УДК 517.956

О ПОВЕДЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ*

А. Д. Баев, Н. А. Бабайцева, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 30.12.2019 г.

Аннотация. Статья посвящена исследованию свойств следов на бесконечности одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с постоянным символом, зависящим от параметра. Рассматривается новый класс вырождающихся псевдодифференциальных операторов с постоянными символами, зависящими также от комплексного параметра. Псевдодифференциальные операторы построены по специальному интегральному преобразованию.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор с вырождением, след псевдодифференциального с вырождением, весовые пространства С. Л. Соболева.

ON THE BEHAVIOR AT INFINITY OF A CLASS OF DEGENERATE PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS

A. D. Baev, N. A. Babaytseva, A. A. Babaytsev, V. D. Kharchenko

Abstract. The article is devoted to the study of the properties of traces at infinity of a class of degenerate pseudo-differential operators with a constant symbol that depends on the parameter. We consider a new class of degenerate pseudo-differential operators with constant symbols that also depend on a complex parameter. Pseudo-differential operators are constructed using a special integral transformation.

Keywords: pseudodifferential operator with degeneracy, trace of pseudodifferential operator with degeneracy, S. L. Sobolev weight spaces.

ВВЕДЕНИЕ

Теория вырождающихся уравнений в настоящее время интенсивно развивается. Это связано с математическим моделированием вырождающихся процессов, то есть процессов, в которых границы области существенно влияет на процессы, происходящие внутри области. Краевые задачи, описывающие эти процессы относятся к неклассическим задачам математической физики. Такие краевые задачи используются при исследовании стационарных процессов конвекции – диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким задачам приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде, процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные задачи возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются, например, обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции —

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 19.11.00197), выполняемого в Воронежском государственном университете.

диффузии. Кроме того, известно, что нахождение решения краевой задачи для эллиптического уравнения эквивалентно минимизации некоторого функционала. В теории управления задача о минимуме некоторого функционала соответствует задаче об оптимальном управлении. Вырождающимся эллиптическим уравнениям соответствуют вырожденные или особые оптимальные управления.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка и граничных задач для них было начато в работах М. В. Келдыша [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [3] и М. И. Вишика [4]. В работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [5] было начато исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения). В работах В. П. Глушко [6], С. З. Левендорского [7], А. Д. Баева, Р. А. Ковалевского, А. А. Бабайцева [8–15] был получен ряд результатов для некоторых классов вырождающихся уравнений высокого порядка при произвольном характере вырождения.

Настоящая работа посвящена исследованию свойств на бесконечности нового класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с постоянным символом, зависящим от комплексного параметра.

Вырождающиеся псевдодифференциальные операторы построены по специальному интегральному преобразованию F_α, введенному в [8]. Некоторые классы вырождающихся псевдодифференциальных операторов были иследованы в работах [16–18].

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(\mathrm{t}) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(\mathrm{t}) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором$d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dy}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

определенное первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(R^1_+)$ - пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R^1_+. Преобразование (1) и преобразование Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau$, $\eta \in R^1$ связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}. \tag{3}$$

Равенство (3) даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное к F_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}_+^1)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D_{\alpha,t}^j u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1,2,...,\text{где} \quad D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\ \ \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(R_+^n); H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ следующим образом.

Определение 1. Пространство$H_{s,\alpha}(R_+^n)$(s – действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha}^2 = \int\limits_{R^n} (|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \left|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]\right|^2 d\xi d\eta, \tag{4}$$

зависящая от комплексного параметра $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$.

Определение 2. Пространство $H_{s,\alpha,q}(R_+^n)$ $(s \geqslant 0,\ q > 1)$ состоит из всех функций $v(x,y) \in H_{s,\alpha}(R_+^n)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F_{\xi\to x}^{-1} F_\alpha^{-1}[(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial_y^l v]]\right\|_{L_2(R_+^n)}^2 \}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(y) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \dfrac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \dfrac{l}{2}\}$, $l = 1,\ 2...,$ σ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$G^{(\sigma)}(p,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F_{\xi\to x}^{-1}[\lambda(p,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{6}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $\lambda(p,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $G^{(\sigma)}(p,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу символов $S_{\alpha,\rho}^{\sigma,p}$, где $\sigma \in \mathrm{R}^1, p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, если функция $\lambda(p,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2,...,$ $l = 0,\ 1,\ 2,...$ справедливы оценки

$$|\partial_\eta^l \lambda(p,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(|p|^2 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-\rho l} \tag{7}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $\rho \in (0;1]$. Здесь σ — действительное число.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(p,\xi,\eta)$ вырождающегося псевдодифференциального оператора $G^{(\sigma)}(p,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S_{\alpha,\rho}^{\sigma,p}$, $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, $\sigma \in R^1, \rho \in (0;1]$. Пусть функция $v(x,t)$ такова, что функция $D_{\alpha,t}^N v(x,t)$ при всех $x \in R^{n-1}$ принадлежит, как функция переменной t пространству $L_2(R_+^1)$ при некотором $N \in [\frac{1}{\rho}\max\{\sigma + 1; 1\}; s_1]$, где s_1 определено в условии 1. Пусть $\lim\limits_{t\to+\infty} D_{\alpha,t}^j v(x,t) = 0$ при всех $x \in R^{n-1}$, $j = 0,1,2,...,N - 1$. Тогда при всех $x \in R^{n-1}$ справедливо равенство $\lim\limits_{t\to+\infty} G^{(\sigma)}(p,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = 0$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Воспользовавшись формулой Тейлора, получим равенство

$$\lambda(p,\xi,\eta) = \lambda(p,\xi,0) + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(p,\xi,0)\eta^i + g_N(p,\xi,\eta)\eta^N, \tag{1.1}$$

где

$$\begin{cases} \lambda_i(p,\xi,\eta) = \frac{1}{i!}\partial_\eta^i \lambda(p,\xi,\eta) \\ g_N(p,\xi,\eta) = N\int\limits_0^1 \lambda_N(p,\xi,\theta\eta)(1-\theta)^{N-1}d\theta. \end{cases} \tag{1.2}$$

Обозначим

$$G^{(\sigma)}(p,\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t) = F_\alpha^{-1}[\lambda(p,\xi,\eta)F_\alpha[u(\xi,t)]],\ u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[v(x,t)].$$

Таким образом, получаем равенство

$$\begin{gathered} G^{(\sigma)}(p,\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t) \equiv \lambda(p,\xi,0)u(\xi,t) + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i(p,\xi,0)D_{\alpha,t}^i u(\xi,t) + \\ + F_\alpha^{-1}[g_N(p,\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u]]. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Выберем число N так, чтобы $\frac{1}{\rho}\max(\sigma+1,1) < N \leqslant s_1$. Тогда по условию теоремы 1 получим, что при любом фиксированном $\xi \in R^{n-1}$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+\infty} G^{(\sigma)}(p,\xi,D_{\alpha,t})u(\xi,t) = \lim_{t\to+\infty} F_\alpha^{-1}[g_N(p,\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)]]. \tag{1.4}$$

Из (1.4) вытекает, что для доказательства теоремы 1 остается установить равенство

$$\lim_{t\to+\infty} F_\alpha^{-1}[g_N(p,\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)]] = 0. \tag{1.5}$$

Так как $\alpha(t) = const > 0$ при $t \geqslant d > 0$, то с помощью определения преобразования F_α^{-1} находим

$$\lim_{t\to+\infty} F_\alpha^{-1}[g_N(p,\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)]] = \frac{1}{c}\lim_{t\to+\infty} F_{\eta\to\tau}^{-1}[g_N(p,\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u]\ ]|_{\tau=\varphi(t)} =$$

$$= \frac{1}{c}\lim_{\tau\to-\infty} F_{\eta\to\tau}^{-1}[g_N(\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)]]. \tag{1.6}$$

Следовательно, из (1.5) и (1.6) вытекает, что для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что

$$\lim_{\tau\to-\infty} F_{\eta\to\tau}^{-1}[g_N(p,\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)]] = 0. \tag{1.7}$$

Равенство (1.7) докажем с помощью известной леммы Римана–Лебега. Из этой леммы следует, что равенство (1.7) справедливо, если при каждом $\xi \in R^{n-1}$, $p \in Q$ справедливо включение

$$g_N(p,\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u(\xi,t)] \in L_1(R^1). \tag{1.8}$$

Докажем включение (1.8). Из (1.2) получим

$$|g_N(\xi,\eta)| \leqslant c\int\limits_0^1 (|p|^2 + |\xi|^2 + (\theta\eta)^2)^{\frac{1}{2}(\sigma-\rho N)}d\theta,\ \rho \in (0;1].$$

Следовательно, при $N > \frac{1}{\rho}\max\{\sigma+1,1\}$, получим

$$|\eta g_N(p,\xi,\eta)| \leqslant c\int\limits_0^{|\eta|} (|p|^2+|\xi|^2+\theta_1^2)^{\frac{1}{2}(\sigma-\rho N)}d\theta_1 \leqslant \widetilde{c} < \infty. \tag{1.9}$$

Из (1.9) заключаем, что функция $g_N(p,\xi,\eta)$ принадлежит по переменной η при каждом $\xi \in R^{n-1}$, $p \in Q$ пространству $L_2(R^1)$ (так как она непрерывна и $|g_N(p,\xi,\eta)| \leqslant \frac{c}{|\eta|}$ при $|\eta| \to \infty$). Кроме того, по условию теоремы 1, функция $D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)$ принадлежит (по t) пространству $L_2(R^1_+)$ при каждом $\xi \in R^{n-1}$. Тогда функция $F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u](\xi,\eta)$ принадлежит (по η) пространству $L_2(R^1)$ при каждом $\xi \in R^{n-1}$.

Таким образом, имеем оценку

$$\left\|g_N(\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u(\xi,t)]\right\|_{L_1(R^1)} \leqslant \|g_N(\xi,\eta)\|_{L_2(R^1)}\left\|F_\alpha[D^N_{\alpha,t}u]\right\|_{L_2(R^1)} \leqslant c < \infty.$$

Из последней оценки вытекает включение (1.8), которое доказывает утверждение теоремы 1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш, М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Олейник, О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук СССР. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885–887.

3. Михлин, С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. — 1954. — № 8. — С. 19–48.

4. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сб. — 1954. — Т. 35 (77), вып. 33. — С. 513–568.

5. Вишик, М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4. — С. 29–56.

6. Глушко, В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : Труды семинара акад. С. Л. Соболева. — 1978. — № 2. — С. 49–68.

7. Левендорский, С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С. З. Левендорский // Математический сб. — 1980. — Т. 111 (153), вып. 4. — С. 483–501.

8. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

9. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

10. О существовании решений граничных задач в полупространстве для некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 64–76.

11. Об априорных оценках решений граничных задач для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 77–92.

12. Об априорных оценках решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 64–76.

13. О существовании решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 51–66.

14. Баев, А. Д. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, В. В. Панков, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 161–171.

15. О некоторых начально-краевых задачах для вырождающихся параболических уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 1. — С. 59–69.

16. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

17. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Н. И. Работинская // Доклады академии наук. — 2017. — Т. 477, № 1. — С. 7–10.

18. Баев, А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

REFERENCES

1. Keldysh M.V. On some cases of degeneracy of elliptic type equations at the boundary of the domain. [Keldysh M.V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravneniyj ellipticheskogo tipa na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

2. Oleinik O.A. On the equations of the elliptic type, which are degenerate on the boundary of the domain. [Oleinik O.A. Ob uravneniyax ellipticheskogo tipa, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1952, vol. 87, no. 6, pp. 885–887.

3. Mikhlin S.G. Degenerate elliptic equations. [Mixlin S.G. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya]. *Vestnik Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of the Leningrad State University*, 1954, no. 8, pp. 19–48.

4. Vishik M.I. Boundary value problems for elliptic equations degenerating on the boundary of the domain. [Vishik M.I. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1954, vol. 35 (77), iss. 33, pp. 513–568.

5. Vishik M.I., Grushin V.V. Degenerate elliptic differential and pseudo-differential operators. [Vishik M.I., Grushin V.V. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, iss. 4, pp. 29–56.

6. Glushko V.P. The theorems of solvability of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi: Trudy seminara akad. S.L. Soboleva — Differential equations*

with partial derivatives. Acad seminar. S.L. Sobolev, 1978, no. 2, pp. 49–68.

7. Levendorsky S.Z. Boundary value problems in a half-space for quasielliptic pseudodifferential operators degenerate on the boundary. [Levendorskiyj S.Z. Kraevye zadachi v poluprostranstve dlya kvaziellipticheskix psevdodifferencial'nyx operatorov, vyrozhdayushhixsya na granice]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1980, vol. 111 (153), iss. 4, pp. 483–501.

8. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

9. Baev A.D. On General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

10. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A. On the existence of solutions to boundary value problems in a half-space for some classes of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. O sushhestvovanii resheniyj granichnyx zadach v poluprostranstve dlya nekotoryx klassov vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 64–76.

11. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A. On a priori estimates for solutions of boundary value problems for a class of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. Ob apriornyx ocenkax resheniyj granichnyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 77–92.

12. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Lezhenina I.F., Glushko A.V. A priori estimates for solutions of general boundary value problems in a half-space for degenerate elliptic equations. [Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Lezhenina I.F., Glushko A.V. Ob apriornyx ocenkax resheniyj obshhix granichnyx zadach v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 64–76.

13. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Kharchenko V.D. On the existence of solutions to general boundary value problems in a half-space for degenerate elliptic equations. [Baev A.D., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Kharchenko V.D. O sushhestvovanii resheniyj obshhix granichnyx zadach v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 51–66.

14. Baev A.D., Pankov V.V., Kharchenko V.D. On an a priori estimate for solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation. [Baev A.D., Pankov V.V., Kharchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 161–171.

15. Baev A.D., Nayduk F.O., Babaytsev A.A., Kharchenko V.D., Lezhenina I.F., Pletneva O.K. On some initial boundary value problems for degenerate parabolic equations. [Baev A.D., Nayjdyuk F.O., Babayjcev A.A., Xarchenko V.D., Lezhenina I.F., Pletneva O.K. O nekotoryx

nachal'no-kraevyx zadachax dlya vyrozhdayushhixsya parabolicheskix uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 59–69.

16. Baev A.D., Kobylinsky P.A. On some properties of one class of degenerate pseudo-differential operators. [Baev A.D., Kobylinskiyj P.A. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 2015, vol. 460, no. 2, pp. 133–135.

17. Baev A.D., Rabotinsky N.I. On some properties of a class of degenerate pseudodifferential operators. [Baev A.D., Rabotinskaya N.I. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 2017, vol. 477, no. 1, pp. 7–10.

18. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Kobylinsky P.A. On degenerate high-order elliptic equations and pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A.D., Kovalevskiyj R.A., Kobylinskiyj P.A. O vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyax vysokogo poryadka i psevdodifferencial'nyx operatorax s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2016, vol. 471, no. 4, pp. 387–390.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бабайцева Наталия Алексеевна, аспирант Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация

Babaitseva Natalia Alekseevna, graduate student of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

Бабайцев Андрей Александрович, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: 259608@mail.ru

Babaitsev Andrey A., student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: 259608@mail.ru

Харченко Виктория Дмитриевна, студент Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация

Kharchenko Victoria Dmitrievna, student of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation