УДК 517.927.21

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С РАЗРЫВНЫМИ РЕШЕНИЯМИ

Д. А. Чечин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 23.03.2017 г.

Аннотация. В работе получены достаточные условия существования решения краевой задачи с разрывными решениями и сильной нелинейностью. При анализе решений краевой задачи, мы используем поточечный подход к трактовке уравнения, предложенный Ю. В. Покорным и показавший свою эффективность при изучении граничных задач не только второго порядка с негладкими решениями. На основе полученных ранее другими авторами оценок функции Грина граничной задачи удалось показать, что оператор, обращающий изучаемую нелинейную задачу, представимый в виде суперпозиции вполне непрерывного и непрерывного операторов, действует из конуса неотрицательных непрерывных функций в более узкое множество. Последнее и позволяет доказать существование решения у нелинейной краевой задачи с привлечением теории пространств с конусом.

Ключевые слова: краевая задача, разрывное решение, сильная нелинейность, разрешимость.

SOLVABILITY OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH NONSMOOTH SOLUTIONS

D. A. Chechin

Abstract. Sufficient conditions are obtained for the existence of a solution to a boundary value problem with discontinuous solutions and strong nonlinearity. When analyzing solutions to a boundary value problem, we use a pointwise approach to the interpretation of the equation proposed by Yu. V. Pokornyi and which has shown its effectiveness in studying boundary value problems not only of the second order with nonsmooth solutions.. Based on previously obtained by other authors estimates of the function's Green of boundary value problem were able to show that the operator that rotates the studied nonlinear problem, can be represented as a superposition of continuous and completely continuous operators, acting from the cone of nonnegative continuous functions in a more narrow set. Latest and allows to prove the existence of solutions for nonlinear boundary value problems involving the theory of spaces with cone.

Keywords: boundary value problem, discontinuous solution, strong nonlinearity, solvability.

В работе изучается нелинейная краевая задача

$$\begin{cases} Lu \equiv -(pu'_\mu)'_{[\sigma]} + uQ'_{[\sigma]} = f(x,u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

возникающая при моделировании деформаций разрывной струны (цепочки из струн, скрепленных между собой пружинами), натянутой вдоль отрезка $[0,\ell]$, и подпертой (не более чем в счетном количестве точек), как обычными пружинами, деформации которых подчиняются закона Гука, так и пружинами с разными витками, деформации которых закону Гука не подчиняются и задаются некоторой функцией. При этом к отдельным точкам струны могут быть приложены нелинейные импульсные внешние воздействия.

В уравнении из (1) внутренняя производная понимается как производная по обычной мере, внешняя — как производная по «расщепленной» мере, понимаемая в смысле Ю. В. Покорного, т. е. обращаемая интегрированием с помощью π–интеграла. Последнее означает, что функция $g(x)$ называется $[\sigma]$-производной от функции $G(x)$, если $G(x)-G(0)=\int\limits_0^x g(s)\,d[\sigma]$. Таким образом, во всякой точке ξ разрыва функции $\sigma(x)$ у функции $g(x)$ возникает два собственных значения, вообще говоря, отличных от предельных, определяемых равенствами $g(\xi^1)=G'_{[\sigma]}(\xi^1)=\dfrac{\Delta^-G(\xi)}{\Delta^-\sigma(\xi)}$ и $g(\xi^2)=G'_{[\sigma]}(\xi^2)=\dfrac{\Delta^+G(\xi)}{\Delta^+\sigma(\xi)}$, где $\Delta^-G(\xi)=G(\xi)-G(\xi-0)$ и $\Delta^+G(\xi)=G(\xi+0)-G(\xi)$.

Уравнение (1) рассматривается на специальном расширении $\overline{[0;\ell]}_{[\sigma]}$ отрезка $[0;\ell]$. Опишем построение этого множества. Обозначим через $S(\mu)$ множество точек разрыва функции $\mu(x)$. На множестве $J_\mu=[0;\ell]\backslash S(\mu)$ введем метрику $\rho(x;y)=|\mu(x)-\mu(y)|$. Метрическое пространство J_μ является неполным. Обозначим через $\overline{[0;\ell]}_\mu$ его стандартное пополнение. Множество $\overline{[0;\ell]}_\mu$ вместо каждой точки ξ разрыва функции $\mu(x)$ содержит элементы $\{\xi^1;\xi^2\}$, появившиеся при пополнении. При этом $x<\xi^1<\xi^2<y$ в смысле естественной упорядоченности элементов, если $x<\xi<y$. Определим $u(\xi^1)=u(\xi-0)$, $u(\xi^2)=u(\xi+0)$. Пусть S –множество точек разрыва функции $\sigma(x)$, не являющихся точками разрыва $\mu(x)$. Рассмотрим множество $\overline{[0;\ell]}_\mu\backslash S$, пополним его по метрике $\rho(x;y)=|\sigma(x)-\sigma(y)|$ и добавим к полученному пополнению элементы из S. Обозначим данное множество через $\overline{[0,\ell]}_{[\sigma]}$. Обозначим $\overline{[0,\ell]}_S=\overline{[0,\ell]}_{[\sigma]}\bigcup S(\mu)$.

