0_\mu}(x)-\int_0^x u_0d[Q]+F)dh+h(l)\int_0^l u_0d[Q]-h(l)F(l) \geqslant 0. \tag{3.7}$$

Уравнение (3.6) в силу непрерывности Q, F в точке $x=l$ перепишем как

$$(pu_0)'_\mu(x)-\int_0^x u_0d[Q]+F(x)=p(l-0)u'_{0\mu}(l-0)-\int_0^l u_0d[Q]+F(l)$$

Подставив это представление в (3.7) получим, что $p(l-0)u'_{0\mu}(l-0)h(l) \geqslant 0$, т. е. для всех $c \in [-k,k]$, с учетом $h(l)=c-u_0(l)$, имеем $-p(l-0)u'_{0\mu}(l-0)(c-u_0(l)) \leqslant 0$, откуда следует, что

$$-p(l-0)u'_{0\mu}(l-0) \in N_{[-k,k]}(u_0(l)).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть*

$$u_0 \to \min_{u(0)=0,|u(l)|\leqslant k} \Phi(u).$$

Тогда $u_0(x)$ *является решением задачи*

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x)+(pu'_\mu)(0)+\int\limits_0^x ud[Q]=F(x)-F(0), \\ u(0)=0, \\ -p(l-0)u'_\mu(l-0) \in N_{[-k,k]}(u(l)). \end{cases} \tag{3.8}$$

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть функции $p(x)$, $Q(x)$, $F(x)$, $\mu(x)$ непрерывны в точках $x=0$ и $x=l$. Функции $p(x)$, $F(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[0,l]$, причем $\inf\limits_{[0,l]} p>0$. Функция $Q(x)$ не убывает на $[0,l]$, функция $\mu(x)$ строго возрастает на $[0,l]$. Рассмотрим задачу (3.8).

Решением задачи (3.8) назовем функцию $u \in E$, удовлетворяющую уравнению (2.1) для всех $x \in \overline{[0,l]}_S$, и удовлетворяющую краевым условиям $u(0)=0$, $-p(l-0)u'_\mu(l-0) \in N_{[-k,k]}(u(l))$.

Отметим, что мы заранее предполагаем существование строго возрастающей функции $\mu(x)$ такой, что функции $u(x)$ могут считаться μ–абсолютно непрерывными.

Теорема 4.1. *Если решение задачи (3.8) существует, то оно единственно.*

Доказательство. Пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — решения задачи (3.8). Тогда $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ является решением однородного уравнения (2.6) и удовлетворяет условию $u(0) = 0$. Предположим, что $u(x) \neq 0$. Тогда, согласно теореме 2.4, функция $u(x)$ не имеет других нулевых точек, кроме $x = 0$. Пусть $u(x) > 0$ для всех $x \in (0, l]$. Тогда $u'_\mu(0) > 0$, и из уравнения (2.6) следует, что $u'_\mu(x) > 0$. Поэтому $u'_{1\mu}(l-0) - u'_{2\mu}(l-0) > 0$. С другой стороны, так как $-p(l-0)u'_{1\mu}(l-0) \in N_{[-k,k]}(u_1(l))$, то для всех $c \in [-k, k]$ верно $-p(l-0)u'_{1\mu}(l-0)(c-u_1(l)) \leqslant 0$. Взяв $c = u_2(l)$, получим $-p(l-0)u'_{1\mu}(l-0)(u_2(l)-u_1(l)) \leqslant 0$. Поскольку $u(l) = u_1(l)-u_2(l) > 0$, то $u'_{1\mu}(l-0) \leqslant 0$. Аналогично, так как для всех $c^* \in [-k, k]$ верно $-p(l-0)u'_{2\mu}(l-0)(c^*-u_2(l)) \leqslant 0$, то при $c^* = u_1(l)$ находим $-p(l-0)u'_{2\mu}(l-0)(u_1(l)-u_2(l)) \leqslant 0$. Следовательно, $u'_{2\mu}(l-0) \geqslant 0$. Но тогда $u'_{1\mu}(l-0)-u'_{2\mu}(l-0) \leqslant 0$, что приводит к противоречию. Аналогично, случай $u(x) < 0$ не возможен. Значит, $u(x) \equiv 0$. Теорема доказана.

Теорема 4.2. *Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — решения однородного уравнения (2.6), удовлетворяющие условиям $\varphi_1(0) = 1, \varphi'_{1\mu}(l-0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0, \varphi'_{2\mu}(l-0) = 1$. Тогда, если $\left|\dfrac{\varphi_1(l)\int_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\right| < k$, то решение задачи (3.8) имеет вид*

$$u(x) = \frac{\varphi_1(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int_0^x \varphi_2(s)d[F(s)] + \frac{\varphi_2(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int_x^l \varphi_1(s)d[F(s)].$$

Если $\dfrac{\varphi_1(l)\int_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \geqslant k$, то решение задачи (3.8) имеет вид

$$u(x) = \frac{\varphi_2(x)k}{\varphi_2(l)} + \frac{\varphi_1(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int_0^x \varphi_2(s)d[F(s)] + \frac{\varphi_2(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int_x^l \varphi_1(s)d[F(s)]-$$

$$-\frac{\varphi_2(x)\varphi_1(l)}{\varphi_2(l)p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int_0^l \varphi_2(s)d[F(s)].$$

Если $\dfrac{\varphi_1(l)\int_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \leqslant -k$, то решение задачи (3.8) имеет вид

$$u(x) = \frac{-\varphi_2(x)k}{\varphi_2(l)} + \frac{\varphi_1(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int_0^x \varphi_2(s)d[F(s)] + \frac{\varphi_2(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int_x^l \varphi_1(s)d[F(s)]-$$

$$-\frac{\varphi_2(x)\varphi_1(l)}{\varphi_2(l)p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int_0^l \varphi_2(s)d[F(s)].$$

Доказательство. Заметим сначала, что задача

$$\begin{cases} -(p\varphi'_{1\mu})(x) + (p\varphi'_{1\mu})(0) + \int_0^x \varphi_1 d[Q] = 0, \\ \varphi_1(0) = 1, \\ \varphi'_{1\mu}(l-0) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

имеет единственное решение. В самом деле, $\varphi_1(x) = c_1u_1(x) + c_2u_2(x)$, где u_1 и u_2 —решения однородного уравнения (2.6), удовлетворяющие условиям $u_1(0) = 0$, $u'_{1\mu}(0) = 1$ и $u_2(0) = 1$, $u'_{2\mu}(0) = 0$. Поскольку функция $Q(x)$ не убывает на $[0,l]$, $u_1(0) = 0$, то функция $u_1(x)$ не имеет других нулевых точек. Из условия $u'_{1\mu}(0) = 1$ следует, что $u_1(x) > 0$ для всех $x \in (0,l]$. Так как

$$(pu'_{1\mu})(x) = (pu'_{1\mu})(0) + \int\limits_0^x u_1 d[Q],$$

то $u'_{1\mu}(x) > 0$. В частности, $u'_{1\mu}(l-0) > 0$. Но тогда, подставив представление для $\varphi_1(x)$ в граничные условия задачи (4.1), получим, что $c_2 = 1$, $c_1 = \dfrac{-u'_{2\mu}(l-0)}{u'_{1\mu}(l-0)}$.

Аналогично, существует решение задачи

$$\begin{cases} -(p\varphi'_{2\mu})(x) + (p\varphi'_{2\mu})(0) + \int\limits_0^x \varphi_2 d[Q] = 0, \\ \varphi_2(0) = 0, \\ \varphi'_{2\mu}(l-0) = 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Заметим, что $\varphi'_{2\mu}(0) \neq 0$. Так как иначе $\varphi_2(x) \equiv 0$, что противоречит условию $\varphi'_{2\mu}(l-0) = 1$. Покажем, что $\varphi_2(x) > 0$. Так как $\varphi_2(0) = 0$, то φ_2 других нулевых точек не имеет. Предположим, что $\varphi_2(x) < 0$ для всех $x \in (0,l]$. Тогда $\varphi'_{2\mu}(0) < 0$, и из равенства

$$(p\varphi'_{2\mu})(x) = (p\varphi'_{2\mu})(0) + \int\limits_0^x \varphi_2 d[Q]$$

следует, что $\varphi'_{2\mu}(x) < 0$, и следовательно, $\varphi'_{2\mu}(l-0) < 0$, что противоречит условию $\varphi'_{2\mu}(l-0) = 1$. Значит, $\varphi_2(x) > 0$ для всех $x \in (0,l]$, и следовательно, $\varphi'_{2\mu}(0) > 0$.

