УДК 517.952

МНОГОМЕРНОЕ УРАВНЕНИЕ МОНЖА–АМПЕРА СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ПО ПЕРВЫМ ПРОИЗВОДНЫМ

И. В. Рахмелевич

Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Поступила в редакцию 25.04.2018 г.

Аннотация. Выполнен анализ решений многомерного уравнения Монжа–Ампера в случае, когда правая часть уравнения содержит произвольную нелинейность от искомой функции и степенные нелинейности от ее производных первого порядка. Доказана теорема о понижении размерности уравнения в случае экспоненциальной нелинейности от искомой функции. Получены частные решения уравнения Монжа–Ампера в случае степенной, экспоненциальной и произвольной нелинейностей от искомой функции. Рассмотрены случаи аддитивного, мультипликативного и функционального разделения переменных.

Ключевые слова: уравнение в частных производных, уравнение Монжа–Ампера, степенная нелинейность, метод разделения переменных.

MULTI-DIMENSIONAL MONGE–AMPERE EQUATION WITH POWER NONLINEARITIES ON THE FIRST DERIVATIVES

I. V. Rakhmelevich

Abstract. There is completed the analysis of the solutions of multi-dimensional Monge–Ampere equation in the case when the right side of equation contains the arbitrary nonlinearity on the unknown function and power nonlinearities on its first derivatives. The theorem about decreasing of dimension of the equation is prooved for the exponential nonlinearity on the unknown function. There are received the particular solutions of Monge–Ampere equation in the cases of power, exponential and arbitrary nonlinearities on the unknown function. The cases of additional, multiplicational and functional separation of variables are considered.

Keywords: partial differential equation, Monge–Ampere equation, power nonlinearity, variables separation method.

ВВЕДЕНИЕ

В современной нелинейной математической физике уравнение Монжа–Ампера (МА) является одним из наиболее активно исследуемых уравнений благодаря многочисленным приложениям в различных областях науки, в том числе в газовой динамике, метеорологии, дифференциальной геометрии и других [1–4]. Также ряд работ посвящен анализу свойств многомерных уравнений МА [5, 6]. В последние годы ведутся исследования обобщений уравнения МА, включающих более сложный нелинейный дифференциальный оператор. Так, в работах [7, 8] изучены решения двумерного уравнения МА с нелинейной правой частью и модифицированного двумерного уравнения МА с коэффициентом при смешанной производной, зависящим от искомой функции. Целью данной работы является исследование решений многомерного уравнение МА с правой частью, включающей произвольную нелинейность от искомой функции и степенные нелинейности по ее первым производным. В качестве основного метода применяется метод разделения переменных, который является одним из наиболее эффективных методов решения нелинейных уравнений в частных производных [1, 9] и, в частности, успешно используется для исследования уравнений в частных производных со степенными нелинейностями [10–13].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ПОНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим следующее многомерное уравнение Монжа–Ампера относительно неизвестной функции $u(X)$:

$$\det\ H(u) = f(X)g(u)\prod_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}, \tag{1.1}$$

где $H(u) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j\in I}$ — матрица Гессе, $X = \{x_1,x_2,\dots x_N\}$ — множество независимых переменных, $I = \{1,2,\dots N\}$ — множество значений индекса, нумерующего независимые переменные; $f(X),\ g(u)$ — некоторые заданные функции, β_n — действительные параметры.

Будем предполагать, что $I = \bigcup\limits_{k=1}^{K} I_k$, причем все подмножества I_k являются непересекающимися. Тогда множество Xтакже можно представить в виде объединения соответствующих подмножеств: $X = \bigcup\limits_{k=1}^{K} X_k\,,\quad X_k = \{x_n\}_{n\in I_k}$.

Будем искать решения уравнения (1.1) в случаях, когда это уравнение допускает разделение переменных (РП). Приведенная ниже теорема устанавливает возможность понижения размерности уравнения (1.1) для случая экспоненциальной нелинейности по искомой функции с помощью аддитивного РП.

Теорема 1.1.
Пусть в уравнении (1.1) $g(u) = g_0\exp(\lambda u),\quad f(X) = \prod\limits_{k=1}^{K} f_k(X_k)$. Тогда это уравнение имеет решение следующего вида:

$$u(X) = \sum_{k=1}^{K} u_k(X_k), \tag{1.2}$$

причём функции $u_k(X_k)$ при всех $k = 1,\dots,K$ удовлетворяют уравнениям:

$$\det\ H_k(u_k) = g_k\exp(\lambda u_k)f_k(X_k)\prod_{n\in I_k}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n}\right)^{\beta_n}, \tag{1.3}$$