Таким образом, в точках ξ^1 и ξ^2 уравнение (1) имеет вид

$$-\Delta^-\left(pu'_\mu\right)(\xi)+u(\xi-0)\Delta^-Q(\xi)=f(\xi^1,u(\xi-0))\Delta^-\sigma(\xi),$$

$$-\Delta^+\left(pu'_\mu\right)(\xi)+u(\xi+0)\Delta^+Q(\xi)=f(\xi^2,u(\xi+0))\Delta^+\sigma(\xi).$$

В точках s разрыва функции $\sigma(x)$, в которых $\mu(x)$ является непрерывной, уравнение (1) имеет вид

$$-\Delta\left(pu'_\mu\right)(s)+u(s)\Delta Q(s)=f(s,u(s))\Delta\sigma(s),$$

где $\Delta v(s)=v(s+0)-v(s-0)$.

Решение (1) мы будем искать в классе E μ–абсолютно непрерывных на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ функций, первая производная которых $[\sigma]$-абсолютно непрерывна на $\overline{[0;\ell]}_S$. Относительно коэффициентов $p(x)$, $Q(x)$ и функции $f(x,u)$ мы делаем следующие предположения: 1) $p(x)$ и $Q(x)$ — $[\sigma]$-абсолютно непрерывны на $\overline{[0;\ell]}_S$; 2) функция $p(x)$ положительна и отделена от нуля; 3) функция $Q(x)$ не убывает на $[0;\ell]$; 4) $f(x,u)$ удовлетворяет условию Каратеодери, т. е. а) при каждом фиксированном u функция $f(x,u)$ является $[\sigma]$-измеримой; б) при всех $x\in\overline{[0;\ell]}_\mu$ $f(x,u)$ — непрерывна по u; в) существует $[\sigma]$-суммируемая с некоторой степенью $p\in[1,\infty)$ функция $m(x)$ такая, что $|f(x,u)|\leqslant m(x)$ для почти всех x (в смысле $[\sigma]$-меры) и u. Последнее позволяет нам гарантировать, что оператор суперпозиции $[\mathbf{F}u](x)=f(x,u(x))$ непрерывно действует из C_μ — пространства μ–непрерывных на $\overline{[0;\ell]}_\mu$ функций в $L_{r,[\sigma]}$ — $[\sigma]$-суммируемых с некоторой степенью r функций.

Следуя работе [1], однородное уравнение $Lu=0$ назовем неосциллирующим на $\overline{[0;\ell]}_\mu$, если произвольное нетривиальное решение имеет не более одной перемены знака.

Следует отметить, что интенсивное изучение краевых задач с производными Радона–Никодима началось после выхода работы Ю. В. Покорного [2]: была построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [3]–[8], изучались нелинейных краевых задач с производными Радона–Никодима [9], [10], граничные задачи четвертого порядка [11], [12].

Введем обозначения: $u_0(x) = (\mu(x) - \mu(0))(\mu(\ell) - \mu(x))$, $\|u\|_\mu = \max\limits_{\overline{[0;\ell]}_\mu} |u(x)|$ — норма в пространстве $C_\mu[0,\ell]$.

В работе доказан следующий результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $f(x,0) \equiv 0$*;*

2) *однородное уравнение* $Lu = 0$ *не осциллирует на* $\overline{[0;\ell]}_{[\sigma]}$*;*

3) $f(x,u) \geqslant 0$ *для всех* $x \in \overline{[0;\ell]}_\sigma$ *и* $u \geqslant 0$*;*

4) *оператор суперпозиции, порожденный функцией* $f(x,u)$*, непрерывно действует из* $C_\mu[0;\ell]$ *в* $L_{p,[\sigma]}$ *при некотором* $p \in (1;+\infty]$*;*

