УДК 517.927.4

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ*

Д. А. Чечин, М. В. Шаброва, М. Б. Зверева, С. А. Шабров, П. В. Садчиков

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 30.04.2020 г.

Аннотация. В работе получены достаточные условия существования нескольких решений у нелинейной граничной задачи второго порядка с разрывными решениями. При анализе решений изучаемой краевой задачи, мы используем поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным и показавший свою эффективность при изучении задач второго порядка. На основе полученных ранее оценок функции Грина граничной задачи удалось показать, что оператор, обращающий изучаемую нелинейную задачу, представимый в виде суперпозиции вполне непрерывного и непрерывного операторов, действует из конуса неотрицательных непрерывных функций в более узкое множество. Это обстоятельство и позволяет доказать существование нескольких решений у нелинейной граничной задачи с привлечением теории пространств с конусом.

Ключевые слова: граничная задача, нелинейная задача, число решений, производная по мере, разрывное решение.

ON THE NUMBER OF SOLUTIONS TO THE SECOND-ORDER NONLINEAR BOUNDARY BOUNDARY PROBLEM WITH DISCONTINUOUS SOLUTIONS

D. A. Chechin, M. V. Shabrova, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov, P. V. Sadchikov

Abstract. In this work, sufficient conditions for the existence of several solutions of the second-order nonlinear boundary value problem with discontinuous solutions are obtained. In the analysis of the solutions of the boundary value problem of the fourth order, we use the point approach proposed by Yu. V. Pokorny and showed its effectiveness in the study of second-order boundary value problems. Based on previously obtained estimates of the Green's function of the boundary-value problem, it was possible to show that the operator inverting the studied nonlinear problem, representable as a superposition of completely continuous and continuous operators, acts from a cone of non-negative continuous functions in a narrower set. The latter allows us to prove the existence of several solutions to a nonlinear boundary value problem using the theory of spaces with a cone.

Keywords: boundary value problem, nonlinear problem, number of solutions, measure derivative, non-smooth solution.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РНФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверсите и гранта РФФИ (проект № 20–51–15003 НЦНИ–а)

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивно изучаются дифференциальные уравнения с производными по мере. Так, для линейных уравнений второго порядка построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений вплоть до осцилляционных теорем (см. [1–6]), получен ряд результатов для нелинейных краевых задач [7, 8].

Отметим, что эффективность использования производных по мере объясняется следующим обстоятельством: для применения качественных методов анализа (теорем типа Ролля) решений дифференциальных уравнений необходимо знать значения функции и её производных в каждой точке, что с позиций теории обобщённых функций затруднительно. Здесь можно отметить работу Мышкиса А.Д. [9] — доказательство аналога теоремы Штурма о перемежаемости нулей для уравнения $u'' + qu = 0$ с обобщённым коэффициентом q.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется получить достаточные условия существования нескольких различных решений задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + uQ'_{[\sigma]} = f(x,u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

возникающей, например, при моделировании деформаций разрывной струны (цепочки из струн, скрепленных между собой пружинами), натянутой вдоль отрезка $[0,\ell]$, и подпертой (не более чем в счетном количестве точек), как обычными пружинами, деформации которых подчиняются закона Гука, так и пружинами с разными витками, деформации которых закону Гука не подчиняются и задаются некоторой функцией. При этом к отдельным точкам струны могут быть приложены нелинейные импульсные внешние воздействия.

В уравнении из (1) внутренняя производная понимается как производная по обычной мере, которая порождается некоторой строго возрастающей функцией, внешняя — как производная по «расщепленной» мере, понимаемая нами в смысле Ю. В. Покорного, т. е. обращаемая интегрированием с помощью π–интеграла. Последнее означает, что функция $g(x)$ называется $[\sigma]$-производной от функции $G(x)$, если $G(x) - G(0) = \int\limits_0^x g(s)\, d[\sigma]$. Таким образом, во всякой точке ξ разрыва функции $\sigma(x)$ у функции $g(x)$ возникает два собственных значения, вообще говоря, отличных от предельных, определяемых равенствами $g(\xi^1) = G'_{[\sigma]}(\xi^1) = \dfrac{\Delta^- G(\xi)}{\Delta^- \sigma(\xi)}$ и $g(\xi^2) = G'_{[\sigma]}(\xi^2) = \dfrac{\Delta^+ G(\xi)}{\Delta^+ \sigma(\xi)}$. Здесь $\Delta^- G(\xi) = G(\xi) - G(\xi - 0)$ и $\Delta^+ G(\xi) = G(\xi + 0) - G(\xi)$.

Уравнение (1) рассматривается на специальном расширении $\overline{[0;\ell]}_{[\sigma]}$ отрезка $[0;\ell]$, которое строится следующим образом. Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. На множестве $J_\mu = [0;\ell] \backslash S(\mu)$ введем метрику $\rho(x;y) = |\mu(x) - \mu(y)|$. Метрическое пространство J_μ является неполным. Обозначим через $\overline{[0;\ell]}_\mu$ его стандартное пополнение. Множество $\overline{[0;\ell]}_\mu$ вместо каждой точки ξ разрыва функции $\mu(x)$ содержит элементы $\{\xi^1;\xi^2\}$, появившиеся при пополнении. При этом $x < \xi^1 < \xi^2 < y$ в смысле естественной упорядоченности элементов, если $x < \xi < y$. Определим $u(\xi^1) = u(\xi - 0)$, $u(\xi^2) = u(\xi + 0)$. Пусть S –множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, не являющихся точками разрыва $\mu(x)$. Рассмотрим множество $\overline{[0;\ell]}_\mu \backslash S$, пополним его по метрике $\rho(x;y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ и добавим к полученному пополнению элементы из S. Обозначим данное множество через $\overline{[0,\ell]}_{[\sigma]}$. Обозначим $\overline{[0,\ell]}_S = \overline{[0,\ell]}_{[\sigma]} \bigcup S(\mu)$.

Таким образом, в точках ξ^1 и ξ^2 уравнение (1) имеет вид

$$-\Delta^-\left(pu'_\mu\right)(\xi)+u(\xi-0)\Delta^-Q(\xi)=f(\xi^1,u(\xi-0))\Delta^-\sigma(\xi),$$

$$-\Delta^+\left(pu'_\mu\right)(\xi)+u(\xi+0)\Delta^+Q(\xi)=f(\xi^2,u(\xi+0))\Delta^+\sigma(\xi).$$

В точках s разрыва функции $\sigma(x)$, в которых $\mu(x)$ является непрерывной, уравнение (1) имеет вид

$$-\Delta\left(pu'_\mu\right)(s)+u(s)\Delta Q(s)=f(s,u(s))\Delta\sigma(s),$$

где $\Delta v(s)=v(s+0)-v(s-0)$.

Решение (1) мы будем искать в классе E μ–абсолютно непрерывных на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ функций, первая производная которых $[\sigma]$-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_S$. Относительно коэффициентов $p(x)$, $Q(x)$ и функции $f(x,u)$ мы делаем следующие предположения: 1) $p(x)$ и $Q(x)$ — $[\sigma]$-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_S$; 2) функция $p(x)$ положительна и отделена от нуля; 3) функция $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$; 4) $f(x,u)$ удовлетворяет условию Каратеодери, т.е. а) при каждом фиксированном u функция $f(x,u)$ является $[\sigma]$-измеримой; б) при всех $x\in\overline{[0;\ell]}_\mu$ $f(x,u)$ — непрерывна по u; в) существует $[\sigma]$-суммируемая с некоторой степенью $p\in[1,\infty)$ функция $m(x)$ такая, что $|f(x,u)|\leqslant m(x)$ для почти всех x (в смысле $[\sigma]$-меры) и u. Последнее позволяет нам гарантировать, что оператор суперпозиции $[\mathbf{F}u](x)=f(x,u(x))$ непрерывно действует из C_μ — пространства μ -непрерывных на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ функций в $L_{r,[\sigma]}$ — $[\sigma]$-суммируемых с некоторой степенью r функций.

Однородное уравнение $Lu=0$ назовем неосциллирующим на $\overline{[0;\ell]}_\mu$, если произвольное нетривиальное решение имеет не более одной перемены знака.

Введем обозначение

$$K=\{u(x)\in C_\mu\overline{[0;\ell]}_\mu|u(x)\geqslant 0\quad\forall x\in\overline{[0;\ell]}_\mu\}$$

Множество K является телесным, нормальным конусом в $C_\mu\overline{[0;\ell]}_\mu$. В дальнейшем нам понадобится u_0-норма:

$$\|u\|_{u_0}=\sup_{0<x<\ell}\left|\frac{u(x)}{u_0(x)}\right|,$$

где $u_0(x)=\dfrac{(\mu(x)-\mu(0))(\mu(\ell)-\mu(x))}{(\mu(\ell)-\mu(0))^2}$.

Как нетрудно видеть, $\|\cdot\|_{u_0}$ является нормой в пространстве E_{u_0} функций $u(x)$ из $C_\mu\overline{[0;\ell]}_\mu$, для каждой из которых $\|u\|_{u_0}$ конечна, более того, E_{u_0} является полным пространством по этой норме. Множество $K_{u_0}=K\cap E_{u_0}$ является телесным конусом. Кроме того, отношение $u\leqslant v$, эквивалентно, по определению, включению $v-u\in K_{u_0}$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Справедлива

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *однородное уравнение $Lu=0$ не осциллирует на $[0;\ell]$;*

2) *$f(x,u)$ — равномерно $[\sigma\times u]$-непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_\sigma\times R^1$;*

3) *функция $f(x,u)$ не убывает по u при каждом $x\in\overline{[0;\ell]}_\sigma$ и*

$$f(x,0)\geqslant 0; \tag{1}$$

4) *существует N пар чисел α_i,β_i, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 \leqslant \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n \tag{2}$$

$$f(x,\beta_k u_0(x)) < \frac{\beta_k}{\int\limits_0^\ell h_2(s)\, d[\sigma](s)} \quad (x \in \overline{[0;\ell]}_\sigma). \tag{3}$$

5) *для каждого k существует множество $w_k \subset [0;\ell]$ положительной σ-меры такое, что*

$$f(x,\alpha_k u_0(x)) > \frac{1}{\int\limits_{w_k} h_1(s)\, d[\sigma](s)} \quad (x \in \overline{[0;\ell]}_\sigma, k = 1,\dots,N) \tag{4}$$

Тогда задача (1) имеет $2N-1$ нетривиальных решений $\{u_i(x)\}_{i=1}^{i=2N-1}$, удовлетворяющих неравенствам

$$u_i(x) \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\dots,2N-1) \tag{5}$$

и

$$u_{2i-1}(x) \leqslant u_{2i+1}(x) \quad (i = 1,2,\dots,N-1).$$

Доказательство. Вопрос о разрешимости краевой задачи (1) можно заменить вопросом о разрешимости нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int\limits_0^\ell G(x,s) f(s,u(s))\, d[\sigma](s), \tag{6}$$

где $G(x,s)$ — функция влияния граничной задачи

$$\begin{cases} Lu = {F^*}'_{[\sigma]}(x) \quad (x \in \overline{[0;\ell]}_{[\sigma]}); \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{7}$$

здесь $F^*(x)$ — $[\sigma]$-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_{[\sigma]}$.

Уравнение (6) можно записать в виде

$$u = GFu, \tag{8}$$

где G — интегральный оператор с ядром $G(x,s)$:

$$(GF^*)(x) = \int\limits_0^\ell G(x,s) \frac{d}{d[\sigma]} F^*(s)\, d[\sigma](s)$$

и F — оператор суперпозиции: $(Fu)(x) = f(x,u(x))$.

Уравнение (8) эквивалентно уравнению

$$\frac{u(x)}{u_0(x)} = \int\limits_0^\ell \frac{G(x,s)}{u_0(x)} f\left(s, \frac{u(s)}{u_0(s)} \cdot u_0(s)\right) d[\sigma](s),$$

или

$$\widehat{u}(x) = (\widehat{G}\widehat{F}\widehat{u})(x),$$

где $\widehat{G}$ — интегральный оператор с ядром $\dfrac{G(x,s)}{u_0(x)}$, $\widehat{F}$ — оператор суперпозиции $(\widehat{F}u)(x) = f(x,u(x)\cdot u_0(x))$ и $\widehat{u}(x) = \dfrac{u(x)}{u_0(x)}$.

По условию теоремы $\widehat{F}$ непрерывно действует из E_{u_0} в $L_{1,[\sigma]}$; $\widehat{G}$ — действует и вполне непрерывен из $L_{1,[\sigma]}$ в E_{u_0}. Поэтому, $\widehat{G}\widehat{F}$ действует и вполне непрерывен из E_{u_0} в E_{u_0}.

Покажем, что $\widehat{G}\widehat{F}$ удовлетворяет всем условиям теоремы из [11], § 45, стр. 373 (при соответствующем выборе E и K). Для удобства читателя приведем формулировку этой теоремы.

Теорема. *Пусть K — нормальный телесный конус в банаховом пространстве E и A — действующий в E монотонный вполне непрерывный оператор. Пусть существует N пар элементов*

$$u_1 \leqslant v_1 \leqslant u_2 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant u_N \leqslant v_N. \tag{9}$$

таких, что

$$u_i \ll Au_i, \quad Av_i \ll v_i \quad (i = 1,2,\ldots,N). \tag{10}$$

Тогда существует $2N-1$ неподвижных точек $x_1,x_2,\ldots,x_{2N+1}$ оператора A, удовлетворяющих неравенствам

$$u_i \leqslant x_{2i-1} \leqslant v_i, \quad u_i \leqslant x_{2i} \leqslant v_{i+1}$$
$$u_{i+1} \nleqslant x_{2i}, \quad x_{2i} \nleqslant v_i$$

при всех $i = 1,2,\ldots,N$.

Положим $E = E_{u_0}$ и в качестве конуса K возьмем множество K_{u_0}. Телесность и нормальность этого конуса очевидны, причем $u \gg 0$ эквивалентно $u(x) > 0$ при всех $x \in [0;\ell]$. По условию теоремы, $f(x,u)$ монотонна по u. Отсюда и из неотрицательности $\dfrac{G(x,s)}{u_0(x)}$ следует монотонность оператора $\widehat{G}\widehat{F}$. Компактность очевидна.

Введем в рассмотрение функции

$$u_i(x) \equiv \alpha_i \quad \text{и} \quad v_i(x) \equiv \beta_i \quad (i = 1,2,\ldots,N).$$

Из (2) вытекает, что функции $u_i(x)$ и $v_i(x)$ удовлетворяют неравенствам (9). Докажем выполнимость (10).

Интегральный оператор $\widehat{G}$ с ядром $\widehat{G}(x,s)$ обладает свойством сильной положительности: для любой неотрицательной нетривиальной функции $f(x)$ ее образ $(\widehat{G}f)(x)$ есть функция строго положительная. По условию теоремы функция

$$w(x) = \beta_i - \int\limits_0^\ell h_2(s)\, d[\sigma](s)\cdot f(x,\beta_i u_0(x))$$

неотрицательна и отлична от тождественного нуля. Поэтому $(\widehat{G}\widehat{F}w)(x) \gg 0$, что означает

$$\beta_i \int\limits_0^\ell \frac{G(x,s)}{u_0(x)}\, d[\sigma](s) > \int\limits_0^\ell h_2(s)\, d[\sigma](s)\cdot(\widehat{G}\widehat{F})v_i(x). \tag{11}$$

Так как $\dfrac{G(x,s)}{u_0(x)} \leqslant h_2(s)$ и $\displaystyle\int\limits_0^\ell h_2(s)\, d[\sigma](s) > 0$, то из (11) вытекает

$$\beta_i > (\widehat{G}\widehat{F}v_i)(x)$$

для $x \in [0;\ell]$. Последнее и означает что

$$(\widehat{G}\widehat{F}v_i) \ll v_i.$$

Докажем теперь неравенство $\widehat{G}\widehat{F}u_k \geqslant u_k$. При фиксированном k рассмотрим функцию

$$u(x) = \begin{cases} f(x,\alpha_k u_0(x)) - \dfrac{\alpha_k}{\int\limits_{w_k} h_1(s)\, d[\sigma](s)}, & x \in w_k, \\ 0, & x \notin w_k \end{cases}$$

По условию $u(x) \geqslant 0$ и положительна на множестве положительной меры. Сильно положительным оператором $\widehat{G}\widehat{F}$ эта функция переводится в строго положительную функцию $(\widehat{G}\widehat{F}u) > 0$ на $[0;\ell]$, другими головами, $\widehat{G}\widehat{F}u \gg 0$. Так как $G(x,s) \geqslant u_0(x)h_1(s)$, то

$$\int\limits_{w_k} \frac{G(x,s)}{u_0(x)} f(s,\alpha_k u_0(s))\, d[\sigma](s) \geqslant \frac{\alpha_k \int\limits_{w_k} \dfrac{G(x,s)}{u_0(x)}\, d[\sigma](s)}{\int\limits_{w_k} h_1(s)\, d[\sigma](s)} \geqslant \alpha_k = u_k(x). \tag{12}$$

С другой стороны, из (1) и монотонности по u функции $f(x,u)$ вытекает неотрицательность функции $f(x;\alpha)$ при любом $\alpha \geqslant 0$. Поэтому

$$(\widehat{G}\widehat{F}u_k)(x) \geqslant \int\limits_{w_k} \frac{G(x,s)}{u_0(x)} f(s,\alpha_k u_0(s))\, d[\sigma](s).$$

Отсюда и из (12) следует $\widehat{G}\widehat{F}u_k \gg u_k$.

Итак, для оператора $\widehat{G}\widehat{F}$ выполнены все условия теоремы 45.3 из [11]. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

4. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

5. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

6. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

7. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11. № 4. — С. 13–17.

8. Давыдова, М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

9. Мышкис, А. Д. О решениях линейного однородного двумерного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенными коэффициентами / А. Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 615–619.

10. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

11. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

REFERENCES

1. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

2. Pokorny Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev B.L. et al. Differential equations for geometric graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Phizmatlit, 2004, 272 p.

3. Pokorny Yu.V., Bakhtina G.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm oscillation method in spectral problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Phizmatlit, 2009, 192 p.

4. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

5. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

6. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

7. Davydova M.B., Shabrov S.A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

8. Davydova M.B., Shabrov S.A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

9. Myshkis A.D. On solutions of linear homogeneous two-dimensional second-order differential inequality with generalized coefficients. [Myshkis A.D. O resheniyax linejnogo odnorodnogo dvumernogo differencial'nogo neravenstva vtorogo poryadka s obobshhennymi koe'fficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 5, pp. 615— 619.

10. Shabrov S. A. About the estimates of the function influence of a mathematical model fourth order. [Shabrov S. A. Ob ocenkax funkcii vliyaniya odnoj matematicheskoj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika —*

Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2015, no. 2, pp. 168–179.

11. Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P. Geometric Nonlinear Analysis Methods. [Krasnosel'skiyj M.A., Zabreyjko P.P. Geometricheskie metody nelineyjnogo analiza]. Moscow, 1975, 512 p.

Чечин Дмитрий Александрович, соискатель, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация

Chechin Dmitrii Alexandrovich, applicant, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

Шаброва Марина Вячеславовна, аспирант кафедры математического анализа математического факультета Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия
E-mail: koshka445@mail.ru

Shabrova Marina Vyacheslavovna, Graduate student, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: koshka445@mail.ru

Зверева Маргарита Борисовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: margz@rambler.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Zvereva Margarita Borisovna, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: margz@rambler.ru
Tel.: +7(473)220–86–90

Шабров Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Тел.: (473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexandrovich, doctor of physical-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Tel.: (473)220–86–90

Садчиков Павел Валерьевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры уравнений в частных производных и теорий вероятностей Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: sadchikov.agon@yandex.ru

Sadchikov Pavel V., candidate of physics and mathematical Sciences, Associate Professor, Chair of Partial Differential Equations and Theories of Probability, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: sadchikov.agon@yandex.ru