где $H_k(u_k) = \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j\in I_k}$, *а g_k — постоянные, удовлетворяющие условию:*

$$\prod_{k=1}^{K} g_k = g_0. \tag{1.4}$$

Доказательство.
В соответствии с известной схемой аддитивного РП [9] решение уравнения (1.1) ищем в виде (1.2). Пусть $i\in I_{k_1}, j\in I_{k_2}$, где k_1,k_2 — некоторые произвольно выбранные значения индекса k. Тогда вторые производные, входящие в состав уравнения (1.1), определяются выражением:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right|_{i\in I_{k_1}, j\in I_{k_2}} = \begin{cases} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} & \text{если}\quad k_1 = k_2 = k \\ 0 & \text{если}\qquad k_1 \neq k_2 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что матрица Гессе является блочно-диагональной:

$$H(u) = \text{blockdiag }(H_1(u_1), \ldots, H_K(u_K)).$$

Так как определитель блочно-диагональной матрицы равен произведению определителей отдельных блоков ([14], с.55), то уравнение (1.1) можно переписать в виде:

$$\prod_{k=1}^{K} \left\{ \det\ H_k(u_k) \frac{\exp(-\lambda u_k)}{f_k(X_k)} \prod_{n \in I_k}^{N} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right)^{-\beta_n} \right\} = g_0. \tag{1.5}$$

Левая часть уравнения (1.5) представляет собой произведение K сомножителей, зависящих от разных подмножеств переменных X_k, поэтому это уравнение можно удовлетворить только в том случае, если каждый из этих сомножителей равен некоторой постоянной:

$$\det\ H_k(u_k) \frac{\exp(-\lambda u_k)}{f_k(X_k)} \prod_{n \in I_k}^{N} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_n} \right)^{-\beta_n} = g_k. \tag{1.6}$$

Из (1.6) непосредственно следует уравнение (1.3) для функций $u_k(X_k)$, а также условие (1.4) для постоянных g_k. Теорема доказана.

Следствие 1.1.

Если в уравнении (1.1) $g(u) = g_0 \exp(\lambda u)$, $\quad f(X) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)$, *то это уравнение имеет решение следующего вида:*

$$u(X) = \sum_{i=1}^{N} u_i(x_i), \tag{1.7}$$

где функции $u_i(x_i)$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$u_i''(x_i) = g_i \exp(\lambda u_i) f_i(x_i) \left[u_i'(x_i) \right]^{\beta_i}, \tag{1.8}$$

причем постоянные g_i *удовлетворяют условию:*

$$\prod_{i=1}^{N} g_i = g_0. \tag{1.9}$$

Данное утверждение является частным случаем теоремы (1.1) при $K = N$. В этом случае представление решения в виде (1.2) сводится к (1.7), уравнение (1.3) переходит в (1.8), а условие (1.4) переходит в (1.9).

Следствие 1.2.

Пусть $g(u) \equiv g_0, f(X) \equiv 1$, *а также при всех* $n \in I_0 \subset I$ *выполнено условие* $\beta_n = 0$. *Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида:*

$$u(X) = u_+(X_+) + u_0(X_0), \tag{1.10}$$

где $I_+ = I \backslash I_0, X_+ = \{x_n\}_{n \in I_+}, X_0 = \{x_n\}_{n \in I_0}$*; функции* $u_+(X_+)$,$u_0(X_0)$ *удовлетворяют уравнениям:*

$$\det\ H_+(u_+) = \frac{g_0}{A} \prod_{n \in I_+} \left(\frac{\partial u_+}{\partial x_n} \right)^{\beta_n}, \quad \det\ H_0(u_0) = A, \tag{1.11}$$

где $H_+(u_+) = \left(\frac{\partial^2 u_+}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in I_+}$,$H_0(u_0) = \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j \in I_0}$ *— матрицы Гессе от функций* u_+,u_0 *на подмножествах независимых переменных* X_+,X_0; $A \neq 0$ *— произвольная постоянная.*
Данное утверждение непосредственно вытекает из теоремы 1.1.

Пример 1.1.При выполнении условий следствия 1.2 уравнение (1.1) имеет решение:

$$u(X) = u_+(X_+) + \frac{1}{2}\sum_{m,n\in I_0} a_{mn}x_m x_n + \sum_{n\in I_0} b_n x_n,$$

причем матрица a_{mn} предполагается симметричной и $A \equiv \det\ |a_{mn}| \neq 0$, а функция $u_+(X_+)$ удовлетворяет уравнению (1.11). Приведенный пример показывает, что для "укороченного" уравнения МА, в правой части которого первые производные по некоторым переменным отсутствуют, имеется решение, представимое в виде суммы двух слагаемых: решения уравнения МА меньшей размерности и квадратичного полинома от переменных, производные по которым отсутствуют в правой части уравнения (1.1).

Теорема 1.2.

Пусть $I_0 \subset I$ — непустое подмножество, такое, что при всех $i \in I_0$ выполнено условие $\beta_i \geqslant 0$, причем хотя бы при одном значении $i \in I_0$ выполнено условие $\beta_i > 0$. Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида:

$$u = u_+(X_+). \tag{1.12}$$

Здесь $X_+ = X\backslash X_0, X_0 = \{x_i\}_{i\in I_0}$; $u_+(X_+)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция.

Доказательство.