5) *при некоторых* $0 < r < R < \infty$ *краевая задача* $Lu = \lambda f(x,u)$*,* $u(0) = 0$*,* $u(\ell) = 0$*, при любых* $\lambda \in (0;1)$ *не имеет решений, удовлетворяющих неравенствам* $\widetilde{u}_0(x) \cdot \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |u(x)| \leqslant u(x) \leqslant r$*, где* $\widetilde{u}_0(x) = M \cdot u_0(x)$ *при некотором* $M > 0$*, и для некоторой неотрицательной нетривиальной функции* $h(x) \in L_{1,[\sigma]}$ *и для любого* $\lambda > 0$ *граничная задача* $Lu = \lambda f(x,u) + \lambda h$*,* $u(0) = 0$*,* $u(\ell) = 0$*, не имеет решений, удовлетворяющих неравенству* $u(x) \geqslant R\widetilde{u}_0(x)$*.*

Тогда задача

$$\begin{cases} Lu = f(x,u), \\ u(0) = u(\ell) = 0, \end{cases}$$

имеет нетривиальное решение в конусе K *неотрицательных* μ*–непрерывных на* $\overline{[0;\ell]}_\mu$ *функций.*

Доказательство. С помощью оператора A на $K \backslash \{\Theta\}$ введём оператор $Bu = \|u\|_C^2 A\left(\dfrac{u}{\|u\|_C^2}\right)$. Если оператор B имеет неподвижную точку u^*, то элемент $v^* = \dfrac{u^*}{\|u\|_C^2}$ даёт неподвижную точку оператора A. Поэтому, достаточно показать наличие в K у оператора B неподвижной точки.

Оператор B переводит $K \backslash \{\Theta\}$ в $K(\widetilde{u}_0)$, причем B вполне непрерывен в K вне шара любого радиуса. Нетрудно видеть, что для оператора B на множестве элементов $K(\widetilde{u}_0)$ с большой нормой не может выполняться $\lambda Bu = u$ при $\lambda \in (0,1)$, и на элементах малой нормы из $K(\widetilde{u_0})$ при любом $\lambda > 0$ не может выполняться $u = Bu + \lambda h_0$, где $h_0(x) = \int\limits_0^\ell G(x,s)h(s)\,d[\sigma](s)$. Поэтому, оператор B имеет в $K(\widetilde{u}_0)$ неподвижную точку. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. *Доказательство теоремы сохраняет силу, если оператор* A *вполне непрерывен вне любого шара положительного радиуса.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

2. Покорный, Ю. В. Интеграл Стилтьеса и производные по мере в обыкновенных дифференциальных уравнениях / Ю. В. Покорный // Доклады РАН. — 1999. — Т. 364, № 2. — С. 167–169.

3. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

4. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

5. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

6. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

7. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

8. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

9. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11. № 4. — С. 13–17.

10. Давыдова, М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

11. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

12. Функция влияния дифференциальной модели четвертого порядка / А. Д. Баев, С. А. Шабров, Ф. В. Голованёва, Меач Мон // Вестник Воронежского института ГПС МЧС России. — 2014. — № 3 (12). — С. 65–73.

REFERENCES

1. Shabrov S.A. About the Estimates of the Function Influence of a Mathematical Model Fourth Order. [Shabrov S.A. Ob ocenkax funkcii vliyaniya odnoj matematicheskoj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 168–179.

2. Pokorny Yu.V. The Stieltjes integral and derivatives at least in ordinary differential equations. [Pokornyj Yu.V. Integral Stilt'esa i proizvodnye po mere v obyknovennyx differencial'nyx uravneniyax]. *Doklady akademii nauk — Reports of Academy of Sciences*, 1999, vol. 364, no. 2, P. 167–169.

3. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

4. Pokorny Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev B.L. et al. Differential equations for geometric graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Phizmatlit, 2004, 272 p.

5. Pokorny Yu.V., Bakhtina G.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm oscillation method in spectral problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Phizmatlit, 2009, 192 p.

6. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

7. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

8. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

9. Davydova M.B., Shabrov S.A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

10. Davydova M.B., Shabrov S.A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

11. Shabrov S.A. Mathematical model for small deformations of the rod system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University*, 2013, no. 1, pp. 232–250.

12. Baev A.D., Shabrov S.A., Golovaneva F.V., Meach Mon The Function Of The Differential Impact Model Fourth Order. [Baev A.D., Shabrov S.A., Golovanyova F.V., Meach Mon Funkciya vliyaniya differencial'noj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo instituta GPS MChS Rossii — Herald of the Voronezh Institute of Russian Ministry for Emergency Situations*, 2014, iss. 3 (12), pp. 65–73.

Чечин Дмитрий Александрович, соискатель, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация

Chechin Dmitrii Alexandrovich, applicant, Department of Mathematical Analysis, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation