УДК 517.53/57

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ СУММИРУЕМЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ*

Х. Х. Бурчаев, Г. Ю. Рябых

Чеченский государственный университет,
Донской государственный технический университет

Поступила в редакцию 24.12.2018 г.

Аннотация. Изучается задача о влиянии свойств приближаемой функции на свойства элемента наилучшего приближения в пространствах Бергмана. Методом вложения доказано, что для функций, комплексно сопряженных с аналитическими вне единичного круга, элементы наилучшего приближения аналитичны в том же круге. В приложении дополнены и уточнены некоторые результаты по экстремальным функциям и приближению в пространствах Бергмана и Харди.

Ключевые слова: элемент наилучшего приближения, единственность, экстремальная функция, компактность, производная.

BEST APPROXIMATION IN SPACES OF SUMMABLE ANALYTIC FUNCTIONS

H. H. Burchaev, G. Yu. Ryabykh

Abstract. We study the problem of the influence of the properties of an approximated function on the properties of the element of best approximation in Bergman spaces. The embedding method proved that for functions complexly conjugate with analytic functions outside the unit circle, elements of the best approximation are analytic in the same circle. In the appendix, some results on extremal functions and approximation in Bergman and Hardy spaces are supplemented and refined.

Keywords: element of best approximation, uniqueness, extremal function, compactness, derivative.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, $\zeta = \xi + i\eta$, $dA = \frac{1}{\pi} d\xi d\eta$ – плоская нормированная мера Лебега, $p : 0 < p < \infty$. Через $L_p(D)$ обозначаем классическое пространство Лебега. Когда $1 \leqslant p < \infty$, наделенное конечной нормой

$$\|w\|_p = \left(\int\limits_D |w(\zeta)|^p dA \right)^{1/p},$$

$L_p(D)$ являетсятся банаховым пространством. Пусть $\mathcal{A}$ – замкнутое подпространство пространства $L_p(D)$, $w \in L_p(D) \backslash \mathcal{A}$ и

$$\mathcal{H} \in \mathcal{A} : \inf\{\|w - a\|_p : a \in \mathcal{A}\} = \|w - \mathcal{H}\|_p. \tag{1.1}$$

Авторов работы [1] интересовал вопрос, как изменения в регулярности функции w в (1.1) скажутся на свойствах функции $\mathcal{H}$. В частности, если $w \in W^{1,p}(D)$ (пространство Соболева),

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15–01–00331

$\mathcal{A} = A_p$ (пространство Бергмана), то нижняя грань в (1.1) достигается на функции, принадлежащей H_p (пространство Харди) (см. [1, теоремы 4.1 и 4.2]). В [1] и [2] имеются сведения по истории вопроса.

Согласуем основные обозначения и определения, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Пусть A – множество всех функций, аналитических в D. Напомним, что пространство Бергмана A_p, $1 \leqslant p < \infty$, является замкнутым подпространством $L_p(D)$, образованным функциями $\varphi \in A$.

Через $A(R)$ $(A(\mathbb{C}))$ обозначаем множество функций, аналитических в $D(R) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < R, 1 < R < \infty\}$ (в $\mathbb{C}$); $\{Q_N(\zeta) = \sum\limits_{k=0}^{N} q_k\zeta^k\}$ – множество полиномов порядка не выше N; $E_N = \{\varphi \in A_p : \varphi(\zeta) = \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \varphi_k\zeta^k\}$, φ_k – тейлоровы коэффициенты; $A_p^0 = \{\varphi \in A_p : \varphi(0) = 0\}$.

Функцию $\mathcal{H}$ в (1.1) называем *элементом наилучшего приближения* (э.н.п.) для функции w. Как известно, если $w \in C(\bar{D})$ и $\mathcal{A} = A_p$, $1 \leqslant p < \infty$, то э.н.п. существует и единственен (см. [1, теоремы 2.2 и 3.1]). Последнее имеет место и тогда, когда в (1.1) $\omega \in \{Q_N\}$ и $\mathcal{A} = E_N$ (как в частных случаях вышеупомянутых теорем 2.2 и 3.1).

В настоящей работе рассматриваются задачи о свойствах э.н.п. X и Y соответственно при

$$\omega \in A_p, X \in A_p^0 : \min\{\|\bar{\omega} - x\|_p, x \in A_p^0\} = \|\bar{\omega} - X\|_p; \tag{1.2}$$

$$\omega \in \{Q_N\}, Y \in E_N : \min\{\|\omega - y\|_p, y \in E_N\} = \|\omega - Y\|_p. \tag{1.3}$$

Задачи (1.2) и (1.3) относятся к типу экстремальных задач в пространствах аналитических функций, изученных, например, в [1–6]. В данной работе поставленная задача решается методом погружения A_p в более широкий класс. Такой подход к исследованию экстремальной функции (э.ф.) для линейного функционала над A_p впервые был применен в [3]. Метод вложения применен и при изучении э.ф. в пространствах Харди (см., [6]).

Вместе с задачами типа (1.2) и (1.3) нас интересуют возможности метода вложения в теории экстремальных задач.

Кратко изложим содержание данной работы. В начале §2 вводится вспомогательное пространство $\Lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N}$, над которым рассматривается линейный функционал $l_\alpha^{(\delta)}$ специального вида. Теоремы 2.1, 2.2, 2.3 и лемма 2.1 посвящены изучению свойств этого функционала. После доказательства теоремы 2.1 согласованы дополнительные обозначения. Основные результаты приведены в §3. Опираясь на свойства функционала $l_\alpha^{(\delta)}$, доказывается: если в задаче (1.2) $p > 1$ и $\omega \in \{Q_N\}$, то $X \in A(\mathbb{C})$ (теорема 3.1). С помощью теоремы 3.1 устанавливается: если в (1.2) $p \geqslant 1$ и $\omega \in A(R)$, то $X \in A(R)$ (теорема 3.2). В теореме 3.3 получен аналогичный результат относительно задачи 1.3, $p \geqslant 1$.

Некоторые приложения метода вложения приведены в §4. В расширение основного результата из [3] доказывается: э.ф. линейного функционала над A_p, $1 \leqslant p < \infty$, образованного функцией из $A(R)$, принадлежит $A(R)$ (теорема 4.1). Относительно пространств $L_p(\mathbb{T} = \partial D)$ и H_p установлены аналоги теорем 3.2 и 3.3 (теоремы 4.2 и 4.3). В замечании 4.2 обсуждается результат из [2] о форме э.ф. для функционалов над H_p, $1 < p < \infty$, образованных полиномами.

Настоящая работа в принципе является приложением метода вложения к исследованию э.н.п. А последнее требует иного подхода к идее самого метода, чем в работах [3] и [6] по э.ф. В представленной работе метод вложения модернизирован применительно к изучению как э.н.п., так и э.ф. Последнее позволяет рассматривать работы [3] и [6] как следствия данной. При этом сохранена целостность всей работы. В изложении следуем работе [6]. Это способствует лучшему восприятию данной работы.

2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Для $0 < \rho < 1$ и $b \in A$ положим $b_\rho(\zeta) = b(\rho\zeta)$. Пусть $0 < \alpha < \infty$ и $0 < \delta < 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пространству $\Lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$, $1 < p < \infty$, отнесем совокупность всех функций $d \in A$, наделенных конечной нормой

$$\|d\|_{\alpha,\delta,p} = \sup_{\delta \leqslant \rho < 1} (1-\rho)^\alpha \|d_\rho\|_p.$$

Если $(1-\rho)^\alpha \|d_\rho\|_p \to 0$ при $\rho \to 1$, то будем говорить, что $d \in \lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пространство $\Lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N}$ состоит из всех функций $f \in L_p(D)$, представимых в виде

$$f = c + \bar{d}, \tag{2.1}$$

где $c \in \{Q_N\}$, $d \in \Lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$ и $d(0) = 0$. Если в (2.1) $d \in \lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$, то будем говорить, что $f \in \lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N}$.

Очевидно, $\Lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N}$ – линейное пространство с обычными арифметическими операциями. Посредством

$$\|f\| = \|f\|_{\alpha,\delta,p,N} = \sup_{\delta \leqslant \rho < 1} (1-\rho)^\alpha \|f_\rho\|_p$$

задается конечная норма в $\Lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N}$ (аксиомы нормы легко проверяются). В краткой записи $\Lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N} := \mathcal{B}_p = Q_N + \overline{\mathcal{B}}$, где $\mathcal{B} := \{b \in \Lambda_\alpha^{(\delta)} A_p, b(0) = 0\}$.

Отметим, что $\lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$ является замкнутым подпространством пространства $\Lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$, не совпадающим с ним (например, функция $\frac{1}{(1-\zeta)^{2/p+\alpha}} \in \Lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$, но не принадлежит $\lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$; замкнутость получаем с помощью неравенства треугольника). Очевидно, пространства A_p вложены в пространства $\lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$. С этим связано наименование: *метод вложения.*

Пусть $q : 1/p + 1/q = 1$, $\omega \in \{Q_N\}$ в (1.2), тогда почти всюду $\bar{\omega}(\zeta) - X(\zeta) \neq 0$ по аналитичности, и функция

$$F(\zeta) = \frac{|\bar{\omega}(\zeta) - X(\zeta)|^p}{\bar{\omega}(\zeta) - X(\zeta)} \in L_q(D). \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение линейный функционал $l_\alpha^{(\delta)}$ над пространством $\mathcal{B}_p$, $1 < p < \infty$, определенный формулой

$$l_\alpha^{(\delta)}(f) = \int\limits_D (1-\delta)^\alpha f(\delta\zeta) \bar{F}(\zeta) dA, f \in \Lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N} = \mathcal{B}_p. \tag{2.3}$$

В дальнейшем понадобится

Теорема A [см. 7]. *Пусть $\mathcal{A}$ – фиксированное замкнутое подпространство пространства $L_p(T,\Sigma,\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда для того, чтобы $\xi_0 \in B$ был элементом наилучшего приближения для $x_0 \in L_p(T,\Sigma,\mu) \backslash \mathcal{A}$ достаточно и необходимо (при $p = 1$, когда $\mu\{t : |\xi_0(t) - x_0(t)| = 0\} = 0$) выполнение условия:*

$$\int\limits_T \frac{|\xi_0 - x_0|^p}{\xi_0 - x_0} h d\mu = 0$$

для любого $h \in \mathcal{A}$.

Теорема B (о проектировании из $L_p(D)$ на A_p). *Линейный оператор*

$$(\mathcal{P}w)(z) = \int\limits_D \frac{w(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^2} dA(\zeta)$$

является проектором из $L_p(D)$, $1 < p < \infty$, на A_p (см., например, [8, лемма 1] или [9, теорема 7.6]).

На основании теоремы A, (1.2) и (2.2) заключаем, что должно выполняться условие

$$\int\limits_D \frac{|\bar{\omega}(\zeta) - X(\zeta)|^p}{\bar{\omega}(\zeta) - X(\zeta)} \zeta^n dA = \int\limits_D F(\zeta)\zeta^n dA = 0,\ n = 1,2,\dots. \tag{2.4}$$

Функцию $F^{(\delta)} \in \mathcal{B}_p$ называем *экстремальной* (э.ф.) для функционала (2.3), если

$$\|l_\alpha^{(\delta)}\| = \sup\{|l_\alpha^{(\delta)}(f)| : \|f\| \leqslant 1\} = l_\alpha^{(\delta)}(F^{(\delta)})$$

и $\|F^{(\delta)}\| = 1$ (подразумевается, что $F^{(\delta)}$ зависит и от параметров α, p и N).

Теорема 2.1. *Экстремальная функция для функционала (2.3) существует, единственна и принадлежит $\lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N}$.*

Доказательство. По определению нормы функционала $l_\alpha^{(\delta)}$ существует последовательность $\{f_n = g_n + \bar{a}_n\} \in \mathcal{B}_p$, где $g_n \in \{Q_N\}$, $a_n \in \mathcal{B}$, $\|f_n\| \leqslant 1$, такая, что

$$l_\alpha^{(\delta)}(f_n) = \int\limits_D (1-\delta)^\alpha (g_n(\delta\zeta) + \bar{a}_n(\delta\zeta))\bar{F}(\zeta)dA \to \|l_\alpha^{(\delta)}\|$$

при $n \to \infty$. Так как $\|f_n\| = \sup\limits_{\delta \leqslant \rho < 1} (1-\rho)^\alpha \|g_n(\rho\zeta) + \bar{a}(\rho\zeta)\|_p \leqslant 1$, $p > 1$, $a_n(0) = 0$ и

$$(1-\rho)^\alpha g_n(\rho z) = \int\limits_D \frac{(1-\rho)^\alpha g_n(\rho\zeta) + (1-\rho)^\alpha \bar{a}_n(\rho\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^2} dA,$$

то на основании теоремы B и неравенства треугольника последовательности $\{(1-\rho)^\alpha g_n(\rho\zeta)\}$ и $\{(1-\rho)^\alpha a_n(\rho\zeta)\}$ ограничены в A_p по совокупности $\rho : \delta \leqslant \rho < 1$. Поэтому компактны относительно сходимости внутри D (см., например, [9, теорема 3.7]). Значит, компактны и последовательности $\{g_n(\rho\zeta)\}$ и $\{a_n(\rho\zeta)\}$ для любого $\delta \leqslant \rho < 1$ по сходимости внутри D.

Пусть сами последовательности $g_n \to g \in \{Q_N\}$, $a_n \to a$ внутри D при $n \to \infty$. Тогда $a(0) = 0$, $\|g + \bar{a}\| \leqslant 1$ в силу $\|g_n + \bar{a}_n\| \leqslant 1$. Следовательно, $g + \bar{a} \in \mathcal{B}_p$ и на основании предыдущего

$$l_\alpha^{(\delta)}(g + \bar{a}) = \int\limits_D (1-\delta)^\alpha (g(\delta\zeta) + \bar{a}(\delta\zeta))\bar{F}(\zeta)dA = \|l_\alpha^{(\delta)}\|.$$

Это равенство возможно только в случае $\|g + \bar{a}\| = 1$, т.е. функция $F^{(\delta)} = g + \bar{a}$ экстремальна для функционала (2.3).

Докажем единственность э.ф. На основании представлений (2.1), (2.3) и условия (2.4) имеем, что $l_\alpha^{(\delta)}(c + \bar{d}) = l_\alpha^{(\delta)}(c)$ для любых $c \in \{Q_N\}$ и $d \in \mathcal{B}$. Соответственно, если $x \in \mathcal{B}$, то

$$\|l_\alpha^{(\delta)}\| = l_\alpha^{(\delta)}(g + \bar{a}) = l_\alpha^{(\delta)}(g + \bar{x}) = \|l_\alpha^{(\delta)}\|\|g + \bar{a}\| \leqslant \|l_\alpha^{(\delta)}\|\|g + \bar{x}\|.$$

Откуда в силу произвольности $x \in \mathcal{B}$ заключаем, что

$$1 = \|F^{(\delta)}\| = \|g + \bar{a}\| = \inf_{x \in \mathcal{B}}\{\|g + \bar{x}\|\} = \inf_{x \in \mathcal{B}} \sup_{\rho \in [\delta, 1)} (1-\rho)^\alpha \|g_\rho + \bar{x}_\rho\|_p. \tag{2.5}$$

При этом наилучшее приближение в правой части, по крайней мере, достигается на элементе a. Установим единственность э.н.п. для g в (2.5).

Для $\delta_* : \delta \leqslant \delta_* < 1$, с учетом $g \in \{Q_N\}$, имеем

$$\inf_{x\in\mathcal{B}} \sup_{\rho\in[\delta_*,1)} (1-\rho)^{\alpha}\|g_\rho + \bar{x}_\rho\|_p \leqslant \sup_{\rho\in[\delta_*,1)} (1-\rho)^{\alpha}\|g_\rho + 0\|_p \to 0$$

при $\delta_* \to 1$. Поэтому максимум непрерывной по $\rho \in [\delta,1)$ функции

$$I_\alpha(\rho) = (1-\rho)^{\alpha}\|F_\rho^{(\delta)}\|_p = (1-\rho)^{\alpha}\|g_\rho + \bar{a}_\rho\|_p,$$

равный $\|F^{(\delta)}\| = 1$, достигается на $[\delta,\nu]$, где $\nu : \delta \leqslant \nu = \nu(\alpha) < 1$.

Пусть $b \in \mathcal{B}$ и $\|g + \bar{b}\| = 1$. Тогда функция $\Phi^{(\delta)} = g + \bar{b}$ экстремальна для функционала $l_\alpha^{(\delta)}$ вместе с $F^{(\delta)} = g + \bar{a}$. Поэтому функция $(F^{(\delta)} + \Phi^{(\delta)})/2$ экстремальна для $l_\alpha^{(\delta)}$, значит, $\|(F^{(\delta)} + \Phi^{(\delta)})/2\| = 1$. Применяя неравенство треугольника, получим

$$\left\|\frac{F^{(\delta)} + \Phi^{(\delta)}}{2}\right\| = \sup_{\rho\in[\delta,1)} (1-\rho)^{\alpha}\left\|\frac{F_\rho^{(\delta)} + \Phi_\rho^{(\delta)}}{2}\right\|_p \leqslant \left\|\frac{F^{(\delta)}}{2}\right\| + \left\|\frac{\Phi^{(\delta)}}{2}\right\| = 1,$$

как и выше $(1-\rho)^{\alpha}\|\Phi_\rho^{(\delta)}\|_p \to 0$ при $\rho \to 1$, поэтому существует $r_* \in [\delta,1)$, такое, что

$$1 = (1-r_*)^{\alpha}\left\|\frac{F_{r_*}^{(\delta)} + \Phi_{r_*}^{(\delta)}}{2}\right\|_p.$$

При этом $(1-r_*)^{\alpha}\|F_{r_*}^{(\delta)}\|_p \leqslant 1$, $(1-r_*)^{\alpha}\|\Phi_{r_*}^{(\delta)}\|_p \leqslant 1$ в силу $\|F^{(\delta)}\| = \|\Phi^{(\delta)}\| = 1$. Вследствие предыдущего

$$\frac{2}{(1-r_*)^{\alpha}} = \|F_{r_*}^{(\delta)} + \Phi_{r_*}^{(\delta)}\|_p \leqslant \|F_{r_*}^{(\delta)}\|_p + \|\Phi_{r_*}^{(\delta)}\|_p \leqslant \frac{2}{(1-r_*)^{\alpha}},$$

т.е. должно выполняться равенство

$$\|F_{r_*}^{(\delta)} + \Phi_{r_*}^{(\delta)}\|_p = \|F_{r_*}^{(\delta)}\|_p + \|\Phi_{r_*}^{(\delta)}\|_p.$$

Но пространство $L_p(D)$ строго нормированное, поэтому $F_{r_*}^{(\delta)}(\zeta) = g_{r_*}(\zeta) + \bar{a}_{r_*}(\zeta) = \Phi_{r_*}^{(\delta)}(\zeta) = g_{r_*}(\zeta) + \bar{b}_{r_*}(\zeta)$ почти всюду. Откуда $a = b$ по аналитичности, и э.н.п. для g единственен. Фактически повторяя предыдущие рассуждения, устанавливаем, что э.ф. для функционала $l_\alpha^{(\delta)}$ единственна.

Для завершения доказательства осталось установить, что $F^{(\delta)} \in \lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N}$. С учетом того, что $\max\limits_{\delta\leqslant\rho<1} I_\alpha(\rho) = \|F^{(\delta)}\|$ достигается только на $[\delta,\nu]$, $I_\alpha(\rho) \to 0$ при $\rho \to 1$, $F_r^{(\delta)} \to F^{(\delta)}$ внутри D при $r \to 1$, выполняется

$$\|F_r^{(\delta)}\| = \|g_r + \bar{a}_r\| \to \|F^{(\delta)}\| = \|g + \bar{a}\|.$$

Так как $g \in \{Q_N\}$, то $g_r \to g$ в $\mathcal{B}_p$ при $r \to 1$, следовательно, по непрерывности нормы

$$\|g + \bar{a}_r\| \to \|g + \bar{a}\| = \min_{x\in\mathcal{B}}\{\|g + \bar{x}\|\}.$$

Откуда, имея ввиду, что минимум в правой части достигается только на a (в силу единственности э.ф.) вытекает, что $a_r \to a$ в $\mathcal{B}$. Теперь, с учетом $a_r \in \lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$, пространство $\lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$ замкнутое, заключаем, что $a \in \lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$, т.е. э.ф. $F^{(\delta)} \in \lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N}$. Теорема 2.1 доказана.

Следуя рассуждениям, проведенным в доказательстве теоремы 2.1, заключаем, что $\inf\limits_{x\in\mathcal{B}} \sup\limits_{\rho\in[\delta,1)}$ в равенстве (2.5) реализуется только в точках (a,r), где $a \in \lambda_\alpha^{(\delta)} A_p \subset \mathcal{B}$,

$$r \in m(\delta) = m(\delta,F^{(\delta)}) = \{r \in [\delta,1) : (1-r)^{\delta}\|g_r + \bar{a}_r\|_p = 1\}.$$

Множество $m(\delta) \subset [\delta,\nu]$ и замкнуто, так как состоит из точек максимума функции $I_\alpha(\rho)$, непрерывной в $[\delta,1)$.

Лемма 2.1. *Если* $\rho \in m(\delta)$, *то*

$$\min_{x \in A_p^0} \|g_\rho + \bar{x}_\rho\|_p = \|g_\rho + \bar{a}_\rho\|_p.$$

Доказательство. Предварительно отметим, что A_p^0 плотно в $\lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$. Пусть $\beta \in [-1,1]$, $m(\delta) \subset [\delta,\nu]$, где $\nu < 1$, $x \in A_p^0$, функция

$$k(\beta) := \max_{r \in [\delta,\nu]} (1-r)^{\alpha p} \int_D (|F_r^{(\delta)} + \beta \bar{x}_r|^p - |F_r^{(\delta)}|^p)\, dA.$$

Число ν подберем так, чтобы $\max\limits_{r \in [\delta,1)} (1-r)^{\alpha p} \|F_r^{(\delta)} + \beta \bar{x}_r\|_p^p \geqslant 1$ при заданном $x \in A_p^0$, $\beta \in [-1,1]$, достигался на $[\delta,\nu]$. Тогда, так как $(1-r)^{\alpha p}\|F_r^{(\delta)}\|_p^p \leqslant 1$, то $k(\beta) \geqslant 0$, $k(0) = 0$. Поэтому, если $k(\beta)$ дифференцируема в точке $\beta = 0$, то $k'(0) = 0$. Пусть $\beta \neq 0$,

$$(1-r)^{\alpha p} d(\beta,r) = (1-r)^{\alpha p} \int_D \frac{|F_r^{(\delta)} + \beta \bar{x}_r|^p - |F_r^{(\delta)}|^p}{\beta} dA.$$

Интеграл в правой части представим как сумму интегралов $d_\varepsilon(\beta,r)$ и $d_\varepsilon^*(\beta,r)$, соответственно по $\Delta(\varepsilon,r) = \{\zeta \in D : |F_r^{(\delta)}(\zeta)| \geqslant \varepsilon > 0\}$ и $\Delta^*(\varepsilon,r) = D \backslash \Delta(\varepsilon,r)$. Полагая $F(\beta,r) = |F_r^{(\delta)} + \beta \bar{x}_r|^p + |F_r^{(\delta)}|^p$, $M(\beta,r) = 2Re(F_r^{(\delta)} x_r) + \beta |x_r|^2$, имея ввиду $|F_r^{(\delta)} + \beta \bar{x}_r|^2 = |F_r^{(\delta)}|^2 + \beta M(\beta,r)$, получим

$$d_\varepsilon(\beta,r) = \int_{\Delta(\varepsilon,r)} \frac{|F_r^{(\delta)} + \beta \bar{x}_r|^{2p} - |F_r^{(\delta)}|^{2p}}{\beta F(\beta,r)} dA$$

$$= \int_{\Delta(\varepsilon,r)} \left[\left(\frac{(|F_r^{(\delta)}|^2 + \beta M(\beta,r))^p - (|F_r^{(\delta)}|^2)^p}{\beta M(\beta,r)} - p(|F_r^{(\delta)}|^2)^{p-1} \right) + p|F_r^{(\delta)}|^{2(p-1)} \right]$$

$$\times \frac{M(\beta,r)}{F(\beta,r)} dA. \tag{2.6}$$

Воспользуемся следующим неравенством: если $t \in \mathbb{R}$, $\Delta t \neq 0$, то

$$\left| \frac{|t + \Delta t|^p - |t|^p}{\Delta t} - p|t|^{p-1} \mathrm{sign} t \right| \leqslant L(p) |\Delta t|^{p-1}$$

(см., например, [10, Гл. III]). На основании оценки роста функций из A_p^0 (см. [9, теорема 7.10])

$$|x_r(\zeta)| = |x_{\sqrt{r}}(\sqrt{r}\zeta)| \leqslant \frac{\|x\|}{(1-\sqrt{r})^\alpha (1-r)^{2/p}}.$$

Следовательно, x_r равномерно по $r \in [\delta,\nu]$ ограничены в D для каждого $\alpha > 0$. Такое же утверждение справедливо относительно $F_r^{(\delta)}$. В силу этого, $|F(\beta,r)(\zeta)| \geqslant \varepsilon$ в $\Delta(\varepsilon,r)$, равномерно по $r \in [\delta,\nu]$ (в (2.6) полагаем $t = |F_r^{(\delta)}|^2$, $\Delta t = \beta M(\beta,r)$ почти всюду)

$$(1-r)^{\alpha p} \int_{\Delta(\varepsilon,r)} |\beta M(\beta,r)|^{p-1} \times \left| \frac{M(\beta,r)}{F(\beta,r)} \right| dA \to 0$$

при $\beta \to 0$ для каждого $\varepsilon > 0$. Имея это ввиду, формально переходя к пределу, сводим (2.6) к

$$\lim_{\beta\to 0}\max_{r\in[\delta,\nu]}(1-r)^{\alpha p} d_\varepsilon(\beta,r) = \lim_{\beta\to 0}\max_{r\in[\delta,\nu]}(1-r)^{\alpha p}\int\limits_{\Delta(\varepsilon,r)} p|F_r^{(\delta)}|^{2(p-1)}\frac{M(\beta,r)}{F(\beta,r)}dA$$

$$= \max_{r\in[\delta,\nu]}(1-r)^{\alpha p} p\int\limits_{\Delta(\varepsilon,r)} |F_r^{(\delta)}|^{p-2}\mathrm{Re}(F_r^{(\delta)}x_r)dA$$

$$= \max_{r\in[\delta,\nu]}(1-r)^{\alpha p} p\mathrm{Re}\left(\int\limits_{\Delta(\varepsilon,r)} \frac{|F_r^{(\delta)}|}{F_r^{(\delta)}}\bar{x}_r\, dA\right). \tag{2.7}$$

Конечный результат говорит об обоснованности проведенного предельного перехода.

Пользуясь неравенством

$$||c|^p - |d|^p| \leqslant K(p)|c-d|\,(|c|+|d|)^{p-1}$$

для комплексных c и d (см. [10, Глава VI]), ограниченностью x_r в D и $|F_r^{(\delta)}(\zeta)| < \varepsilon$ в $\Delta^*(\varepsilon,r)$, получим ($c = |F_r^{(\delta)} + \beta\bar{x}_r|^p$, $d = |F_r^{(\delta)}|^p$)

$$\overline{\lim_{\beta\to 0}}\max_{r\in[\delta,\nu]}(1-r)^{\alpha p}|d^*_\varepsilon(\beta,r)|$$

$$\leqslant \max_{r\in[\delta,\nu]}(1-r)^{\alpha p}K(p)\int\limits_{\Delta^*(\varepsilon,r)} |2F_r^{(\delta)}|^{p-1}|x_r|\, dA \leqslant \varepsilon^{p-1}K^*.$$

Аналогично,

$$\max_{r\in[\delta,\nu]}\left|(1-r)^{\alpha p}\mathrm{Re}\left(\int\limits_{\Delta^*(\varepsilon,r)} \frac{|F_r^{(\delta)}|^p}{F_r^{(\delta)}}\bar{x}_r\, dA\right)\right| \leqslant \varepsilon^{p-1}K_1^*.$$

С помощью последних неравенств и неравенства треугольника равенство (2.7) сводим к равенству

$$\lim_{\beta\to 0}\max_{r\in[\delta,\nu]}(1-r)^{\alpha p}d(\beta,r) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\beta\to 0}\max_{r\in[\delta,\nu]}(1-r)^{\alpha p}(d_\varepsilon(\beta,r) + d^*_\varepsilon(\beta,r))$$

$$= \max_{r\in[\delta,\nu]}(1-r)^{\alpha p}p\mathrm{Re}\left(\int\limits_D \frac{|F_r^{(\delta)}|^p}{F_r^{(\delta)}}\bar{x}_r\, dA\right).$$

Следовательно, при каждом $x \in A_p^0$ функция $k(\beta)$ имеет производную в точке $\beta = 0$, значит, $\left(\frac{d}{d\beta}k(\beta)\right)_{\beta=+0} = \left(\frac{d}{d\beta}k(\beta)\right)_{\beta=-0} = 0$.

При каждом $\rho \in m(\delta)$ функция

$$u(\beta,\rho) = (1-\rho)^{\alpha p}\int\limits_D (|F_\rho^{(\delta)} + \beta\bar{x}_\rho|^p - |F_\rho^{(\delta)}|^p)\, dA$$

дифференцируема в точке $\beta = 0$ (см., например, [10, Гл. III]). При этом, с учетом $(1-\rho)^{\alpha p}\|F_\rho^{(\delta)}\|_p^p = 1$, производная

$$\left(\frac{d}{d\beta}u(\beta,\rho)\right)_{\beta=0} = p\mathrm{Re}\left(\int\limits_D \frac{|F_\rho^{(\delta)}|^p}{F_\rho^{(\delta)}}\bar{x}_\rho\, dA\right).$$

Принимая во внимание, что $k(\beta) \geqslant u(\beta,\rho)$ для $\beta \in [-1,1]$, $u(0,\rho) = 0$, получим

$$0 = \left(\frac{d}{d\beta}k(\beta)\right)_{\beta=+0} \geqslant p\mathrm{Re}\left(\int_D \frac{|F_\rho^{(\delta)}|^p}{F_\rho^{(\delta)}}\bar{x}_r\,dA\right).$$

Аналогично,

$$0 = \left(\frac{d}{d\beta}k(\beta)\right)_{\beta=-0} \leqslant p\mathrm{Re}\left(\int_D \frac{|F_\rho^{(\delta)}|^p}{F_\rho^{(\delta)}}\bar{x}_r\,dA\right).$$

Из этих неравенств и произвольности $x \in A_p^0$, $F^{(\delta)} = g + \bar{a}$, следует, что

$$\int_D \frac{|g_\rho + \bar{a}_\rho|}{g_\rho + \bar{a}_\rho}\bar{x}_\rho\,dA = 0,$$

как только $x \in A_p^0$. Отсюда по теореме А получаем требуемое. Лемма 2.1 доказана.

Замечание 2.1. *Лемма 2.1 равносильна выполнению равенства*

$$\min_{x\in\mathcal{B}}\max_{\rho\in[\delta,1)}(1-\rho)^\alpha\|g_\rho + \bar{x}_\rho\|_p = \max_{\rho\in[\delta,1)}\min_{x\in\mathcal{B}}(1-\rho)^\alpha\|g_\rho + \bar{x}_\rho\|_p$$

$$= (1-r)^\alpha\|g_r + \bar{a}_r\|_p = 1,$$

где $r \in m(\delta)$, т.е. пара (a,r) является седловой точкой функции $(1-\rho)^\alpha\|g_\rho + \bar{x}_\rho\|_p$, определенной в множестве $\mathcal{B}\times[\delta,1)$ (см. [11, Гл. VI]).

Обозначим

$$\Omega(\rho,F^{(\delta)})(\zeta) = \frac{|(1-\rho)^\alpha F_\rho^{(\delta)}(\zeta)|^p}{(1-\rho)^\alpha F_\rho^{(\delta)}(\zeta)},$$

$$W(\rho,f) = Re\left(\int_D (1-\rho)^\alpha f(\rho\zeta)\Omega(\rho,F^{(\delta)})(\zeta)dA\right).$$

Теорема 2.2. *Если множество $m(\delta) = m(\delta,F^{(\delta)})$ состоит из единственной точки r_*, то функция $\|F^{(\delta)} + xf\|$, где $x \in \mathbb{R}$, $f \in \lambda_\alpha^{(\delta)}A_{p,N}$, дифференцируема в точке $x = 0$. При этом*

$$\left(\frac{d}{dx}\|F^{(\delta)} + xf\|\right)_{x=0} = W(r_*,f). \tag{2.8}$$

Доказательство аналогично доказательству подобной теоремы 2.2 из [6] (или см. [3, теорема 2]).

Теорема 2.3. *Если для $\delta : 0 < \delta < 1$ существует $\alpha = \alpha(\delta)$, такое, что множество $m(\delta) = m(\delta,F^{(\delta)}) = \delta$, то сужение функционала (2.3) на пространство $\lambda_\alpha^{(\delta)}A_{p,N}$ представимо в виде*

$$l_\alpha^{(\delta)}(f) = \int_D (1-\delta)^\alpha f(\delta\zeta)\|l_\alpha^{(\delta)}\|\Omega(\delta,F^{(\delta)})dA. \tag{2.9}$$

При этом элемент наилучшего приближения в (1.2) $X \in A\left(\frac{1}{\delta}\right)$.

Доказательство. Пусть $f \in \lambda_\alpha^{(\delta)}A_{p,N}$. Составим функцию

$$y(x) = \left|l_\alpha^{(\delta)}\left(\frac{F^{(\delta)} + xf}{\|F^{(\delta)} + xf\|}\right)\right|^2.$$

Эта функция определена для всех x, достаточно малых по абсолютной величине. Применяя формулу (2.8), $m(\delta)=\delta$, после простых выкладок получим

$$y'(0)=\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\|F^{(\delta)}+xf\|^2}l_\alpha^{(\delta)}(F^{(\delta)}+xf)\overline{l_\alpha^{(\delta)}(F^{(\delta)}+xf)}\right)\right)_{x=0}=$$

$$2\|l_\alpha^{(\delta)}\|Rel_\alpha^{(\delta)}(f)-2\|l_\alpha^{(\delta)}\|^2\cdot W(\delta,f).$$

Функция $y(x)$ достигает максимума при $x=0$, поэтому эта производная равна нулю. Из предыдущего равенства следует

$$Rel_\alpha^{(\delta)}(f)=Re\|l_\alpha^{(\delta)}\|W(\delta,f), f\in\lambda_\alpha^{(\delta)}A_{p,N}. \tag{2.10}$$

Комплексный линейный функционал однозначно определяется своей вещественной частью. Поэтому из соотношения (2.10) вытекает представление (2.9). Этим доказана первая часть теоремы 2.3.

Сравнивая представления (2.3) и (2.9), заключаем, что для $f=c+\bar d\in\lambda_\alpha^{(\delta)}A_{p,N}$ выполняется равенство

$$l_\alpha^{(\delta)}(f)=\int_D(1-\delta)^\alpha(c(\delta\zeta)+\bar d(\delta\zeta))\bar F(\zeta)dA=$$

$$\int_D(1-\delta)^\alpha(c(\delta\zeta)+\bar d(\delta\zeta))\|l_\alpha^{(\delta)}\|\Omega(\delta,F^{(\delta)})(\zeta)dA. \tag{2.11}$$

Пусть B_p – подпространство пространства $L_p(D)$, состоящее из функций $\psi\in L_p(D)$, представимых в виде $\psi=b+\bar e$, где $b\in\{Q_N\}$, $e\in A_p$, $e(0)=0$. Множество полиномов плотно в A_p, функции $\bar F,\Omega\in L_q(D)$, $1/p+1/q=1$. Поэтому, как это видно из (2.11), задания (2.2) и $F^{(\delta)}=g+\bar a$, соотношением

$$\mathcal{N}(\psi)=\int_D(b(\zeta)+\bar e(\zeta))\frac{|\omega(\zeta)-\bar X(\zeta)|^p}{\omega(\zeta)-\bar X(\zeta)}dA=$$

$$\int_D(b(\zeta)+\bar e(\zeta))\|l_\alpha^{(\delta)}\|\frac{|(1-\delta)^\alpha(g(\delta\zeta)+\bar a(\delta\zeta))|^p}{(1-\delta)^\alpha(g(\delta\zeta)+\bar a(\delta\zeta))}dA \tag{2.12}$$

определяется линейный функционал над пространством B_p.

Функцию $B\in B_p$ называем *экстремальной* для функционала (2.12), если $\mathcal{N}(B)=\|\mathcal{N}\|$ и $\|B\|_p=1$.

Исходя из принципа компактности аналитических функций, заключаем, что э.ф. для функционала $\mathcal{N}$ существует и единственна. Причем, $(1-\delta)^\alpha g_\delta\in\{Q_N\}$, $(1-\delta)^\alpha a_\delta\in A_p$, $\|(1-\delta)^\alpha g_\delta+(1-\delta)^\alpha\bar a_\delta\|_p=1$ в силу условия $m(\delta)=\delta$. Из второго представления в (2.12) видно, что $\mathcal{N}((1-\delta)^\alpha F_\delta^{(\delta)})=\|l_\alpha^{(\delta)}\|$. Обратно, с помощью неравенства Гельдера, получим $\|\mathcal{N}\|\leqslant\|l_\alpha^{(\delta)}\|$. Следовательно, функция $(1-\delta)^\alpha(g(\delta\zeta)+\bar a(\delta\zeta))$ экстремальна для функционала $\mathcal{N}$. Аналогично, пользуясь первым представлением, заключаем, что функция $\frac{\omega(\zeta)}{\lambda}-\frac{\bar X(\zeta)}{\lambda}$, где $\lambda:=\|\omega-\bar X\|_p$, экстремальна для $\mathcal{N}$. Теперь вследствие единственности э.ф. должно выполняться равенство ($a(0)=0$):

$$(1-\delta)^\alpha g(\delta\zeta)+(1-\delta)^\alpha\bar a(\delta\zeta)=\frac{\omega(\zeta)}{\lambda}-\frac{\bar X(\zeta)}{\lambda}. \tag{2.13}$$

Откуда, с учетом $X(0)=0$, следует, что $-(1-\delta)^\alpha a(\delta\zeta)=\frac{X(\zeta)}{\lambda}$. Функция из левой части последнего равенства принадлежит $A\left(\frac{1}{\delta}\right)$ в силу $a\in A$, поэтому $X\in A\left(\frac{1}{\delta}\right)$ по аналитичности. Теорема 2.3 доказана.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРОСТРАНСТВА БЕРГМАНА

Теорема 3.1. *Если в задаче (1.2)* $1 < p < \infty$ *и* $\omega \in \{Q_N\}$, *то элемент наилучшего приближения* $X \in A(\mathbb{C})$.

Доказательство. Сначала докажем, что для каждого $\delta : 0 < \delta < 1$, найдется число $\alpha = \alpha(\delta) > 0$, такое, что соответствующее множество $m(\delta) = \delta$. Допустим, что $m(\delta)$ содержит точку $r \in (\delta,1)$, т.е. в точке r функция $I_\alpha(\rho) = (1-\rho)^\alpha \|F_\rho^{(\delta)}\|_p = (1-\rho)^\alpha \|g_\rho + \bar{a}_\rho\|_p$ имеет максимум, равный единице. Очевидно, функция $I_\alpha(\rho)$ непрерывно дифференцируема по $\rho \in (\delta,1)$. Следовательно, производная

$$\left(\frac{d}{d\rho} I_\alpha(\rho)\right)_{\rho=r} =$$

$$-\alpha(1-r)^{\alpha-1}\|F_r^{(\delta)}\|_p + (1-r)^\alpha \left(\frac{d}{d\rho}\|F_\rho^{(\delta)}\|_p\right)_{\rho=r} = 0. \tag{3.1}$$

Так как производная

$$\left(\frac{\partial}{\partial\rho}|F^{(\delta)}(\rho\zeta)|^p\right)_{\rho=r} = \left(\frac{\partial}{\partial\rho}F^{p/2}(\rho\zeta)\bar{F}^{p/2}(\rho\zeta)\right)_{\rho=r} =$$

$$pRe\left(\frac{|F_r^{(\delta)}|^p}{F_r^{(\delta)}}\left(F^{(\delta)}(r\zeta)\right)'_r\right) = \lim_{\Delta r\to 0}\frac{\Delta|F^{(\delta)}(r\zeta)|^p}{\Delta r}$$

непрерывна на $[\delta,\nu] \times \bar{D}$, то

$$\left(\frac{d}{d\rho}\|F_\rho^{(\delta)}\|_p\right)_{\rho=r} = \left[\frac{d}{d\rho}\left(\int\limits_D |F^{(\delta)}(\rho\zeta)|^p dA\right)^{1/p}\right]_{\rho=r} =$$

$$\frac{1}{p}\left(\int\limits_D \left(\frac{\partial}{\partial\rho}|F^{(\delta)}(\rho\zeta)|^p\right)_{\rho=r} dA\right)\left(\frac{1}{\|F_r^{(\delta)}\|_p}\right)^{p/q}.$$

Откуда и из (3.1), с учетом $(1-r)^\alpha\|F_r^{(\delta)}\|_p = 1$, $(1-r)^{\frac{\alpha p}{q}} = \frac{(1-r)^{\alpha p}}{(1-r)^\alpha}$, после простых преобразований получим равенство

$$\alpha r = (1-r)Re\left(\int\limits_D \frac{|(1-r)^\alpha F^{(\delta)}(r\zeta)|^p}{(1-r)^\alpha F^{(\delta)}(r\zeta)}(1-r)^\alpha\left(F^{(\delta)}(r\zeta)\right)'_r dA\right), \tag{3.2}$$

где $(F^{(\delta)}(r\zeta))'_r = \zeta g'(r\zeta) + \overline{\zeta a'(r\zeta)}$, $\zeta g' \in \{Q_N\}$. По лемме 2.1 и теореме А необходимо выполнение условия

$$\int\limits_D \frac{|F^{(\delta)}(r\zeta)|^p}{F^{(\delta)}(r\zeta)}\bar{\zeta}^n dA = 0,\ n = 1,2,\ldots.$$

Ряд Тейлора функции $\zeta a'(\zeta)$ равномерно сходится внутри D. Это позволяет провести почленное интегрирование в (3.2). Следуя принятым обозначениям, имея ввиду указанное выше условие, (3.2) сводим к равенству:

$$\alpha r = (1-r)Re\left(\int\limits_D \Omega(r,F^{(\delta)})(\zeta)(1-r)^\alpha r\zeta g'(r\zeta)dA\right).$$

Интеграл в правой части этого равенства оценим с помощью неравенства Гельдера. С учетом $\|\Omega(r,F^{(\delta)})\|_q = 1$, получим

$$\alpha r \leqslant (1-r)\left(\int\limits_D |(1-r)^\alpha r\zeta g'(r\zeta)|^p dA\right)^{1/p}. \tag{3.3}$$

Как в начале доказательства теоремы 2.1, $\|g+\bar{a}\| = 1$, заключаем, что $\|(1-r)^\alpha g_r\|_p \leqslant C_p$, где константа C_p не зависит от r. Пусть $B(r,\zeta) = (1-r)^\alpha g(r\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{N} b_n(r)\zeta^n$, тогда, $\frac{b_n(r)}{n+1} = \int\limits_D B(r,\zeta)\bar{\zeta}^n\, dA$. Откуда, по крайней мере,

$$|b_n(r)| \leqslant C_p(n+1).$$

Соответственно получим

$$|(1-r)^\alpha r\zeta g'(r\zeta)| \leqslant C_p \sum_{n=1}^{N+1} n^2 = C(p,N).$$

Откуда и из (3.3) следует оценка ($\delta < r < 1$)

$$\alpha \leqslant \frac{(1-\delta)C(p,N)}{\delta}.$$

Если нарушается последняя оценка, то на основании предыдущих рассуждений множество $m(\delta)$ не содержит точку из $(\delta,1)$. Стало быть, если при заданном $0 < \delta < 1$ показатель

$$\alpha > \frac{(1-\delta)C(p,N)}{\delta}, \tag{3.4}$$

то множество $m(\delta) = \delta$. И в этом случае по теореме 2.3 э.н.п. $X \in A\left(\frac{1}{\delta}\right)$. Но $\delta :\ 0 < \delta < 1$ в (3.4) можно взять сколь угодно малым, значит, $X \in A(\mathbb{C})$ по аналитичности. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2. *Если в задаче (1.2)* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $\omega \in A(R)$, *то элемент наилучшего приближения* $X \in A(R)$.