Подставим функцию (1.12) в уравнение (1.1). Так как при всех $i \in I_0$ $\frac{\partial u_+}{\partial x_i} \equiv 0$, то в силу условия теоремы правая часть (1.1) обращается в 0. Далее, при подстановке (1.12) в левую часть уравнения (1.1), получается определитель, у которого строки с номерами $i \in I_0$ состоят только из нулевых элементов, поэтому и левая часть (1.1) равна 0. Следовательно, (1.12) является решением уравнения (1.1). Теорема доказана.

Пример 1.2.

Пусть при некотором $i \in I$ выполнено условие $\beta_i > 0$. Тогда уравнение (1.1) имеет решение вида

$$u(X) = U\left(\sum_{n=1,n\neq i}^{N} c_n x_n\right), \tag{1.13}$$

где $U(z)$ — произвольная дважды дифференцируемая функция, c_n — произвольные постоянные. Решение вида (1.13) является частным случаем (1.12), что непосредственно следует из теоремы 1.2.

Решения, определяемые теоремой 1.2, являются функциями лишь части независимых переменных. Далее всюду будем рассматривать только решения, существенно зависящие от всех переменных x_n.

2. МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

В данном разделе рассмотрим решения уравнения (1.1), которые могут быть получены методами мультипликативного и функционального разделения переменных [9]. В доказательствах теорем о решениях уравнения МА, приводимых ниже, будем использовать известное выражение ([15], с.43, 197) для определителя специального вида:

$$\det\ h = \left(1 + \sum_{i=1}^{N}\frac{a_i b_i}{d_i - a_i b_i}\right)\prod_{i=1}^{N}(d_i - a_i b_i), \tag{2.1}$$

где элементы матрицы h выражаются так:

$$h_{ij} = \begin{cases} d_i\,, & i = j; \\ a_i b_j, & i \neq j. \end{cases} \tag{2.2}$$

Теорема 2.1.
Пусть правая часть уравнения (1.1) содержит степенную нелинейность от искомой функции, т.е. $g(u) = g_0 u^\gamma$*, а параметры уравнения удовлетворяют условиям:*

$$\beta_\Sigma + \gamma - N \neq 0, \quad \beta_n \neq 2, \tag{2.3}$$

причем второе условие выполняется при всех $n \in I$*; здесь и далее* β_Σ *определяется выражением:*

$$\beta_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} \beta_n. \tag{2.3a}$$

Тогда для каждого $i \in I$ *уравнение (1.1) имеет решение следующего вида:*

$$u(X) = u_i(x_i) \prod_{n=1, n\neq i}^{N} u_n(x_n). \tag{2.4}$$

Здесь функции $u_n(x_n)$ *при всех* $n \neq i$ *определяются выражением:*

$$u_n(x_n) = [\rho_n(x_n - x_{n0})]^{1/\rho_n}, \quad \rho_n = \frac{\beta_\Sigma + \gamma - N}{\beta_n - 2}, \tag{2.5}$$

а функция $u_i(x_i)$ *является решением обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ):*

$$p_i u_i''(x_i) u_i'(x_i) - (p_i - 1)\left[u_i'(x_i)\right]^2 - s_i \left[u_i'(x_i)\right]^{\beta_i} \left[u_i(x_i)\right]^{\sigma_i} = 0. \tag{2.6}$$

Параметры, входящие в уравнение (2.6), определяются выражениями:

$$\sigma_i = \beta_\Sigma + \gamma - N + 2 - \beta_i, \quad p_i = \frac{\beta_i + N}{\beta_\Sigma + \gamma - N}, \quad s_i = -g_0 \prod_{n=1, n\neq i}^{N} \rho_n^{-1}, \tag{2.7}$$

x_{n0} *— произвольные постоянные.*

Доказательство.
Следуя известной схеме мультипликативного разделения переменных, решение уравнения (1.1) ищем в виде:

$$u(X) = \prod_{n=1}^{N} u_n(x_n). \tag{2.8}$$

Тогда левую часть уравнения (1.1) можно представить так:

$$\det\ H = u^N \det\ h, \tag{2.9}$$

причём элементы матрицы h определяются выражениями:

$$h_{ij} = \begin{cases} u_i''(x_i)/u_i(x_i), & i = j; \\ u_i'(x_i)u_j'(x_j)\Big/u_i(x_i)u_j(x_j), & i \neq j. \end{cases} . \tag{2.10}$$

Для вычисления $\det\ h$ используем (2.1), (2.2); тогда с учетом (2.10) получаем:

$$\det\ h = \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n^2}{y_n - a_n^2}\right) \prod_{n=1}^{N} \left(y_n - a_n^2\right) \quad , \tag{2.11}$$

где $y_n = u_n''(x_n)/u_n(x_n), \quad a_n = u_n'(x_n)/u_n(x_n)$.

Тогда, на основании (2.9) и (2.11), левую часть уравнения (1.1) можно записать так:

$$\det\ H = \left(1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{\left[u_n'(x_n)\right]^2}{u_n''(x_n)u_n(x_n) - \left[u_n'(x_n)\right]^2}\right) \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{N} \left\{\left[u_n''(x_n)u_n(x_n) - \left[u_n'(x_n)\right]^2\right]\ \left[u_n(x_n)\right]^{N-2}\right\}. \qquad (2.12)$$

Далее, подставив (2.8) в правую часть (1.1) и учитывая выражение (2.12), после некоторых преобразований уравнение (1.1) приводим к виду:

$$1 + \sum_{n=1}^{N} \Phi_n(x_n) = g_0 \prod_{n=1}^{N} \Psi_n(x_n), \qquad (2.13)$$

причём $\Phi_n(x_n)$,$\Psi_n(x_n)$ определяются выражениями:

$$\Phi_n(x_n) = \frac{\left[u_n'(x_n)\right]^2}{u_n''(x_n)u_n(x_n) - \left[u_n'(x_n)\right]^2} \quad , \qquad (2.14)$$

$$\Psi_n(x_n) = \frac{\left[u_n'(x_n)\right]^{\beta_n} \left[u_n'(x_n)\right]^{\sigma_n}}{u_n''(x_n)u_n(x_n) - \left[u_n'(x_n)\right]^2}, \quad \sigma_n = \beta_\Sigma + \gamma - N + 2 - \beta_n. \qquad (2.15)$$

Пусть $i \in I$ — некоторое произвольно выбранное значение. Продифференцируем уравнение (2.13) по x_i, в результате чего получаем:

$$\frac{\Phi_i(x_i)}{\Psi_i(x_i)} = g_0 \prod_{n=1, n\neq i}^{N} \Psi_n(x_n). \qquad (2.16)$$

Левая часть уравнения (2.16) зависит только от переменной x_i, а правая часть - от всех остальных переменных x_n $(n \neq i)$. Поэтому это уравнение можно удовлетворить только в том случае, если при всех $n \neq i$ выполняются условия:

$$\Psi_n(x_n) = \nu_n, \qquad (2.17)$$

где ν_n — некоторые постоянные.

С учетом (2.17) уравнение (2.13) можно преобразовать к виду:

$$\sum_{n=1, n\neq i}^{N} \Phi_n(x_n) = g_0 \widetilde{\nu}_i \Psi_i(x_i) - \Phi_i(x_i) - 1, \qquad (2.18)$$

где $\widetilde{\nu}_i = \prod\limits_{n=1, n\neq i}^{N} \nu_n$. Правая часть уравнения (2.18) зависит только от переменной x_i, а левая часть – от всех остальных переменных x_n $(n \neq i)$, поэтому для всех $n \neq i$ должны быть выполнены условия:

$$\Phi_n(x_n) = \mu_n. \qquad (2.19)$$

Таким образом, уравнение (2.13) можно удовлетворить только в том случае, если при всех $n \neq i$ функции $u_n(x_n)$ являются решениями переопределенной системы, составленной из уравнений (2.19) и (2.17).

Разделим почленно уравнение (2.19) на (2.17), тогда с учетом выражений (2.14) и (2.15) получаем:

$$\left[u_n'(x_n)\right]^{\beta_n - 2} \left[u_n(x_n)\right]^{\sigma_n} = \frac{\nu_n}{\mu_n}. \qquad (2.20)$$

Предполагая, что выполняется первое из условий (2.3), с учетом (2.15), получаем, что при всех $n \neq i$ выполнено неравенство:

$$\beta_n + \sigma_n \neq 2.$$

Тогда решение уравнения (2.20) запишется в виде:

$$u_n(x_n) = \left[\rho_n q_n (x_n - x_{n0})\right]^{1/\rho_n}, \tag{2.21}$$

где ρ_n определяется выражением (2.5),

$$q_n = \left(\frac{\nu_n}{\mu_n}\right)^{\sigma_n/(\beta_n-2)}. \tag{2.22}$$

Подставив (2.21) с учетом (2.22) в выражение (2.14), находим:

$$\Phi_n(x_n) = -\frac{1}{\rho_n} \tag{2.23}$$

Тогда из (2.19) и (2.23) с учетом (2.22) следует:

$$\mu_n = \frac{2-\beta_n}{\beta_\Sigma + \gamma - N}. \tag{2.24}$$

Аналогичным образом, из (2.15) и (2.17) с учетом (2.21) , (2.22) и (2.24), после некоторых преобразований находим, что $\nu_n = \mu_n$. Тогда из (2.21) окончательно получаем:

$$u_n(x_n) = \left[\rho_n (x_n - x_{n0})\right]^{1/\rho_n}. \tag{2.25}$$

Для того чтобы получить уравнение для функции $u_i(x_i)$, подставим выражения (2.14) и (2.15) для $\Phi_i(x_i)$, $\Psi_i(x_i)$ в уравнение (2.18) и учтем, что при всех $n \neq i$ функции $\Phi_n(x_n)$ должны удовлетворять уравнению (2.19). Тогда, в результате некоторых преобразований получаем, что функция $u_i(x_i)$ должна быть решением уравнения (2.6). Теорема доказана.

Теорема 2.2.

Пусть $g(u) = g_0 u^\gamma$, $f(X) = \prod\limits_{n=1}^{N} x_n^{\alpha_n}$. *Тогда уравнение (1.1) имеет автомодельное решение вида:*

$$u(X) = U(z), \quad z = \prod_{n=1}^{N} x_n^{\sigma_n}. \tag{2.26}$$

Здесь $U(z)$ *является решением ОДУ:*

$$1 - \sigma_\Sigma \frac{U'(z) + zU''(z)}{U'(z)} = G_0 z^{\beta_\Sigma - N + \lambda} \left[U'(z)\right]^{\beta_\Sigma - N} \left[U(z)\right]^\gamma, \tag{2.27}$$

где λ *— некоторая постоянная, причем возможны два случая:*

1) $\lambda = 0$, *тогда при всех* $i \in I$ *должны быть выполнены условия:*

$$\alpha_i - \beta_i + 2 = 0, \tag{2.28а}$$

а все σ_i *являются произвольными;*

2)$\lambda \neq 0$, *тогда при всех* $i \in I$ σ_i *определяются выражениями:*

$$\sigma_i = \frac{\alpha_i - \beta_i + 2}{\lambda}. \tag{2.28б}$$

Коэффициенты, входящие в (2.27), определяются так:

$$\sigma_\Sigma = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i, \quad G_0 = (-1)^N \, g_0 \prod_{i=1}^{N} \sigma_i^{\beta_i - 1}. \tag{2.29}$$

Доказательство.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде (2.26). Тогда левую часть (1.1) можно представить так:

$$\det\ H = \left[z \left(U'(z) + zU''(z) \right) \right]^N \det\ h, \tag{2.30}$$

где элементы матрицы h определяются выражением (2.2), а входящие в него величины имеют вид:

$$a_i^{=} b_i = \frac{\sigma_i}{x_i}, \quad d_{i0} = a_i b_i + d_{i0}, \quad d_{i0} = -\frac{U'(z)}{U'(z) + zU''(z)} \cdot \frac{\sigma_i}{x_i^2}. \tag{2.31}$$

Из (2.1) и (2.31) получаем:

$$\det\ h = \left(1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{a_i b_i}{d_{i0}} \right) \prod_{i=1}^{N} d_{i0}, \tag{2.32}$$

причем сумма и произведение в (2.32) определяются выражениями:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{a_i b_i}{d_{i0}} = -\sigma_\Sigma \frac{U'(z) + zU''(z)}{U'(z)}, \quad \prod_{i=1}^{N} d_{i0} = \left(-\frac{U'(z)}{U'(z) + zU''(z)} \right)^N \prod_{i=1}^{N} \frac{\sigma_i}{x_i^2}. \tag{2.32а}$$

Подставляя (2.26), (2.30), (2.32), (2.32а) в уравнение (1.1) , после некоторых элементарных преобразований получаем:

$$1 - \sigma_\Sigma \frac{U'(z) + zU''(z)}{U'(z)} = G_0 \left[zU'(z) \right]^{\beta_\Sigma - N} \left[U(z) \right]^\gamma \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i - \beta_i + 2}. \tag{2.33}$$

Уравнение (2.33) может быть сведено к ОДУ относительно функции $U(z)$ только при выполнении условия:

$$\prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i - \beta_i + 2} = z^\lambda, \tag{2.34}$$

где λ — некоторая постоянная. Подставляя (2.34) в (2.33), получаем уравнение (2.27). Также из (2.34) следует, что при $\lambda \neq 0$ показатели σ_i определяются выражениями (2.28б), а при $\lambda = 0$ - являются произвольными, причем в этом случае должны быть выполнены условия (2.28а). Теорема доказана.

Приведенная далее теорема определяет вид решения при функциональном разделении переменных.

Теорема 2.3.

Уравнение (1.1) имеет следующие решения с функциональным разделением переменных вида:

$$u(X) = U(z), \quad z = \sum_{n=1}^{N} u_n(x_n). \tag{2.35}$$

1. Если при некотором n выполнено условие $f_n(x_n) \equiv 1$, то имеется решение, для которого $u_n(x_n) = c_n x_n$, а при всех $i \neq n$ функции $u_i(x_i)$ удовлетворяют уравнениям:

$$f_i(x_i) \frac{u_i''(x_i)}{\left[u_i'(x_i) \right]^{\beta_i}} = c_i, \tag{2.36}$$

где c_i — *некоторые постоянные. При этом функция* $U(z)$ *является решением уравнения:*

$$U''(z) = C\left[U'(z)\right]^{\beta_\Sigma - N+1} g(U), \tag{2.37}$$

причем коэффициент C *определяется формулой:*

$$C = c_n^{\beta_n - 2} \prod_{i=1, i\neq n}^{N} c_i.$$

2. Имеется решение, для которого функции $u_n(x_n)$*удовлетворяют переопределенной системе уравнений:*

$$\frac{\left[u'_n(x_n)\right]^2}{u''_n(x_n)} = a u_n(x_n) + a_n, \quad f_n(x_n)\frac{u''_n(x_n)}{\left[u'_n(x_n)\right]^{\beta_n}} = b_n \exp\left(\lambda u_n(x_n)\right), \tag{2.38}$$

а постоянные a_n,b_n *связаны соотношениями:*

$$\sum_{n=1}^{N} a_n = a_0, \quad \prod_{n=1}^{N} b_n = b_0. \tag{2.38a}$$

При этом функция $U(z)$ *должна удовлетворять уравнению:*

$$1 + (az + a_0)\frac{U''(z)}{U'(z)} = \frac{\exp(-\lambda z)}{b_0}\left[U'(z)\right]^{\beta_\Sigma - N} g(U). \tag{2.39}$$

Доказательство.

Решение уравнения (1.1) ищем в виде (2.35). Аналогично доказательству предыдущей теоремы, представим левую часть (1.1) следующим образом:

$$\det\ H = \left[U''(z)\right]^N \det\ h, \tag{2.40}$$

где элементы матрицы h определяются выражением (2.2), а входящие в него величины выражаются так:

$$a_i \!=\! b_i = u'_i(x_i)\,, \quad d_{i0} = a_i b_i + d_{i0}, \quad d_{i0} = u''_i(x_i)\frac{U'(z)}{U''(z)}, \tag{2.41}$$

На основании (2.40) и (2.41), и используя (2.1), преобразуем левую часть уравнения (1.1):

$$\det\ H = \left[U'(z)\right]^N \left(1 + \frac{U''(z)}{U'(z)}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left[u'_i(x_i)\right]^2}{u''_i(x_i)}\right)\prod_{i=1}^{N} u''_i(x_i), \tag{2.42}$$

В результате, используя (2.42) и (2.35), и проводя некоторые элементарные преобразования, уравнение (1.1) представим в виде:

$$\left(1 + \frac{U''(z)}{U'(z)}\sum_{i=1}^{N}\frac{\left[u'_i(x_i)\right]^2}{u''_i(x_i)}\right)\prod_{i=1}^{N}\left\{f_i(x_i)\frac{u''_i(x_i)}{\left[u'_i(x_i)\right]^{\beta_i}}\right\} = \left[U'(z)\right]^{\beta_\Sigma - N} g(U), \tag{2.43}$$

Уравнение (2.43) допускает разделение переменных в следующих случаях:

Случай 1.

При некотором $n \neq i \quad u_n(x_n) = c_n x_n,\ f_n(x_n) \equiv 1$. Тогда уравнение (2.43) преобразуется так:

$$c_n^{2-\beta_n}\frac{U''(z)}{U'(z)}\prod_{i=1, i\neq n}^{N}\left\{f_i(x_i)\frac{u''_i(x_i)}{\left[u'_i(x_i)\right]^{\beta_i}}\right\} = \left[U'(z)\right]^{\beta_\Sigma - N} g(U). \tag{2.44}$$

Уравнение (2.44) сводится к ОДУ относительно $U(z)$ только в том случае, если функции $u_i(x_i)$ при всех $i \neq n$ удовлетворяют уравнениям (2.36). Тогда из (2.44) следует уравнение (2.37) для функции $U(z)$.

Случай 2.

Функции $u_i(x_i)$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{[u_i'(x_i)]^2}{u_i''(x_i)} = \Phi(z), \quad \prod_{i=1}^{N} \left\{ f_i(x_i) \frac{u_i''(x_i)}{[u_i'(x_i)]^{\beta_i}} \right\} = \Psi(z), \tag{2.45}$$

где $\Phi(z)$,$\Psi(z)$ — некоторые неизвестные функции. Пусть $m \in I$, $n \in I$ — некоторые произвольно выбранные значения индекса. Продифференцируем первое из уравнений (2.45) по x_m,x_n, тогда:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_m \partial x_n} \Phi(z) = 0. \tag{2.46}$$

Из (2.46) и выражения (2.35) для z следует, что $\Phi''(z) = 0$, откуда получаем:

$$\Phi(z) = az + a_0, \tag{2.47}$$

где a,a_0 — произвольные постоянные. Из (2.47) и первого уравнения (2.45) следует, что функции $u_n(x_n)$ при всех $n \in I$должны удовлетворять первому из уравнений (2.38), а постоянные a_n связаны первым условием (2.38а). Далее, прологарифмировав второе уравнение (2.45) и проводя рассуждения, аналогичные приведенным выше, находим:

$$\Psi(z) = b_0 \exp(\lambda z), \tag{2.48}$$

где b_0,λ — произвольные постоянные. Из (2.48) и второго уравнения (2.45) следует, что функции $u_n(x_n)$ при всех $n \in I$ должны удовлетворять второму из уравнений (2.38), а постоянные b_n связаны вторым условием (2.38а). Из (2.43), (2.47) и (2.48) следует уравнение (2.39) для функции $U(z)$. Теорема доказана.

При каждом фиксированном n уравнения (2.38) составляют переопределенную систему относительно $u_n(x_n)$. Найдем условия совместности этой системы и рассмотрим две возможных ситуации:

а) $a = 0$. Решая первое уравнение (2.38), получаем:

$$u_n = -a_n \ln |x_n - x_{n0}| + \ln u_{n0}, \tag{2.49}$$

где x_{n0},u_{n0} — произвольные постоянные. Подставляя (2.49) во второе уравнение системы (2.38), находим, что система является совместной, если $f_n(x_n)$ определяется выражением:

$$f_n(x_n) = B_n (x_n - x_{n0})^{2-\beta_n-\lambda a_n}, \tag{2.50}$$

где коэффициент $B_n = -b_n u_{n0}^{\lambda} (-a_n)^{\beta_n - 1}$.

б) $a \neq 0$. Тогда с помощью замены переменной $\widetilde{u}_n = u_n + a_n/a$ первое уравнение (2.38) приводим к виду:

$$\widetilde{u''}_n(x_n) = \frac{\left[\widetilde{u'}_n(x_n)\right]^2}{a\widetilde{u}_n(x_n)}. \tag{2.51}$$

Решение уравнения (2.51) известно ([16], с.266) и определяется выражениями:

$$u_n = c(x_n - x_{n0})^{a/(a-1)} \quad (a \neq 1), \tag{2.52а}$$

$$u_n = c \exp(q x_n) \quad (a = 1). \tag{2.52б}$$

Аналогично п. а), подставляя (2.52а, б) во второе уравнение системы (2.38), находим выражения для $f_n(x_n)$, при которых эта система совместна:

$$f_n(x_n) = B_{n1}(x_n - x_{n0})^{(\beta_n+a-2)/(a-1)} \exp\left\{\lambda c(x_n - x_{n0})^{a/(a-1)}\right\} \quad (a \neq 1), \tag{2.53а}$$

$$f_n(x_n) = B_{n2} \exp\left\{(\beta_n - 1)qx_n + \lambda cq \exp(qx_n)\right\} \quad (a = 1). \tag{2.53б}$$

В формулах (2.53а, б) коэффициенты B_{n1},B_{n2} определяются выражениями:

$$B_{n1} = b_n\,(a-1)\left(\frac{ac}{a-1}\right)^{\beta_n-1} \exp\left(-\lambda a_n/a\right), \quad B_{n2} = b_n c\,(qc)^{\beta_n-2} \exp\left(-\lambda a_n\right) .$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данной работе исследованы решения многомерного неавтономного уравнения Монжа–Ампера, правая часть которого содержит произвольную нелинейность от искомой функции и степенные нелинейности от ее производных первого порядка. Доказана теорема о понижении размерности уравнения в случае экспоненциальной нелинейности от искомой функции. Получены частные решения исследуемого уравнения в случае степенной, экспоненциальной и произвольной нелинейностей от искомой функции. При этом рассмотрены случаи аддитивного, мультипликативного и функционального разделения переменных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полянин, А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 432 с.

2. Хабиров, С. В. Неизэнтропические одномерные движения газа, построенные с помощью контактной группы уравнения Монжа–Ампера / С. В. Хабиров // Математический сборник. — 1990. — Т. 181, № 12. — С. 1607–1622.

3. Шабловский, О.Н. Параметрические решения уравнения Монжа–Ампера и течения газа с переменной энтропией / О. Н. Шабловский // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2015. — № 1. — С. 105–118.

4. Кушнер, А. Г. Контактная линеаризация уравнений Монжа–Ампера и инварианты Лапласа / А. Г. Кушнер // Доклады РАН. — 2008. — Т. 422, № 5. — С. 1–4.

5. Погорелов, А. В. Многомерное уравнение Монжа–Ампера / А. В. Погорелов. — М. : Наука, 1988.

6. Губерман, И. Я. О существовании многих решений задачи Дирихле для многомерного уравнения типа Монжа–Ампера / И. Я. Губерман // Известия вузов. Математика. — 1965. — № 4. — С. 54–63.

7. Рахмелевич, И. В. О решениях двумерного уравнения Монжа–Ампера со степенной нелинейностью по первым производным / И. В. Рахмелевич // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2016. — № 4. — С. 33–43.

8. Рахмелевич, И. В. Модифицированное двумерное уравнение Монжа–Ампера / И. В. Рахмелевич // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 3. — С. 159–168.

9. Полянин, А. Д. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев, А. И. Журов. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 256 с.

10. Рахмелевич, И. В. О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным / И. В. Рахмелевич // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2015. — № 1. — С. 12–19.

11. Рахмелевич, И. В. О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями / И. В. Рахмелевич // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. — 2015. — № 3. — С. 18–25.