Пусть $\left| \dfrac{\varphi_1(l) \int\limits_0^l \varphi_2(s) d[F(s)]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \right| < k$. Покажем, что функция

$$u(x) = \frac{\varphi_1(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int\limits_0^x \varphi_2(s) d[F(s)] + \frac{\varphi_2(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int\limits_x^l \varphi_1(s) d[F(s)].$$

является решением задачи (3.8).

Покажем сначала, что $u \in E$. Пусть $\alpha \leqslant \beta$. Тогда из представления разности $u(\beta) - u(\alpha)$ в виде

$$u(\beta) - u(\alpha) =$$

$$= \frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \left((\varphi_1(\beta) - \varphi_1(\alpha)) \int\limits_0^\beta \varphi_2 d[F] + (\varphi_2(\beta) - \varphi_2(\alpha)) \int\limits_\beta^l \varphi_1 d[F] \right) +$$

$$+ \frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \int\limits_\alpha^\beta ((\varphi_1(\alpha) - \varphi_1(s))\varphi_2(s) + (\varphi_2(s) - \varphi_2(\alpha))\varphi_1(s)) d[F(s)]$$

следует μ-абсолютная непрерывность функции $u(x)$.

Докажем, что производная u'_μ функции $u(x)$ определяется равенством

$$u'_\mu(x) = \frac{{\varphi_1}'_\mu(x)\int\limits_0^x \varphi_2 d[F]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} + \frac{{\varphi_2}'_\mu(x)\int\limits_x^l \varphi_1 d[F]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}. \qquad (4.3)$$

Обозначим $\Delta_\varepsilon z(x) = z(x+\varepsilon) - z(x+0)$, где $\varepsilon > 0$, x–точка непрерывности $\mu(x)$. Проведем доказательство для правой производной (для левой рассуждения аналогичны). Имеем

$$\frac{\Delta_\varepsilon u}{\Delta_\varepsilon \mu} = \frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1}{\Delta_\varepsilon \mu}\int\limits_0^{x+\varepsilon} \varphi_2 d[F] + \frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\frac{\Delta_\varepsilon \varphi_2}{\Delta_\varepsilon \mu}\int\limits_{x+\varepsilon}^{l} \varphi_1 d[F] +$$

$$+\frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_{x+0}^{x+\varepsilon}\frac{\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)}{\Delta_\varepsilon \mu} d[F(s)].$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\frac{\int\limits_{x+0}^{x+\varepsilon}\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s) d[F(s)]}{\Delta_\varepsilon \mu(x)}\right) = 0. \qquad (4.4)$$

Имеем

$$\left|\frac{1}{\Delta_\varepsilon \mu(x)}\int\limits_{x+0}^{x+\varepsilon}\left(\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)\right) d[F(s)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\max\limits_{x+0\leqslant s\leqslant x+\varepsilon}|\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)|}{\Delta_\varepsilon \mu(x)} V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F).$$

Пусть τ – точка из $\overline{[0,l]}_\mu$, в которой μ -непрерывная функция $|\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(s)\varphi_1(x+0)|$ достигает максимума на компакте $[x+0, x+\varepsilon]$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{\max\limits_{x+0\leqslant s\leqslant x+\varepsilon}|\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)|}{\Delta_\varepsilon \mu(x)} \leqslant$$

$$\leqslant |\varphi_2(\tau)|\left|\frac{\varphi_1(x+0) - \varphi_1(\tau)}{\Delta_\varepsilon \mu(x)}\right| + |\varphi_1(\tau)|\left|\frac{\varphi_2(x+0) - \varphi_2(\tau)}{\Delta_\varepsilon \mu(x)}\right|,$$

из которого следует ограниченность отношения

$$\frac{\max\limits_{x+0\leqslant s\leqslant x+\varepsilon}|\varphi_1(x+0)\varphi_2(s) - \varphi_2(x+0)\varphi_1(s)|}{\Delta_\varepsilon \mu(x)} \quad \text{при} \quad \varepsilon > 0.$$

Учитывая, что $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F) \to 0$ при $\varepsilon \to 0^+$, равенство (4.4) доказано, что доказывает справедливость равенства (4.3).

Покажем справедливость равенства (4.3) в точке ξ разрыва функции $\mu(x)$. Имеем

$$u'_\mu(\xi) = \frac{\Delta u(\xi)}{\Delta \mu(\xi)} = \frac{1}{\Delta \mu(\xi)}\left(\frac{\varphi_1(\xi+0)\int\limits_0^{\xi+0}\varphi_2 d[F]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} + \frac{\varphi_2(\xi+0)\int\limits_{\xi+0}^{l}\varphi_1 d[F]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} - \right.$$

$$-\frac{\varphi_1(\xi-0)\int\limits_0^{\xi-0}\varphi_2 d[F]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}+\frac{\varphi_2(\xi-0)\int\limits_{\xi-0}^{l}\varphi_1 d[F]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\Bigg).$$

Заметив, что

$$\int\limits_0^{\xi+0}\varphi_2 d[F]=\int\limits_0^{\xi}\varphi_2 d[F]+\varphi_2(\xi+0)\Delta^+F(\xi),$$

$$\int\limits_{\xi+0}^{l}\varphi_1 d[F]=\int\limits_{\xi}^{l}\varphi_1 d[F]-\varphi_1(\xi+0)\Delta^+F(\xi),$$

$$\int\limits_0^{\xi-0}\varphi_2 d[F]=\int\limits_0^{\xi}\varphi_2 d[F]-\varphi_2(\xi-0)\Delta^-F(\xi),$$

$$\int\limits_{\xi-0}^{l}\varphi_1 d[F]=\int\limits_{\xi}^{l}\varphi_1 d[F]+\varphi_1(\xi-0)\Delta^-F(\xi),$$

получаем требуемое.

Таким образом, верно представление (4.3). Из (4.3) вытекает, что $u'_\mu \in BV[0,l]$, и следовательно, $u \in E$.

Покажем теперь, что функция $u(x)$ является решением уравнения (2.1). Заметим, что

$$\int\limits_0^x u(s)d[Q(s)]=\frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^x\varphi_1(s)\int\limits_0^s\varphi_2(t)d[F(t)]d[Q(s)]+\frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^x\varphi_2(s)\int\limits_s^l\varphi_1 d[F]d[Q].$$

Поменяв в первом слагаемом пределы интегрирования, получим

$$\frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^x\varphi_1(s)\int\limits_0^s\varphi_2(t)d[F(t)]d[Q(s)]=$$

$$=\frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^x\varphi_2(t)((p{\varphi_1}'_\mu)(x)-(p{\varphi_1}'_\mu)(t))d[F(t)].$$

Аналогично,

$$\frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^x\varphi_2(s)\int\limits_s^l\varphi_1(t)d[F(t)]d[Q(s)]=$$

$$=\frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^x\varphi_1(t)(p(t){\varphi_2}'_\mu(t)-p(0){\varphi_2}'_\mu(0))d[F(t)]+$$

$$+\frac{1}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0))}\int\limits_x^l\varphi_1(t)(p(x){\varphi_2}'_\mu(x)-p(0)\varphi'_{2\mu}(0))d[F(t)].$$

Подставив полученное представление для $\int\limits_0^x ud[Q]$ в (2.1), и учитывая, согласно лемме 2.1, что

$$p(t)(\varphi_1(t){\varphi_2}'_\mu(t) - \varphi_2(t){\varphi_1}'_\mu(t)) = p(0)\varphi'_{2\mu}(0),$$

получим верное равенство.

Заметим, что $u(0) = 0$. Выпишем $u(l)$. Имеем

$$u(l) = \frac{\varphi_1(l)\int\limits_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}.$$

Так как мы рассматриваем случай

$$\left|\frac{\varphi_1(l)\int\limits_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\right| < k,$$

то $|u(l)| < k$. Следовательно, должно выполняться равенство $p(l-0)u'_\mu(l-0) = 0$. Из (4.3), с учетом непрерывности F в точке $x = l$, получаем

$$u'_\mu(l-0) = \frac{\varphi'_{1\mu}(l-0)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^{l-0}\varphi_2 dF + \frac{\varphi'_{2\mu}(l-0)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\varphi_1(l-0)\Delta^- F(l) = 0,$$

что и требовалось.

Пусть $\frac{\varphi_1(l)\int\limits_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \geqslant k$. Докажем, что функция

$$u(x) = \frac{\varphi_2(x)k}{\varphi_2(l)} + \frac{\varphi_1(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^x \varphi_2(s)d[F(s)] + \frac{\varphi_2(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_x^l \varphi_1(s)d[F(s)] -$$

$$-\frac{\varphi_2(x)\varphi_1(l)}{\varphi_2(l)p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]$$

является решением задачи (3.8).

С учетом доказанного выше, и принадлежности φ_1, φ_2 пространству E следует, что $u \in E$. Заметим, что $u(0) = 0$, $u(l) = k$. Докажем, что $p(l-0)u'_\mu(l-0) \leqslant 0$. Воспользовавшись (4.3) и условиями на функции φ_1, φ_2 получим, что

$$u'_\mu(l-0) = \frac{1}{\varphi_2(l)}\left(k - \frac{\varphi_1(l)\int\limits_0^l \varphi_2 d[F]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\right).$$

Так как $\frac{\varphi_1(l)\int\limits_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \geqslant k$ и $\varphi_2(l) > 0$, то $u'_\mu(l-0) \leqslant 0$, и $p(l-0)u'_\mu(l-0) \leqslant 0$.

Справедливость интегрального равенства может быть доказано аналогично. Случай $\dfrac{\varphi_1(l)\int\limits_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)} \leqslant -k$ может быть рассмотрен аналогично. Теорема доказана.

Теорема 4.3. *Пусть $u_0(x)$ — решение задачи (3.8). Тогда*

$$u_0 \to \min_{u(0)=0,|u(l)|\leqslant k} \Phi(u).$$

Доказательство. Докажем, что для любой функции $u \in E$, удовлетворяющей условиям $u(0) = 0$, $|u(l)| \leqslant k$, верно $\Phi(u) - \Phi(u_0) \geqslant 0$.

Представим функцию $u(x)$ как $u(x) = u_0(x) + h(x)$, где $h(x) = u(x) - u_0(x)$. Заметим, что $h(0) = 0$. Тогда

$$\Phi(u_0+h) - \Phi(u_0) = \int\limits_0^l \frac{ph'^2_\mu}{2}d\mu + \int\limits_0^l \frac{h^2}{2}d[Q] +$$

$$+\int\limits_0^l (pu'_{0\mu} - \int\limits_0^x u_0 d[Q] + F(x))dh + h(l)\int\limits_0^l u_0 d[Q] - h(l)F(l).$$

Подставим в последнее равенство представление

$$(pu'_{0\mu})(x) - \int\limits_0^x ud[Q] + F(x) = F(0) + (pu'_\mu)(0) = (pu'_{0\mu})(l-0) - \int\limits_0^l u_0 d[Q] + F(l).$$

Получим, что

$$\Phi(u_0+h) - \Phi(u_0) = \int\limits_0^l \frac{ph'^2_\mu}{2}d\mu + \int\limits_0^l \frac{h^2}{2}d[Q] + (pu'_{0\mu})(l-0)h(l) \geqslant 0$$

так как $h(l) = u(l) - u_0(l)$, и $u(l) \in [-k, k]$. Теорема доказана.

Теорема 4.4. *Пусть $k \to 0$. Тогда решение задачи (3.8) равномерно на $\overline{[0,l]}_\mu$ стремится к решению задачи*

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu)(0) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0), \\ u(0) = 0, \\ u(l) = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Воспользуемся формулами из теоремы 4.2 для представления решения $u_k(x)$ задачи (3.8). Так как $k \to 0$, то $\left|\dfrac{\varphi_1(l)\int\limits_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\right| \geqslant k$. Заметим, что из $\varphi_2 \in E$ следует, что $\left|\dfrac{\varphi_2(x)}{\varphi_2(l)}\right| \leqslant c$. Тогда

$$\left| u_k(x) - \frac{\varphi_1(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^x \varphi_2(s)d[F(s)] - \right.$$

$$-\frac{\varphi_2(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_x^l \varphi_1(s)d[F(s)] + \frac{\varphi_2(x)\varphi_1(l)}{\varphi_2(l)p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^l \varphi_2(s)d[F(s)]\Bigg|$$

$$= \left|\frac{k\varphi_2(x)}{\varphi_2(l)}\right| \leqslant c|k| \to 0.$$

Таким образом,

$$u_k(x) \rightrightarrows u(x) = \frac{\varphi_1(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^x \varphi_2(s)d[F(s)] + \frac{\varphi_2(x)}{p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_x^l \varphi_1(s)d[F(s)] -$$

$$-\frac{\varphi_2(x)\varphi_1(l)}{\varphi_2(l)p(0)\varphi'_{2\mu}(0)}\int\limits_0^l \varphi_2(s)d[F(s)].$$

Аналогично теореме 4.2 проверяется, что функция $u(x)$ является решением задачи

$$\begin{cases} -(pu'_\mu)(x) + (pu'_\mu)(0) + \int\limits_0^x ud[Q] = F(x) - F(0), \\ u(0) = 0, \\ u(l) = 0. \end{cases}$$

Теорема доказана.

REFERENCES

1. Atkinson, F. V. Discrete and continuous boundary problems / F. V. Atkinson. — New York, London, 1964. — 570 p.

2. Baev, A. D. Stieltjes differential in nonlinear momentum problems / A. D. Baev, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Doklady Mathematics. — 2014. — V. 90, iss. 2. — P. 613–615.

3. Stieltjes differential in impulse nonlinear problems / A. D. Baev, D. A. Chechin, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Doklady Mathematics. — 2020. — V. 101, iss. 1. — P. 5–8.

4. Djakov, P. Spectra of 1–D periodic Dirac operators and smoothness of potentials // P. Djakov, B. Mityagin // C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. — 2003. — V. 25, iss. 4. — P. 121–125.

5. Feller, W. Generalized second order differential operators and their lateral conditions / W. Feller // Ill. J. Math. — 1957. — V. 1, P. 459–504.

6. Hryniv, R. O. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville operators with singular potentials / R. O. Hryniv, Ya. V. Mykytyuk // Inverse Problems. — 2003. — V. 19, iss. 3. — P. 665–684.

7. Ivanov, A. S. Trace of order (-1) for a string with singular weight / A. S. Ivanov, A. M. Savchuk // Math. Notes. — 2017. — V. 102, iss. 2. — P. 164–180.

8. The influence function properties for a problem with discontinuous solutions / M. Kamenskii, Ch-F. Wen, Zh. Zalukaeva, M. Zvereva // Appl. Anal. Optim. — 2017. — V. 1, iss. 2. — P. 259–281.

9. Kamenskii, M. A string oscillations simulation with boundary conditions of hysteresis type / M. Kamenskii, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // Optimization. — 2018. — V. 6, iss. 9. — P. 1321–1332.

10. On a hyperbolic equation on a geometric graph with hysteresis type boundary conditions / M. Kamenskii M., Y.-Ch. Liou , Ch.-F. Wen, M. Zvereva // Optimization. — 2019. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1561694.

11. Kamenskii, M. On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end / M. Kamenskii, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // Optimization. — 2020. — V. 69, iss. 9. — P. 1935–1959.

12. Kamenskii, M. On periodic oscillations of some points of a string with a nonlinear boundary condition / M. Kamenskii, N. Voskovskaya, M. Zvereva // Appl. Set-Valued Anal. Optim. — 2020. — V. 2, iss. 1. — P. 35–48.

13. Kamenskii, M. Oscillations of the string with singuliarities / M. Kamenskii, Ch.-F. Wen, M. Zvereva // Journal of nonlinear and convex analysis. — 2019. — V. 20, iss. 8. — P. 1525–1545.

14. Kostenko, A. One-dimensional Schrödinger operator with delta-type interactions / A. Kostenko, M. Malamud // Funct. Anal. Appl. — 2010. — V. 44, iss. 2. — P. 151–155.

15. Kurzweil, J. Generalized ordinary differential equations / J. Kurzweil // Czech. Math. J. — 1958. — V. 8. — P. 360–388.

16. Mikhailets, V. A. A discreteness criterion for the spectrum of a one dimensional Schrödinger operator with N-interactions / V. A. Mikhailets // Funct. Anal. Appl. — 1994. — V. 28, iss. 4. — P. 290–292.

17. Mikhailets, V. A. On the spectrum of singular perturbations of operators on the circle / V. A. Mikhailets, V. M. Molyboga // Math. Notes. — 2012. — V. 91, iss. 4. — P. 588–591.

18. Pokornyi, Yu. V. The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations / Yu. V. Pokornyi // Doklady Math. — 1999. — V. 59, iss. 1. — P. 34–37.

19. Stieltjes differential in impulsive problems with discontinuous solutions / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov, M. B. Davydova // Doklady Math. — 2009. — V. 80, iss. 2. — P. 743–745.

20. Pokornyi, Yu. V. Sturm-Liouville oscillation theory for impulsive problems / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Russian Mathematical Surveys. — 2008. — V. 63, iss. 1. — P. 109–153.

21. Pokornyi, Yu. V. On Stieltjes differentials on geometric graphs / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, Zh. I. Bakhtina // Doklady Mathematics. — 2008. — V. 78, iss. 3. — P. 877–879.

22. On the Euler and Jacobi differential equations for variational problems with impulse parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, Zh. I. Bakhtina, A. S. Ischenko // Differential Equations. — 2011. — V. 47, iss. 5. — P. 656–670.

23. Pokornyi, Yu. V. Stieltjes differential method in the modeling of an irregular system on a geometric graph / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, Zh. I. Bakhtina // Differential Equations. — 2012. — V. 48, iss. 8. — P. 1103–1111.

24. Savchuk, A. M. Recovering a potential of Sturm-Liouville problem from finite sets of spectral data / A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov // American Mathematical Society Translations. Series 2, Advances in the Mathematical Sciences. — 2014. — V. 233. — P. 211–224.

25. Savchuk, A. M. Inverse problems for Sturm-Liouville operators with potentials in Sobolev Spaces: Uniform Stability / A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov // Funct. Anal. Appl. — 2010. — V. 44, iss. 4. — P. 270–285.

26. Savchuk, A. M. On the basis property of the system of eigenfunctions and associated functions of a one-dimensional Dirac operator / A. M. Savchuk // Izv. Math. — 2018. — V. 82, iss. 2. — P. 351–376.

27. Tverdý, M. Generalized differential equations in the space of regulated functions (Boundary value problems and controllability) / M. Tverdý // Math. Bohem. — 1991. — V. 116, iss. 3. — P. 225–244.

28. Tverdý, M. Differential and integral equations in the space of regulated functions / M. Tverdý // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 2002. — V. 25. — P. 1–104.

29. Vladikina, V. E. Asymptotics of the solutions of the Sturm-Liouville equation with singular coefficients / V. E. Vladikina, A. A. Shkalikov // Math. Notes. — 2015. — V. 98, iss. 6. — P. 891–899.

30. Zavalishchin, S. T. Dynamic impulse systems. Theory and applications / S. T. Zavalishchin, A. N. Sesekin // Dordrecht, 1997. — 260 p.

31. Zvereva, M. A string oscillations simulation with nonlinear conditions / M. Zvereva // Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics. — 2017. — V. 72. — P. 141–150.

32. Xiao, T.J. Second order differential operators with Feller-Wentzell type boundary conditions / T. J. Xiao, J. J. Liang // Funct. Anal. — 2008. — V. 254. — P. 1467–1486.

33. Solvable models in quantum mechanics / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. — New York, 1988. — 452 p.

34. Slavova, A. Modeling Natural Phenomena via Cellular Nonlinear Networks / A. Slavova, P. Zecca. — Cambridge Scholars Publishing, 2018. — 200 p.

35. Halmos, P. R. Measure theory / P. R. Halmos. — New York, 1950. — 316 p.

36. Kolmogorov, A. N. Elements of the theory of functions and functional analysis / A. N. Kolmogorov, A. N. Fomin. — New York and London. 1961. — 570 p.

37. Rudin, W. Principles of mathematical analysis / W. Rudin. — New-York-San Francisco-Toronto-London, McGraw-Hill: Tokyo, Kogakusha, 1964. — 270 p.

Зверева Маргарита Борисовна, кандидат физико–математических наук, доцент каф. математического анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: margz@rambler.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Zvereva Margarita Borisovna, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor of the chair of mathematical analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: margz@rambler.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Каменский Михаил Игоревич, доктор физико–математичесских наук, профессор, заведующий каф. функционального анализа и операторных уравнений, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Kamenskii Mikhail Igorevich, doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of the chair of functional analysis and operator equations, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: mikhailkamenski@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Шабров Сергей Александрович, доктор физико -математических наук, доцент каф. математического анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Shabrov Sergey Aleksandrovich, doctor of physical and mathematical sciences, associate professor of the chair of mathematical analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shaspoteha@mail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Рено де Фитт Поль, доктор наук, профессор Руанского Университета, Руан, Франция
E-mail: prf@univ-rouen.fr

Raynaud de Fitte Paul, PhD, professor, University of Rouen Normandy, Rouen, France
E-mail: prf@univ-rouen.fr