Доказательство. Пусть ω_N – частичная сумма ряда Тейлора функции $\omega \in A(R)$, X_N – соответствующий э.н.п. для $\bar{\omega}_N$ в задаче (1.2), $\lambda_N = \|\bar{\omega}_N - X_N\|_p$, $F_N = \frac{|\bar{\omega}_N - X_N|^p}{\bar{\omega}_N - X_N}$, $F^{(\delta)}_{N,\alpha} = g_{N,\alpha} + \bar{a}_{N,\alpha}$ – э.ф. функционала $l^{(\delta)}_{N,\alpha}$ над $\lambda^{(\delta)}_\alpha A_{p,N}$, $1 < p < \infty$, вида

$$l^{(\delta)}_{N,\alpha}(f) = \int\limits_D (1-\delta)^\alpha f(\delta\zeta)\bar{F}_N(\zeta)dA. \tag{3.5}$$

На основании рассуждений, проведенных в завершающей части доказательства теоремы 3.1, заключаем, что для $\delta : \frac{1}{R} < \delta < 1$ существует конечное

$$\alpha_N = \alpha_N(\delta,p) > \beta_N = \beta_N(\delta,p) = \inf\{\beta > 0 : m(\delta,F^{(\delta)}_{N,\beta}) = \delta\},$$

такое, что $m(\delta,F^{(\delta)}_{N,\alpha_N}) = \delta$. Причем, если э.ф. $F^{(\delta)}_{N,\alpha_N} = g_N + \bar{a}_N$, то аналогично (2.13) получим

$$(1-\delta)^{\alpha_N} g_N(\delta\zeta) + (1-\delta)^{\alpha_N}\bar{a}_N(\delta\zeta) = \frac{\omega_N(\zeta)}{\lambda_N} - \frac{\bar{X}_N(\zeta)}{\lambda_N}, \tag{3.6}$$

где $\|g_N + \bar{a}_N\| = 1$. Из (3.6) вытекает, что $X_N \in A\left(\frac{1}{\delta}\right)$. Положим

$$\mathcal{I}_\alpha(\rho) = \left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^\alpha \left\|\omega_N\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)\right\|_p .$$

Так как $\mathcal{I}_\alpha(\delta) = \|\omega_N\|_p \geqslant \|\bar{\omega}_N - X_N\|_p$, то выполняется неравенство

$$\lambda_N = \|\bar{\omega}_N - X_N\|_p \leqslant \sup_{\delta\leqslant\rho<1} \mathcal{I}_\alpha(\rho) := \sup \mathcal{I}_\alpha(\rho). \tag{3.7}$$

Допустим, что существует $\alpha > \alpha_N$, при котором (3.7) сводится к неравенству:

$$\lambda_N < \sup \mathcal{I}_\alpha(\rho). \tag{3.8}$$

Функция $\mathcal{I}_\alpha(\rho)$ дифференцируема по $\rho \in [\delta,1)$, причем, $\mathcal{I}_\alpha(\rho) \to 0$, когда $\rho \to 1$. Следовательно, имея ввиду $\mathcal{I}_\alpha(\delta) = \lambda_N$ и условие (3.8), найдется точка $\varepsilon \in (\delta,1)$, в которой достигается $\max \mathcal{I}_\alpha(\rho) > \lambda_N$. Тогда $\mathcal{I}'(\varepsilon) = 0$. Далее рассуждая как при выводе равенства (3.2), $\tau = 1/\delta$, получим

$$\alpha\mathcal{I}_\alpha(\varepsilon) =$$

$$(1-\varepsilon)\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\delta}\right)^\alpha Re\left(\int\limits_D \frac{|\omega_N(\tau\varepsilon\cdot)|^p}{\omega_N(\tau\varepsilon\cdot)}\tau\zeta\omega'_N(\tau\varepsilon\cdot)dA\right)\left(\frac{1}{\|\omega_N(\tau\varepsilon\cdot)\|_p}\right)^{p/q}.$$

Интеграл в правой части этого равенства оценим с помощью неравенства Гельдера, $\omega'_N \in A_p$. С учетом $1 < \tau < R$, $\delta < \varepsilon < 1$, $(1-\varepsilon)\tau = \tau - \frac{\varepsilon}{\delta} < \tau - 1$, получим оценку

$$\alpha\mathcal{I}_\alpha(\varepsilon) < \frac{(\tau-1)\|\omega_N(\tau\varepsilon\cdot)\|_p^{p-1}\|\omega'_N(\tau\varepsilon\cdot)\|_p}{\|\omega_N(\tau\varepsilon\cdot)\|_p^{p-1}} < (\tau-1)\|\omega'_N(\tau\zeta)\|_p.$$

Откуда, принимая во внимание, что $\mathcal{I}_\alpha(\varepsilon) > \lambda_N$, следует оценка

$$\alpha_N < \alpha = \alpha(\delta,N) < \frac{(\tau-1)\|\omega'_N(\tau\zeta)\|_p}{\lambda_N}. \tag{3.9}$$

Пусть теперь (3.7) обращается в равенство

$$\|\bar{\omega}_N - X_N\|_p = \sup \mathcal{I}_\alpha(\rho) = \sup \mathcal{I}_{\alpha_N}(\rho)$$

для всех $\alpha > \alpha_N$. Тогда, с учетом $\sup \mathcal{I}_\alpha(\delta) \leqslant \|\omega_N\|_p$ и X_N – э.н.п. для $\bar{\omega}_N$, будет

$$\|\bar{\omega}_N - X_N\|_p = \|\omega_N\|_p = \sup \mathcal{I}_{\alpha_N}(\rho), \tag{3.10}$$

т.е. в силу единственности э.н.п. $X_N = 0$ (в этом случае говорят, что функция $\bar{\omega}_N$ плохо приближаема элементами из A_p). Таким образом, построена последовательность $\{\alpha_N\}$, такая, что последовательность $\{X_N\} \in A\left(\frac{1}{\delta}\right)$. При этом согласно (3.9), $\tau = 1/\delta$, соответствующие

$$\alpha_N = \alpha_N(\delta,p) \leqslant \frac{(1-\delta)\left\|\omega'_N\left(\frac{\zeta}{\delta}\right)\right\|_p}{\delta\lambda_N}. \tag{3.11}$$

Из $\omega \in A(R)$ вытекает $\omega'_N \to \omega'$ в $D(R)$ при $N \to \infty$, $\lambda_N \to \lambda_p = \|\bar{\omega} - X\|_p$. Очевидно, $\lambda_p \geqslant \gamma > 0$ для $p > 1$. На основании оценки (3.11) последовательность $\{\alpha_N = \alpha_N(\delta,p)\}$ ограничена, значит, компактна. Пусть $\alpha_N \to \alpha_p(\delta)$ при $N \to \infty$, тогда согласно (3.11) $(1 < p < \infty)$

$$\alpha_p = \alpha_p(\delta) \leqslant \frac{(1-\delta)\left\|\omega'\left(\frac{\zeta}{\delta}\right)\right\|_p}{\delta\lambda_p}.$$

Как и ранее, с учетом $\|g_N + \bar{a}_N\| = 1$, имеем: $(1-\delta)^\alpha \|g_N(\delta\zeta)\|_p \leqslant C_p$. Отсюда, воспользовавшись оценкой роста функций из A_γ, $\gamma > 0$ (если $\varphi \in A_\gamma$, то $|\varphi(\zeta)| \leqslant \|\varphi\|_\gamma/(1-|\zeta|^2)^{2/\gamma}$ (см., например, [9, теорема 7.10])), получим

$$|g_N(\delta\zeta)| \leqslant \frac{C_p}{(1-\delta)^\alpha(1-|\zeta|^2)^{2/p}}.$$

Аналогичная оценка выполняется относительно $a_N(\delta\zeta)$. Следовательно, функции $g_N(\delta\zeta)$ и $a_N(\delta\zeta)$ ограничены внутри $D\left(\frac{1}{\delta}\right)$. По принципу компактности можем считать, что $g_N(\delta\zeta) \to g_p(\delta\zeta)$, $a_N(\delta\zeta) \to a_p(\delta\zeta)$ при $N \to \infty$. Перейдем в равенстве (3.6) к пределу при $N \to \infty$. Полагая $X_p := X$, получим ($\frac{1}{R} < \delta < 1$)

$$(1-\delta)^{\alpha_p} g_p(\delta\zeta) + (1-\delta)^{\alpha_p} \bar{a}_p(\delta\zeta) = \frac{\omega(\zeta)}{\lambda_p} - \frac{\bar{X}_p(\zeta)}{\lambda_p}. \tag{3.12}$$

Отсюда, как в завершающей части доказательства теоремы 2.3, $X_p \in A(R)$. Этим теорема доказана для $1 < p < \infty$.

Из равенства (3.12) следует, что

$$(1-\rho)^{\alpha_p}(g_p(\rho\zeta) + \bar{a}_p(\rho\zeta)) = \frac{1}{\lambda_p}\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\alpha_p}\left(\omega\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right) - \bar{X}_p\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)\right).$$

Откуда, в силу $\|g_p + \bar{a}_p\| = 1$, вытекает неравенство

$$\frac{1}{\lambda_p}\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\alpha_p}\left\|\bar{\omega}\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right) - X_p\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)\right\|_p \leqslant 1.$$

Так как $\omega \in A(R)$, то $\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\alpha_p}\left\|\omega\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)\right\|_p$ при каждом $\delta : \frac{1}{R} < \delta < 1$ ограничены равномерно по $p \in (1,2)$ и $\rho \in [\delta,1)$. Из предыдущего неравенства с помощью неравенства треугольника получим

$$\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\alpha_p}\left\|X_p\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)\right\|_p \leqslant C(\delta). \tag{3.13}$$

Как и ранее, воспользуемся оценкой роста функций из A_γ, $\gamma > 0$. Согласно (3.13) получим

$$\left|\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\alpha_p} X_p\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)\right| \leqslant \frac{C(\delta)}{(1-|\zeta|^2)^{2/p}}, \frac{1}{R} < \delta < 1. \tag{3.14}$$

Следовательно, семейство функций $\{X_p\}$ равномерно по $p \in (1,2)$ и $\rho \in [\delta,1)$ ограничено внутри $D(R)$, поэтому компактно относительно сходимости внутри $D(R)$. На основании [1, теоремы 2.2 и 4.1] э.н.п. X_1 в задаче (1.2) ($p = 1$) единственен и принадлежит H_1. Значит, в силу $H_\gamma \subset A_{2\gamma}$ (см., например, [9, теорема 2.8]), $X_1 \in A_p$ для $1 < p < 2$. Применяя неравенство Гельдера, $1 < p$, X_p - э.н.п. для $\bar{\omega}$, имеем

$$\|\bar{\omega}(\zeta) - X_p(\zeta)\|_1 \leqslant \|\bar{\omega}(\zeta) - X_p(\zeta)\|_p \leqslant \|\bar{\omega}(\zeta) - X_1(\zeta)\|_p. \tag{3.15}$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $p \to 1$. Без уменьшения общности полагаем, что $X_p \to X_* \in A(R)$. Интеграл $\int\limits_D |\bar{\omega} - X_1|^p dA$ представим как сумму интегралов $\Delta_1(p,r)$ и $\Delta_2(p,r)$ соответственно по $D_r = \{|\zeta| \leqslant r < 1\}$ и $K_r = D \backslash D_r$. Применяя неравенство треугольника, затем воспользовавшись неравенством Гельдера, $p_1 = 2/p$, $q_1 = 2/(2-p)$, заключаем, что

$$\Delta_2^{1/p}(p,r) \leqslant \|\omega\|_{L_p(K_r)} + \|X_1\|_{L_p(K_r)} \leqslant$$

$$\|\omega\|_{L_p(K_r)} + \|X_1\|_2 \left(\int\limits_{K_r} dA\right)^{\frac{2-p}{2p}} \to 0$$

при $r \to 1$ равномерно по $p \in (1{,}2)$ в силу $\mu(K_r) \to 0$ и $\omega \in A(R)$. Следовательно,

$$\lim_{p\to 1} \|\bar{\omega} - X_1\|_p = \lim_{r\to 1}\lim_{p\to 1} \Delta_1^{1/p}(p,r) = \|\bar{\omega} - X_1\|_1.$$

Вследствие этих рассуждений (3.15) сводится к неравенству $\|\bar{\omega} - X_*\|_1 \leqslant \|\bar{\omega} - X_1\|_1$, где функция $X_* \in A(R)$. Отсюда по единственности э.н.п. $X_1 = X_* \in A(R)$, когда $p = 1$. Это вместе с первой частью завершает доказательства теоремы 3.2.

Теорема 3.3. *Если в задаче (1.3),* $1 \leqslant p < \infty$, *то элемент наилучшего приближения* $Y \in A(\mathbb{C})$.

Доказательство основано на методе, разработанном в §2, и при $p > 1$ фактически повторяет доказательство аналогичной теоремы 3.1. В связи с этим для $p > 1$ ограничимся схемой доказательства. Случай $p = 1$, как и выше, требует индивидуального подхода.

Пусть $1 < p < \infty$ и $\omega \in \{Q_N\}$, Y – соответствующий э.н.п., по аналогии с (2.2) и (2.3) функция

$$\Phi(\zeta) = \frac{|\omega(\zeta) - Y(\zeta)|^p}{\omega(\zeta) - Y(\zeta)},$$

$L_\alpha^{(\delta)}$ – линейный функционал над $\Lambda_\alpha^{(\delta)} A_p$, определенный формулой

$$L_\alpha^{(\delta)}(f) = \int\limits_D (1-\delta)^\alpha f(\delta\zeta)\Phi(\zeta)dA, f \in \Lambda_\alpha^{(\delta)} A_p. \tag{3.16}$$

Пусть $\lambda_p^{(\delta)} = \|\omega - Y\|_p$, $f(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\zeta^n$, b_n – тейлоровы коэффициенты, $f_N(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{N} b_n\zeta^n$. Тогда на основании теоремы А и (3.15) $L_\alpha^{(\delta)}(f) = L_\alpha^{(\delta)}(f_N)$. Далее рассуждая как в доказательстве теоремы 2.1, заключаем, что функционал (3.16) имеет единственную э.ф. $\Phi^{(\delta)}$. Пусть $\Phi^{(\delta)}(\zeta) = k_p^{(\delta)}(\zeta) - e_p^{(\delta)}(\zeta)$, где $k_p^{(\delta)} \in \{Q_N\}$, $e_p^{(\delta)} \in E_N$. Продолжая рассуждать по аналогии, заключаем, что для каждого $0 < \delta < 1$ существует конечное $\alpha = \alpha(\delta,N,p)$, $1 < p < \infty$, такое, что

$$\lambda_p^{(\delta)}(1-\delta)^\alpha(k_p^{(\delta)}(\delta\zeta) - e_p^{(\delta)}(\delta\zeta)) = \omega(\zeta) - Y(\zeta) \tag{3.17}$$

(аналог равенства (3.12)). Из (3.17), $\omega \in \{Q_N\}$, $Y \in E_N$ и произвольности $0 < \delta < 1$ следует, что $Y \in A(\mathbb{C})$. Это доказывает теорему для $1 < p < \infty$.

Для доказательства при $p = 1$ понадобится

Лемма 3.1. *Если в задаче (1.3)* $p = 1$, *то* $Y \in H_1$.

Доказательство. Следуя доказательствам теорем 2.2 и 3.1 из [1], устанавливаем, что $\inf\{\|\omega - y\|_1 : y \in \{Q_{N+m}\}, m \geqslant 1\}$ достигается на единственном элементе $Y_m \in \{Q_{N+m}\}$, пусть $\lambda_m = \|\omega - Y_m\|_1$. С помощью формулы Грина, $t = e^{i\theta}$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\omega(t) - Y_m(t)|d\theta = \frac{i}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\omega(t) - Y_m(t)|td\bar{t} =$$

$$\int\limits_D \frac{\partial}{\partial\zeta}\left((\omega - Y_m)^{1/2}(\bar{\omega} - \bar{Y}_m)^{1/2}\right)\zeta dA + \int\limits_D |\omega - Y_m|dA =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_D \frac{|\omega - Y_m|}{\omega - Y_m}(\zeta\omega' - \zeta Y_m')dA + \lambda_m. \tag{3.18}$$

Так как $\zeta Y_m' \in \{Q_{N+m}\}$, $\omega - Y_m \neq 0$ п.в., то по теореме А ($p = 1$) интеграл $\int\limits_D \frac{|\omega - Y_m|}{\omega - Y_m}\zeta Y_m' dA = 0$. Теперь из (3.18) следует оценка

$$\|\omega - Y_m\|_{H_1} \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_D |\zeta\omega'| dA + \|\omega - Y_m\|_1. \tag{3.19}$$

Нормы $\|\omega - Y_m\|_1 \to \|\omega - Y\|_1$ и $Y_m \to Y$ внутри D при $m \to \infty$ (см. доказательство теоремы 2.2 из [1]). Следовательно, по (3.19), $\zeta\omega' \in \{Q_N\} \subset A_1$, последовательность $\{\omega - Y_m\}$ ограничена в H_1. Значит, $\|\omega_\rho - (Y_m)_\rho\|_{H_1} \leqslant C$, откуда, переходя к пределу при $m \to \infty$, заключаем, что $Y \in H_1$. Лемма 3.1 доказана.

Пусть в теореме 3.3 $p = 1$. Положим $Y := Y_p$ для $p \geqslant 1$. Опираясь на равенство (3.17) и рассуждая как при выводе (3.14), $\omega \in \{Q_N\}$, получим

$$\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^\alpha \left| Y_p\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)\right| \leqslant \frac{M(\delta)}{(1 - |\zeta|^2)^{2/p}}. \tag{3.20}$$

Откуда для $1 < p < 2$, с учетом $Y_1 \in H_1$ по лемме 3.1, $H_1 \subset A_2$, следует

$$\|\omega(\zeta) - Y_p(\zeta)\|_1 \leqslant \|\omega - Y_1\|_p.$$

Перейдем в последнем неравенстве к пределу при $p \to 1$. Имея ввиду (3.20), рассуждая как в доказательстве теоремы 3.2 при $p = 1$, заключаем, что $Y_1 \in A\left(\frac{1}{\delta}\right)$ для любого $\delta : 0 < \delta < 1$, т.е. при $p = 1$ э.н.п. $Y_1 \in A(\mathbb{C})$. Теорема 3.3 полностью доказана.

§4. Приложение

Сначала рассмотрим задачу для A_p о свойствах э.ф. Пусть l – линейный функционал над A_p, $1 \leqslant p < \infty$, $\omega \in A_q$, $1/p + 1/q = 1$, образованный функцией $\omega \in A_q$, т.е. определенный формулой

$$l(\varphi) = \int\limits_D \varphi(\zeta)\bar{\omega}(\zeta) dA, \varphi \in A_p. \tag{4.1}$$

Как обычно, функцию $\varphi_* \in A_p$ называем экстремальной для l, если $\|l\| = l(\varphi_*)$ и $\|\varphi_*\|_p = 1$.

Нам понадобится двойственная связь двух различных экстремальных задач относительно A_p. Именно, пусть $A_q^\perp = \{a \in L_q(D) : \int\limits_D a\varphi dA = 0 \,\text{для всех}\, \varphi \in A_p\}$. Тогда при $\omega \in C(\bar{D})$ и $1 \leqslant p < \infty$ справедливо равенство (см. [1, теорема 2.2 и теорема 3.1])

$$\|l\| = \sup\{|l(\varphi)| : \|\varphi\|_p \leqslant 1\} = \inf\{\|\bar{\omega} - a\|_q : a \in A_q^\perp\}. \tag{4.2}$$

Существуют единственные функции $f_* \in A_p$, $\|f_*\|_p = 1$, и $Z \in A_q^\perp$, для которых

$$\|l\| = \int\limits_D f_*(\zeta)\bar{\omega}(\zeta) dA = \|\bar{\omega} - Z\|_q. \tag{4.3}$$

Равенство (4.3) равносильно выполнению почти всюду в D соотношения

$$\frac{|f_*(\zeta)|^p}{f_*(\zeta)} = \frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\|l\|} - \frac{Z(\zeta)}{\|l\|}. \tag{4.4}$$

Теорема 4.1. *Если в функционале (4.1)* $1 \leqslant p < \infty$ *и* $\omega \in A(R)$, *то экстремальная функция* $f_* \in A(R)$.

Доказательство. Пусть $1 < p < \infty$ и ω_N – частичная сумма разложения ω в ряд Тейлора. Наряду с $l_N \in (A_p)^*$ вида

$$l_N(\varphi) = \int\limits_D \varphi(\zeta)\bar{\omega}_N(\zeta) dA, \varphi \in A_p,$$

рассмотрим функционал $l_{N,\alpha}^{(\delta)}$ над $\Lambda_\alpha^{(\delta)} A_{p,N}$ (см. определение 2.2), $\delta : 0 < \delta < 1$, вида

$$l_{N,\alpha}^{(\delta)}(f) = \int\limits_D (1-\delta)^\alpha f(\delta\zeta)\bar{\omega}_N(\zeta)dA, f \in \Lambda_\alpha^{(\delta)} A_p.$$

Следуя стандартным рассуждениям, проведенным в §2, (теорема 2.1), заключаем, что $l_{N,\alpha}^{(\delta)}$ имеет единственную экстремальную функцию $f_{N,\alpha}^{(\delta)}$. Далее, как в доказательстве теоремы 3.3, устанавливаем: для $\delta : 0 < \delta < 1$ существует конечное $\alpha_N = \alpha_N(\delta,p) = \inf\{\alpha > 0 : \|l_{N,\alpha}^{(\delta)}\| = \|l_N\|\}$. При этом, если f_N экстремальна для l_N, то для $\delta : 0 < \delta < 1$ существует конечное $\beta_N \geqslant \alpha_N$, такое, что

$$f_N(\zeta) = (1-\delta)^{\beta_N} f_{N,\beta_N}^{(\delta)}(\delta\zeta) \tag{4.5}$$

(для $p > 1$ и $\omega \in \{Q_N\}$ подробно об этом см. в [3]). Из равенства (4.5) следует, что $f_N \in A(\mathbb{C})$, когда в (4.1) $\omega \in \{Q_N\}$ и $p > 1$.

Докажем, что э.ф. $f_* \in A(R)$ при $p > 1$. Пусть Z_N – э.н.п. для $\bar{\omega}_N$ в соответствии с (4.4), $\frac{1}{R} < \delta < 1$. Для $\beta > \beta_N$, $\rho \in [\delta,1)$ положим

$$\mathcal{I}_\beta^*(\rho) = \left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^\beta \left\|\omega_N\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)\right\|_q.$$

Так как $\|\bar{\omega}_N - Z_N\|_q \leqslant \mathcal{I}_\beta^*(\delta) = \|\omega_N\|_q$, то выполняется неравенство

$$\lambda_N^* = \|\bar{\omega}_N - Z_N\|_q \leqslant \sup_{\delta \leqslant \rho < 1} \mathcal{I}_\beta^*(\rho) \tag{4.5$'$}$$

(аналог неравенства 3.7). Если в (4.5$'$) строгое неравенство для некоторого $\beta > \beta_N$, то аналогично (3.11) получим оценку

$$\beta_N = \beta_N(\delta,p) \leqslant \frac{(1-\delta)\left\|\omega_N'\left(\frac{\zeta}{\delta}\right)\right\|_q}{\delta\lambda_N^*} \tag{4.6}$$

Когда (4.5$'$) обращается в равенство для всех $\beta > \beta_N$, то аналогично (3.10) имеем:

$$\|\bar{\omega}_N - Z_N\|_q = \|\omega_N\|_q.$$

Тогда в силу единственности для $\bar{\omega}_N$ э.н.п. из $A_q^\perp$ элемент $Z_N = 0$. И относительно f_N соотношение (4.4) принимает вид:

$$\frac{|f_N(\zeta)|^p}{f_N(\zeta)} = f_N^{\frac{p}{2}-1}(\zeta)\overline{f_N^{\frac{p}{2}}(\zeta)} = \frac{\bar{\omega}_N(\zeta)}{\lambda_N^*}$$

почти всюду в D. Последнее по аналитичности f_N и ω_N возможно только в тривиальном для э.ф. функционала (4.1) случае $p = 2$ (при $p = 2$ э.ф. для (4.1) $f_*(z) = \omega(z)/\|\omega\|_2$). И в общем случае для β_N в (4.5) выполняется оценка (4.6), в которой $\delta : \frac{1}{R} < \delta < 1$. Соответственно, последовательность $\{\beta_N\}$ компактна, пусть $\beta_N \to \beta_p$. Перейдем в (4.5) к пределу при $N \to \infty$. Рассуждая по сложившейся схеме, получим, что э.ф. для функционала (4.1)

$$f_*(\zeta) = (1-\delta)^{\beta_p} f^{(\delta)}(\delta\zeta),$$

где функция $f^{(\delta)} \in A$, $\|f^{(\delta)}\| = 1$. Следовательно, $f_* \in A(R)$, когда $p > 1$. При этом в силу $(1-\rho)^{\beta_p} f^{(\delta)}(\rho\zeta) = \left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\beta_p} f_*\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)$, $\|f^{(\delta)}\| = 1$, выполняется оценка

$$\left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\beta_p} \left\|f_*\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)\right\|_p \leqslant 1. \tag{4.7}$$

Пусть теперь $p = 1$ и $\omega \in A(R)$. Обозначим $f_* := f_p$, $l := l_p$ для $p \geqslant 1$. Воспользовавшись оценкой роста функций из A_γ, (4.7) сводим к

$$\left|f_p\left(\frac{\rho\zeta}{\delta}\right)\right| \leqslant \left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\beta_p}(1-|\zeta|^2)^{-2/p}, \delta \leqslant \rho < 1, \frac{1}{R} < \delta < 1, \tag{4.8}$$

где множество $\{\beta_p\}$, $p > 1$, ограничено в силу оценки (4.6). Из (4.8) вытекает, что семейство функций $\{f_p(\zeta)\}$, $p > 1$, ограничено внутри $D(R)$, поэтому компактно относительно сходимости внутри этого круга. Пусть $|f_p(\zeta)| \leqslant M(\delta)$. Умножим обе части (4.4) на полином h и проинтегрируем по D. После преобразования получим равенство

$$l_1(h) = \int\limits_D h\bar{\omega}dA = \int\limits_D h(\zeta)\frac{\|l_p\||f_p(\zeta)|^p}{f_p(\zeta)}dA, \tag{4.9}$$

из которого следует, что $|l_1(h)| \leqslant \|l_p\|\|h\|_1 M^{p-1}$. Множество полиномов плотно в A_1, $M^{p-1} \to 1$ при $p \to 1$, и на основании последнего неравенства $\|l_1\| \leqslant \lim\limits_{p\to1}\|l_p\|$. Обратное неравенство вытекает из $\|f_p\|_1 \leqslant \|f_p\|_p = 1$. Следовательно, $\|l_1\| = \lim\limits_{p\to1}\|l_p\|$. Соответственно, пользуясь (4.9), получим

$$l_1(f_p) = \|l_p\| \to \|l_1\| \,\text{при}\, p \to 1. \tag{4.10}$$

Пусть $f_p \to f^*$ внутри $D(R)$, тогда $f_p(\zeta) \to f^*(\zeta)$ в D, $\|f^*\|_1 \leqslant 1$. Так как семейство $\{f_p(\zeta)\}$ ограничено в D, то на основании (4.1) и (4.10) при $p \to 1$, $\omega \in A(R)$, будем иметь, что

$$l_1(f_p) = \int\limits_D f_p\bar{\omega}dA \to \int\limits_D f^*\bar{\omega}dA = \|l_1\|.$$

Значит, $\|f^*\|_1 = 1$, и функция $f^* \in A(R)$ экстремальна для l_1. Теперь в силу единственности э.ф. f_* функционала l_1 $f_* = f^* \in A(R)$.

Теорема 4.1 доказана.

Перейдем к экстремальной задаче в H_p. Пусть $\omega \in A(R)$, S – линейный функционал над H_p, $1 \leqslant p < \infty$, образованный функцией ω, т.е. определенный формулой ($t = e^{i\theta}$)

$$S(\psi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\psi(t)\bar{\omega}(t)d\theta. \tag{4.11}$$

Э.ф. для функционала (4.11) определяем обычным образом. Как известно, если $p \in (1,\infty)$, то э.ф. для (4.11) существует и единственна, при $p = 1$ существует, но может быть неединственной.

В [6, теорема 3.2] методом вложения доказано, что экстремальная функция для функционала (4.11), $1 \leqslant p < \infty$, принадлежит $A(R)$.

Пусть $e_N = \{\psi \in H_p : \psi(\zeta) = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\psi_n\zeta^n$, ψ_n - тейлоровы коэффициенты$\}$, $H_p^0 = \{\psi \in H_p : \psi(0) = 0\}$.

Аналогами задач (1.2) и (1.3) являются следующие задачи относительно H_p, $1 \leqslant p < \infty$, о свойствах э.н.п. при

$$\omega \in H_p, X_* \in H_p^0 : \min\{\|\bar{\omega} - x\|_{L_p(\mathbb{T})} : x \in H_p^0\} = \|\bar{\omega} - X_*\|_{L_p(\mathbb{T})}, \tag{4.12}$$

$$\omega \in \{Q_N\}, Y_* \in e_N : \min\{\|\omega - y\|_{L_p(\mathbb{T})} : y \in e_N\} = \|\omega - Y_*\|_{L_p(\mathbb{T})}, \tag{4.13}$$

Теорема 4.2. *Если в задаче (4.12)* $1 < p < \infty$ *и* $\omega \in A(R)$*, то элемент наилучшего приближения* $X_* \in A(R)$.

Теорема 4.3. *Если в задаче (4.13)* $1 < p < \infty$*, то элемент наилучшего приближения* $Y_* \in A(\mathbb{C})$.

Доказательства теорем 4.2 и 4.3 при $p > 1$ проводятся по стандартизованному методу, разработанному в §2 и §3.

Отметим, что для $1 < p < 2$ теорема 4.2 доказана в [6, следствие 3.1].

Доказательство теоремы 4.2. Отнесем пространству $\Lambda_\alpha^{(\delta)} H_p$ совокупность функций $c \in A$, наделенных конечной нормой

$$\sup_{\rho \in [\delta,1)} (1-\rho)^\alpha \|c_\rho\|_{H_p}.$$

Пусть пространство

$$\Lambda_\alpha^{(\delta)} = \{f = c + \bar{d} : c,d \in \Lambda_\alpha^{(\delta)} H_p, d(0) = 0\}$$

и наделено нормой

$$\|f\|_* = \sup_{\rho \in [\delta,1)} (1-\rho)^\alpha \|c_\rho + \bar{d}_\rho\|_{L_p(\mathbb{T})}.$$

Как это хорошо известно, э.н.п. в задаче (4.12), $1 < p < \infty$, существует и единственен.

Пусть $1 < p < \infty$ и $\omega_N \in \{Q_N\}$, X_N^* – соответствующий э.н.п. в задаче (4.12), $\mu_N = \|\bar{\omega}_N - X_N^*\|_{L_p(\mathbb{T})}$. Ясно, что почти всюду $\bar{\omega} - X \neq 0$. Положим

$$\Phi_N(t) = \frac{|\bar{\omega}_N(t) - X_N^*(t)|^p}{\bar{\omega}_N(t) - X_N^*(t)}$$

и рассмотрим линейный функционал над $\Lambda_\alpha^{(\delta)}$ вида

$$L_\alpha^{(\delta)}(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1-\delta)^\alpha f(\delta t) \overline{\Phi}_N(t) d\theta.$$

Функцию $\Phi \in \Lambda_\alpha^{(\delta)}$ называем *экстремальной* для функционала $L_\alpha^{(\delta)}$, если $L_\alpha^{(\delta)}(\Phi) = \|L_\alpha^{(\delta)}\|$ и $\|\Phi\|_* = 1$.

Фактически повторяя доказательство теоремы 2.1, устанавливаем, что функционал $L_\alpha^{(\delta)}$ имеет единственную э.ф. Пусть функция $\Phi^{(\delta)} = k_N^{(\delta)} - \bar{e}_N^{(\delta)}$ экстремальна для $L_\alpha^{(\delta)}$. Следуя второй части доказательства теоремы 2.3, получим аналог равенства (2.13). Отсюда заключаем, что для $\delta : 0 < \delta < 1$ найдется конечное β_N, такое, что справедливо равенство

$$(1-\delta)^{\beta_N} k_N^{(\delta)}(\delta t) - (1-\delta)^{\beta_N} \bar{e}_N^{(\delta)}(\delta t) = \frac{\omega_N(t)}{\mu_N} - \frac{\bar{X}_N^*(t)}{\mu_N} \tag{4.14}$$

(аналог равенства (3.6)). Продолжая рассуждать по аналогии, получим оценку

$$\beta_N = \beta_N(\delta) \leqslant \frac{(1-\delta) \left\|\omega_N' \left(\frac{t}{\delta}\right)\right\|_{H_p}}{\delta \mu_N}, \tag{4.15}$$

аналогичную оценке (3.11). Из равенства (4.14) следует, что $X_N^*(\zeta) = \mu_N (1-\delta)^{\beta_N} e(\delta\zeta) \in A\left(\frac{1}{\delta}\right)$, значит, $X_N^* \in A(\mathbb{C})$ в силу произвольности $0 < \delta < 1$. И для $\omega \in \{Q_N\}$ теорема доказана.

Пусть теперь $\omega \in A(R)$, ω_N – частичная сумма разложения ω в ряд Тейлора. Из равенства (4.14) (с учетом, что его левая часть принадлежит единичной сфере из H_p), воспользовавшись теоремой о проектировании из $L_p(\mathbb{T})$ на H_p, $p > 1$ ($L_p(\mathbb{T}) = H_p \oplus \overline{H}_p^0$), имея ввиду $e_N^{(\delta)} \in \Lambda_{\beta_N}^{(\delta)} H_p$, заключаем, что

$$\|(1-\rho)^{\beta_N} e_N^{(\delta)}(\rho t)\|_{H_p} = \left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\beta_N} \left\| X_N^* \left(\frac{\rho t}{\delta}\right) \right\|_{H_p} \leqslant K_p.$$

Откуда на основании оценки роста функций из H_γ (если $\psi \in H_\gamma$, то $|\psi(\zeta)| \leqslant M_\gamma \|\psi\|_{H_\gamma}/(1 - |\zeta|^2)^{1/\gamma}$) следует оценка

$$\frac{1}{\mu_N} \left(\frac{1-\rho}{1-\delta}\right)^{\beta_N} \left| X_N^* \left(\frac{\rho t}{\delta}\right) \right| \leqslant \frac{K_p M_p}{(1-\rho)^{1/p}}, \frac{1}{R} < \delta < 1, \tag{4.16}$$

из которой вытекает, что последовательность $\{X_N^*\}$ ограничена внутри $D(R)$. Перейдем в равенстве (4.14) к пределу при $N \to \infty$. Тогда $\omega_N \to \omega$, $X_N^* \to X_*$ в H_p. $\mu_N \to \|\omega - X_*\|_{L_p(\mathbb{T})}$ С учетом (4.15), положим, $\beta_N \to \beta_p$. В итоге на основании (4.16) заключаем, что $X_* \in A(R)$. Теорема 4.2 доказана.

Доказательство теоремы 4.3 сразу вытекает из теоремы 4.2. Действительно, если $\omega(\zeta) = q_0 + \dots + q_N\zeta^N \in \{Q_N\}$, $x = x_{N+1}\zeta^{N+1} + x_{N+2}\zeta^{N+2} + \dots \in e_N$, то

$$\|\omega(t) - x(t)\|_{L_p(\mathbb{T})} = \left\| \frac{\omega(t)}{t^N} - \frac{x(t)}{t^N} \right\|_{L_p(\mathbb{T})}, \tag{4.17}$$

где $\frac{\omega(t)}{t^N} = \bar{w}(t)$, $w \in \{Q_N\}$, а $\frac{x(t)}{t^N} \in H_p^0$. Теперь из равенства (4.17), рассуждая как в первой части доказательства теоремы 4.2, получим требуемое. Теорема 4.3 доказана.

Замечание 4.1. *Теорема 4.3 эквивалентна теореме .1 из [6] о принадлежности $A(\mathbb{C})$ э.ф. для функционала (4.11), образованного $\omega \in \{Q_N\}$.*

Подробности опускаем по техническим причинам.

Согласно [2, формула (5.3)] э.ф. $\psi_N(z)$ для функционала (4.11) над H_p, $1 < p < \infty$, $\omega \in \{Q_N\}$, имеет форму

$$\psi_N(z) = C_N \prod_1^k \frac{z - \beta_j}{1 - \bar{\beta}_j z} \prod_1^N (1 - \bar{\alpha}_j z)^{2/p}, \tag{4.18}$$

где C_N – константа, $k \leqslant N$, $|\beta_j| < 1$, $|\alpha_j| = 1$.

Замечание 4.2. *Приведенное выше утверждение о форме э.ф. в H_p ошибочно при $p \in (1{,}2) \cup (2{,}\infty)$.*

Действительно, по [6, теорема 3.2] э.ф. $\psi_N \in A(\mathbb{C})$. А функция из правой части (4.18) имеет полюсы в точках $1/\bar{\beta}_j$, а $1/\bar{\alpha}_j$ являются точками ветвления при $p \in (1{,}2) \cup (2{,}\infty)$. Поэтому она аналитически продолжима в $\mathbb{C}$, $p \neq 2$, только при $\beta_j = 0$ и $\alpha_j = 0$, т.е. $\psi_N(z) = C_N z^k$, где $|C_N| = 1$ в силу $\|\psi_N\|_{H_p} = 1$.

Для $\psi \in H_p$, $\|\psi\|_{H_p} = 1$, $\beta \in D$ и $\omega_N^*(z) = 1 + \dots + z^N$ выполняется

$$\psi(\beta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta}) \left(\frac{1}{1 - \beta e^{-i\theta}}\right) d\theta = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(e^{i\theta}) \omega_N^*(\beta e^{-i\theta})\, d\theta \right).$$

Выражения под знаком предела в правой части этого равенства воспринимаем как значения линейных функционалов l_N над H_p, образованных $\omega_N^*(\beta z)$. Тогда на основании предыдущего, $\omega_N^* \in \{Q_N\}$, как легко видеть $\|l_N\| \leqslant 1$. Следовательно, $|\psi(\beta)| \leqslant 1$, как только $\beta \in D$ и $\|\psi\|_{H_p} \leqslant 1$. Получаем противоречие, что подтверждает справедивость замечания 4.2.

В [2, теорема 6.1 (см. также [12])] говорится, что э.ф. для функционала (4.1), $\omega \in \{Q_N\}$, имеет форму

$$f_N(z) = C_N \prod_1^\infty \frac{z - \beta_j}{1 - \bar{\beta}_j z} \frac{|\beta_j|}{\beta_j} \prod_1^N (1 - \bar{\alpha}_j z)^{2/p}, \tag{4.19}$$

где C_N – константа, $|\beta_j| < 1$, $|\alpha_j| = 1$.

Имея ввиду теорему 4.1, аналогично предыдущему убеждаемся, что упомянутая выше теорема 6.1 ошибочна.

В завершение работы отметим, что метод вложения является эффективным в исследовании достаточно широкого круга экстремальных задач в пространствах суммируемых аналитических функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Khavinson, D. Best approximation in the Mean by Analytic and Harmonic Functions / D. Khavinson, J. E. McCarthit , H. Shapiro // Arc. Mat. — 2001. — № 39. — P. 339–359.

2. Beneteau, C. A survey of linear extremal problems in analytic function spaces / C. Beneteau, D. Khavinson // Complex Analysis and Potential Theory. CRM Proc. Lecture Notex. — 2012. — V. 55. — P. 33–46.

3. Бурчаев, Х. Х. Аналитичность в $\mathbb{C}$ экстремальных функций функционалов, образованных полиномами над пространством Бергмана / Х. Х. Бурчаев, В. Г. Рябых, Г. Ю. Рябых // Математический форум (Итоги науки. Юг России). — 2014. — Т. 8, ч. 1. — С. 204–214.

4. Ferguson T. Continuity of extremal elements in uniformly convex spaces / T. Ferguson // Arc. Mat. — 2009. — № 137:8. — P. 2645–2653.

5. Рябых, В. Г. Приближение неаналитических функций аналитическими / В. Г. Рябых // Матем.сб. — 2006. — Т. 191, № 2. — С. 87–94.

6. Бурчаев, Х. Х. Об одной экстремальной задаче в пространстве H_p, $0 < p < \infty$ / Х. Х. Бурчаев, В. Г. Рябых, Г. Ю. Рябых // СМЖ. — 2017. — Т. 58, № 8. — С. 510–525.

7. Тихомиров, В. М. Некоторые вопросы теории приближений / В. М. Тихомиров. — М. : МГУ, 1976.

8. Захарюта, В. П. Общий вид линейного функционала в H'_p / В. П. Захарюта, В. И. Юдович // УМН. — 1964. — Т. XIX, № 2(116). — С. 139–142.

9. Пожарский, Д. А. Интегральные операторы в пространствах аналитических функций и близких к ним / Д. А. Пожарский, В. Г. Рябых, Г. Ю. Рябых. — Ростов н/Д. : Изд-во ДГТУ, 2011.

10. Соболев, С. Л. Введение в теорию кубатурных формул / С. Л. Соболев. — М. : Наука, 1974.

11. Экланд, И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы / И. Экланд, М. Темам. — М. : Мир, 1979.

12. Khavinson, D. Certain linear extremal problems in Bergman spaces of analytic functions / D. Khavinson, M. Stessin // Indiana Univ. Math. J. — 1997. — V. 46, № 3. — P. 933–974.

REFERENCES

1. Khavinson D., McCarthit J.E., Shapiro H. Best approximation in the Mean by Analytic and Harmonic Functions. Arc. Mat., 2001, no. 39, pp. 339–359.

2. Beneteau C., Khavinson D. A survey of linear extremal problems in analytic function spaces. Complex Analysis and Potential Theory. CRM Proc. Lecture Notex, 2012, vol. 55, pp. 33–46.

3. Burchayev H.H., Ryabikh V.G. Ryabikh G.Y. Analiticity in $\mathbb{C}$ of extremal functions of a functional formed by polynomial on bergman space. [Burchaev X.X., Ryabyx V.G., Ryabyx G.Yu. Analitichnost’ v $\mathbb{C}$ ekstremal’nyx funkciyj funkcionalov, obrazovannyx polinomami nad prostranstvom Bergmana]. *Matematicheskiyj forum (Itogi nauki. Yug Rossii) — Mathematical Forum (Results of Science. South of Russia)*, 2014, vol. 8, part 1, pp. 204–214.

4. Ferguson T. Continuity of extremal elements in uniformly convex spaces. Arc. Mat., 2009, no. 137:8, pp. 2645–2653.

5. Ryabykh V.G. Approximation of non-analytic functions by analytic ones. [Ryabyx V.G.

Priblizhenie neanaliticheskix funkciyj analiticheskimi]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 191, no. 2, pp. 87–94.

6. Burchaev Kh.Kh., Ryabykh V.G., Ryabykh G.Yu. On an extremal problem in the space H_p, $0 < p < \infty$. [Burchaev X.X., Ryabyx V.G., Ryabyx G.Yu. Ob odnoyj ekstremal'noyj zadache v prostranstve H_p, $0 < p < \infty$]. *SMZH — CSF*, 2017, vol. 58, no. 8, pp. 510–525.

7. Tikhomirov V.M. Some questions of approximation theory. [Tixomirov V.M. Nekotorye voprosy teorii priblizheniyj]. Moscow, 1976.

8. Zakharyuta V.P., Yudovich V.I. General view of the linear functional in H'_p. [Zaxaryuta V.P., Yudovich V.I. Obshhiyj vid lineyjnogo funkcionala v H'_p]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1964, vol. XIX, iss. 2(116), pp. 139–142.

9. Pozharsky D.A., Ryabykh V.G., Ryabykh G.Yu. Integral operators in spaces of analytic functions and those close to them. [Pozharskiyj D.A., Ryabyx V.G., Ryabyx G.Yu. Integral'nye operatory v prostranstvax analiticheskix funkciyj i blizkix k nim]. Rostov-on-Don, 2011.

10. Sobolev S.L. Introduction to the theory of cubature formulas. [Sobolev S.L. Vvedenie v teoriyu kubaturnyx formul]. Moscow, 1974.

11. Ekland I., Temam M. Convex Analysis and Variational Problems. [Ekland I., Temam M. Vypuklyyj analiz i variacionnye problemy]. Moscow, 1979.

12. Khavinson D., Stessin M. Certain linear extremal problems in Bergman spaces of analytic functions. Indiana Univ. Math. J., 1997, vol. 46, no. 3, pp. 933–974.

Бурчаев Хайдар Хасанович, Чеченский государственный университет, доцент, кандидат физико – математических наук, доцент, Грозный, Чеченская Республика, Россия
E-mail: bekhan.burchaev@gmail.com

Burchaev Haydar Khasanovich, Chechen State University, Associate Professor Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Grozny, Chechen Republic, Russia
E-mail: bekhan.burchaev@gmail.com

Рябых Галина Юрьевна, Донской государственный технический университет, профессор, кандидат физико – математических наук, доцент, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: ryabich@aaanet.ru

Ryabykh Galina Yuryevna, Don State Technical University, Professor Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: ryabich@aaanet.ru