12. Рахмелевич, И. В. О многомерных уравнениях в частных производных со степенными нелинейностями по первым производным / И. В. Рахмелевич // Уфимский математический журнал. — 2017. — Т. 9, № 1. — С. 98–109.

13. Miller, J. (Jr.) Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions / J. (Jr.) Miller, L. A. Rubel // Journal of Physics A. — 1993. — V. 26. — P. 1901–1913.

14. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М. : Физматлит, 2004. — 560 с.

15. Фаддеев, Д. К. Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. — М. : Наука, 1977. — 288 с.

16. Зайцев, В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 576 с.

REFERENCES

1. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Handbook on non-linear equations in mathematical physics: exact solutions. [Polyanin A.D., Zaitsev V.F. Spravochnik po nelineynym uravneniyam matematicheskoi fiziki: tochnye resheniya]. Moscow, 2002, 432 p.

2. Khabirov S.V. Non-isentropical one-dimensional gas movement constructed with the help of contact group of the Monge–Ampere equation. [Khabirov S.V. Neizentropicheskie odnomernye dvizheniya gaza, postroennye s pomoshyu kontaktnoy gruppy uravneniya Monga–Ampera]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1990, vol. 181, no. 12, pp. 1607–1622.

3. Shablovsky O.N. Parametric solutions for the Monge–Ampere equation and gas flow with variable entropy. [Shablovsky O.N. Parametricheskie resheniya uravneniya Monga–Ampera i techeniya gaza s peremennoy entropiey]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2015, no. 1, pp. 105–118.

4. Kushner A.G. Contact linearization of the Monge–Ampere equations and Laplace invariants. [Kushner A.G. Kontaktnaya linearizatsya uravneniy Monga–Ampera i invarianty Laplasa]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 5, pp. 1–4.

5. Pogorelov A.V. Multi-dimensional Monge–Ampere equation. [Pogorelov A.V. Mnogomernoe uravnenie Monga–Ampera]. Moscow, 1988.

6. Guberman I.Ya. On existence of many solutions of the Dirichlet problem for multi-dimensional Monge–Ampere equation. [Guberman I.Ya. O sushestvovanii mnogih resheniy zadachi Dirihle dlya mnogomernogo uravneniya Monga–Ampera]. *Izvestiya vysshix uchebnyx zavedenij. Matematika — Russian Mathematics*, 1965, no. 4, pp. 54–63.

7. Rakhmelevich I.V. On the solutions of two-dimensional Monge–Ampere equation with power-law non-linearity on the first derivatives. [Rakhmelevich I.V. O resheniyah dvumernogo uravneniya Monga–Ampera so stepennoy nelineynostyu po pervym proizvodnym]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2016, no. 4(42), pp. 33–43.

8. Rakhmelevich I.V. Modified two-dimensional Monge–Ampere equation. [Rakhmelevich I.V. Modifitsirovannoe dvumernoe uravnenie Monga–Ampera]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 3, pp. 159–168.

9. Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. Methods of solving of non-linear equations in mathematical physics and mechanics. [Polyanin A.D., Zaitsev V.F., Zhurov A.I. Metody resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoi fiziki i mekhaniki]. Moscow, 2005, 256 p.

10. Rakhmelevich I.V. On two-dimensional hyperbolic equations with power-law non-linearity in the derivatives. [Rakhmelevich I.V. O dvumernyh gyperbolicheskih uravneniyah so stepennoy nelineynostyu po proizvodnym]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2015, no. 1, pp. 12–

19.

11. Rakhmelevich I.V. On some new solutions of the multi-dimensional first order partial differential equation with power-law non-linearities. [Rakhmelevich I.V. O nekotorykh novykh resheniakh mnogomernogo uravneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka so stepennymi nelineynostyami]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika — Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2015, no. 3, pp. 18–25.

12. Rakhmelevich I.V. On multi-dimensional partial differential equations with power nonlinearities in first derivatives. [Rakhmelevich I.V. O mnogomernykh uravneniyakh v chastnykh proizvodnykh so stepennymi nelineynostyami po pervym proizvodnym]. *Ufimskiyj matematicheskiyj zhurnal — Ufa Mathematical Journal*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 98–108.

13. Miller J. (Jr.), Rubel L.A. Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions. Journal of Physics A, 1993, vol. 26, pp. 1901–1913.

14. Gantmakher F.R. Theory of matrices. [Gantmakher F.R. Teoriya matritz]. Moscow, 2004, 560 p.

15. Faddeev D.K., Sominsky I.S. Collection of problems on highest algebra. [Faddeev D.K.,Sominsky I.S. Sbornik zadach po vyshey algebre]. Moscow, 1977, 288 p.

16. Zaytsev V.F., Polyanin A.D. Handbook on ordinary differential equations. [Zaytsev V.F., Polyanin A.D. Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam]. Moscow, 2001, 576 p.

Рахмелевич Игорь Владимирович, к.т.н., доцент, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Rakhmelevich Igor Vladimirovich, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Nizhny Novgorod State University by name of N. I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod, Russian Federation
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru