УДК 532.582.7

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧЕ ОБ ОБТЕКАНИИ МАЛОГО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ТЕЛА НЕОДНОРОДНЫМ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. С. Купцов, А. А. Катрахова

Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 29.12.2018 г.

Аннотация. В настоящей работе вычислено поле скоростей обтекания эллипсоида в неоднородном стационарном потоке вязкой несжимаемой жидкости. Основной невозмущенный поток вязкой несжимаемой жидкости (без эллипсоидального включения) представлен в виде разложения поля скоростей с помощью гармонических функций. В этот поток было внесено малое эллипсоидальное тело и для этого возмущенного потока были определены гидродинамические параметры течения жидкости (поля скоростей и давлений в жидкости) . В работе были получены новые комбинации гармонических эллипсоидальных функций, позволяющие решить эту задачу. Проведено исследование полученного решения. Ввиду сложности задачи, не представляется возможным определить точное решение , поэтому рассматривались линеаризованные уравнения Навье – Стокса, которые дают приближенное решение и кроме этого в решениях учитывались члены до третьей апроксимации. Получена оценка точности решения данной задачи.

Ключевые слова: уравнение Лапласа., малый эллипсоид, стационарный неоднородный поток, вязкая несжимаемая жидкость.

THE SOLUTION OF SYSTEM OF EQUATIONS IN PARTIAL DERIVATIVES FOR TASK'S APPLICATION CONSIDERING THE STEAMLINING OF A SMALL ELLIPSOID BODY BY A NON-HOMOGENEOUS FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE LIQUID

W. S. Kuptsov, A. A. Katrachova

Abstract. This paper presents the calculations of the field of velocities for flowing of the ellipsoid in the non-uniform stationary stream of the viscous incompressible fluid. The main undisturbed flow of the viscous incompressible fluid (without the ellipsoidal including) is presented by decomposition of the field of velocities by using harmonic functions. The little ellipsoidal body has been included in that disturbed flow and there have been determined the hydrostatic parameters of the liquid flowing for it (the field of velocities and pressures). The new combinations for the harmonic ellipsoidal functions have been obtained at this paper which allows solving this problem and also the researching of that has been done. It is impossible to find out the task of solutions for the Navier-Stocks' s equations precisely so that there have been considered the linearized Navier-Stocks' s equations which give an approximate solution and, in addition, the solutions took into account the terms up to the third approximation. Received estimation of the accuracy of solving this problem.

Keywords: Laplas equation, small ellipsoid, stationary non-uniform flow, viscous incompressible fluid.

Пусть основной (невозмущенный) поток удовлетворяет линеаризованным уравнениям Навье–Стокса

$$\mu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial x_j^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p^0}{\partial x_i}; \quad \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i^0}{\partial x_j} = 0, \tag{1}$$

где x_j — декартовы координаты, u_i^0 — компоненты вектора скорости, p^0 — давление в жидкости, ρ — плотность жидкости, μ — коэффициент динамической вязкости.

Решение системы уравнений (1) (невозмущенного потока) можно получить, если разложения поля скоростей представить с помощью гармонических функций

Тогда решение можно записать в виде: $u_i^0 = u_i + u_i^*$, где

$$u_i(x_j) = u_i(\overline{q}) + \frac{\partial u_i}{\partial y_j}(\overline{q})x_j + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial y_j \partial y_m}(\overline{q})x_j x_m + \ldots,$$

$$u_i^*(x_j) = \frac{1}{5\mu}\left[r^2 \frac{\partial p^0}{\partial y_i}(\overline{q}) - \frac{1}{2}\frac{\partial p^0}{\partial y_j}(\overline{q})x_i x_j\right] + \ldots, i, j, m = 1, 2, 3; r^2 = x_j x_j,$$

где суммирование ведется по одинаковым символам.

Внесем малый эллипсоид в невозмущенный поток. Причем прямоугольная система координат x_i связана с эллипсоидом неподвижным образом и направление полуосей a_i (эллипсоида) совпадает с направлением осей x_i, а центр эллипсоида совпадает с началом координат x_i.

Пусть скорости $v_i(x_j) = v_i^1 + v_i^2 + v_i^3 + \ldots$ и давления $p(x_j) = p^1 + p^2 + p^3 + \ldots$ (возмущенного потока) удовлетворяют системы уравнениям (1). Решения системы (1) можно найти отдельно для v_i^1, v_i^2, v_i^3 и p^1, p^2, p^3 (для скоростей и давлений, содержащих x_i в нулевой степени, в первой и второй степени). Остальные слагаемые разложений учитываться не будут.

Для этого рассмотрим гармонические эллипсоидальные функции вида:

$$\varphi_i^1 = x_i \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{D(a_i^2 + \lambda)} = \eta_i x_i \text{ (по } i \text{ не суммируется)}; \varphi_i^2 = \beta_i x_j x_k,$$

$$\beta_i = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{D(a_i^2 + \lambda)(a_k^2 + \lambda)}; i, j, k \text{ — образуют перестановку из чисел } 1, 2, 3 \text{ и } i \neq j \neq k,$$

$$\Omega = \int_{\lambda}^{\infty} \left[\frac{x_1^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \lambda} - 1\right] \frac{d\lambda}{D}; \varphi_0 = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{D} = \eta; \varphi_3 = x_1 x_2 x_3 \int_{\lambda}^{\infty} \frac{d\lambda}{D^3} = \beta x_1 x_2 x_3;$$

$$D^2 = (a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)(a_3^2 + \lambda).$$

Отметим, что все эти функции стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$ и на поверхности эллипсоида при $\lambda = 0$ принимают свои значения.

Граничные условия для скорости — это условие прилипания жидкости на поверхности эллипсоида и на бесконечности скорости возмущенного и невозмущенного потока совпадают, т. е.

$$v_i|_{\lambda=0} = 0; v_i|_{\lambda\to\infty} = u_i^0. \tag{2}$$

Для v_i^1 граничные условия имеют вид:

$$[v_i^1 + u_i(\overline{q})]|_{\lambda=0} = 0; v_i^1|_{\lambda\to\infty} = u_i(\overline{q}). \tag{3}$$

Решение системы уравнений (1) для v_i^1 будет:

$$v_i^1 = K_j \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{1}{2\mu}\left[K_j x_j \frac{\varphi_0}{\partial x_i} - K_i \varphi_0\right], p^1 = 2M_j \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_j}. \tag{4}$$

где K_i, M_i — неизвестные const, которые определяются из уравнений (3).

Подставим v_i^1, p^1 из (4) в уравнения (3). Получим

$$K_i = \mu \frac{u_i(\overline{q})}{a_i^2\eta_i^0 + \eta_0},\ M_i = -\frac{a_i^2 u_i(\overline{q})}{2(a_i^2\eta_i^0 + \eta_0)}, \tag{5}$$

а η_i^0, η_0 — значение η_i, η берется при $\lambda = 0$ и по i и не суммируется.

Для v_i^2 граничные условия имеют вид:

$$\left.\left[v_i^2 + \frac{\partial u_i}{\partial y_j}(\overline{q})x_j\right]\right|_{\lambda=0} = 0;\ v_i^2|_{\lambda\to\infty} = \frac{\partial u_i}{\partial y_j}(\overline{q})x_j. \tag{6}$$

Решение системы уравнений (1) для v_i^2 будет иметь вид:

$$v_i^2 = \frac{\partial(R_j\varphi_j^2)}{\partial x_i} + \mathcal{E}_{ijk}W_k\frac{\partial\varphi_k^2}{\partial x_j} + A_j^k x_k\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_j\partial x_i} - F_j^i\frac{\partial\Omega}{\partial x_j},\ p^2 = 2A_k^k\frac{\partial^2\Omega}{\partial x_j\partial x_k}, \tag{7}$$

где $\mathcal{E}_{ijk}$ — тензор Леви–Чевиты; R_j, W_j, A_j^k, F_j^i — неизвестные const, которые определяются из уравнений (6).

Подставим (6) в (7) и решим систему:

$$R_i = \frac{1}{2\beta_i^0}\left[\frac{\partial u_i}{\partial y_\gamma}(\overline{q}) + \frac{\partial u_\gamma}{\partial y_l}(\overline{q})\right],A_\gamma^l = \frac{\eta_l^0\left[\frac{\partial u_l}{\partial y_\gamma}(\overline{q}) + \frac{\partial u_\gamma}{\partial y_l}(\overline{q})\right] + a_\gamma^2\beta_i^0\left[\frac{\partial u_l}{\partial y_\gamma}(\overline{q}) - \frac{\partial u_\gamma}{\partial y_l}(\overline{q})\right]}{4\beta_i^0(\eta_l^0 a_l^2 - \eta_\gamma^0 a_\gamma^2)},$$

$$W_i = 2[a_\gamma^2 R_\gamma + a_l^2 R_l],\ A_i^i = \frac{2\tau_0^i\frac{\partial u_i}{\partial y_i}(\overline{q}) - \tau_0^l\frac{\partial u_l}{\partial y_l}(\overline{q}) - \tau_0^i\frac{\partial u_\gamma}{\partial y_\gamma}(\overline{q})}{6(\tau_0^1\tau_0^2 + \tau_0^1\tau_0^3 + \tau_0^2\tau_0^3)},\ \tau_0^i = \frac{\eta_l^0 a_l^2 - \eta_\gamma^0 a_\gamma^2}{a_l^2 - a_\gamma^2}, \tag{8}$$

где i, γ, l — образуют четную перестановку из чисел $1,2,3$ и $i \neq \gamma \neq l$, и по ним не ведется суммирование.

Для v_i^3 граничные условия имеют вид:

$$[v_i^3 + u_i^{**}]|_{\lambda=0} = 0;\ v_i^3|_{\lambda\to\infty} = u_i^{**}, \tag{9}$$

где $u_i^{**} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u_i}{\partial y_j\partial y_m}(\overline{q})x_jx_m + \frac{1}{5\mu}\left[r^2\frac{\partial p^0}{\partial y_i}(\overline{q}) - \frac{1}{2}\frac{\partial p^0}{\partial y_j}(\overline{q})x_ix_j\right]$.

Решение уравнений (1) для v_i^3 будет:

$$v_i^* = \frac{\partial(C_j\varphi_j^3)}{\partial x_i} + T_i\left[\frac{\partial\varphi_\gamma^3}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial\varphi_l^3}{\partial x_l}\right] + T_\gamma\frac{\partial\varphi_\gamma^3}{\partial x_\gamma} - T_l\frac{\partial\varphi_l^3}{\partial x_l} + \frac{1}{\mu}\mathcal{E}_{ijk}B_j\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{1}{2\mu}\left[D_j^m x_j\frac{\partial\varphi_m^2}{\partial x_i} - D_i^m\varphi_m^2\right] + M_i^m x_j\frac{\partial\varphi_m^2}{\partial x_j} + M_j^m x_j\frac{\partial\varphi_m^2}{\partial x_i} - M_j^m x_i\frac{\partial\varphi_m^2}{\partial x_j} + M_i^m\varphi_m^2 + N\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_i},$$

$$p^3 = D_j^m\frac{\partial\varphi_m^2}{\partial x_j}, \tag{10}$$

где C_j, T_j, B_j, M_j^m, N — неизвестные const, которые определяются из уравнений (9), по j,m,k ведется суммирование, $\varphi_j^3 = f_{ijk}(\lambda)x_ix_jx_k$ — гармонические функции (для данной задачи имеет смысл рассматривать случаи кроме $j \neq k$).

Выражения для функции $f_{ijk}(\lambda)$ получены авторами путем подстановки φ_j^3 в уравнение Лапласа [5].

Они имеют вид:

$$f_{iii}(\lambda) = \frac{35}{8}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left[\frac{2}{D(a_i^2+\lambda)^3} - \frac{3}{(a_i^2+\lambda)^2}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{D(a_i^2+\lambda)}\right]d\lambda,$$

$$f_{i\gamma\gamma}(\lambda) = -\frac{105}{8}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left[\frac{1}{(a_\gamma^2+\lambda)^2}\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\lambda}{D(a_\gamma^2+\lambda)^2}\right]d\lambda.$$

Подставим (10) в (9), используя $x_1^2 = a_1^2(1 - x_2^2/a_2^2 - x_3^2/a_3^2)$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&D_\gamma^l\beta_l^0 + 2\mu[1+(a_i^2/a_\gamma^2)]M_\gamma^l\beta_l^0 + 2\mu(a_i^2/a_\gamma^2)M_l^\gamma\beta_l^0 + 2\mu C_i[f_{i\gamma\gamma}(0) - (3f_{iii}(0)+\\
&+2a_i^2f'_{iii}(0))(a_i^2/a_\gamma^2)] + 2\mu T_i[(3f_{\gamma\gamma\gamma}(0) + 2a_\gamma^2 f'_{\gamma\gamma\gamma}(0) - f_{\gamma\gamma l}(0))(-1)^r(f_{ii\gamma}(0) - f_{iil}(0))a_i^2/a_\gamma^2] =\\
&\qquad = -\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial_i^2}(\overline{q}) + \mu(a_i^2/a_\gamma^2)\frac{\partial^2 u_i}{\partial y_i^2}(\overline{q}) - \frac{1}{5}[2-(a_i^2/a_\gamma^2)]\frac{\partial p^0}{\partial y_j}(\overline{q}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+[3\beta_l^0 - 2/(a_\gamma^2D_0)\mu M_\gamma^l - \mu\beta_l^0M_l^\gamma] - (-1)^r\beta_0B_i + 2\mu C_i[f_{i\gamma\gamma}(0) + f'_{iii}(0)(a_i^4/a_\gamma^4)] -\\
&\qquad - 2\mu T_i[f_{ii\gamma}(0) + a_i^2 f'_{\gamma\gamma\gamma}(0)](-1)^r = -\mu\frac{\partial^2 u_\gamma}{\partial y_i\partial y_\gamma}(\overline{q}) + \frac{1}{10}\frac{\partial p^0}{\partial y_j}(\overline{q}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\mu}D_\gamma^l =\\
&= [(a_i^2/a_\gamma^2)-1]M_\gamma^l + C_iD_0[f_{i\gamma\gamma}(0)a_\gamma^4 - f'_{iii}(0)a_i^4](a_i^2/a_\gamma^2) + T_{ii}D_0[f_{ii\gamma}(0)a_i^4 - f'_{\gamma\gamma\gamma}(0)a_\gamma^4](-1)^r,
\end{aligned}$$

$$B_i = \mu\left[M_l^\gamma(a_i^2 - a_\gamma^2) + (a_l^2 - a_i^2)M_\gamma^l - \frac{35}{4}T_i\right],$$

$$D_{lj}^j a_j^2 + 2\mu N = 0,$$

$$D_j^j\beta_j^0 + 2\mu N - 2D_i^i\beta_i^0 = -\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial y_l\partial y_\gamma}(\overline{q}), \tag{11}$$

где суммирование ведется по j;

$$r = \begin{cases} 2, & \text{если } i,\gamma,l \text{ имеет четное число перестановок},\\ 1 & \text{если } i,\gamma,l \text{ имеет нечетное число перестановок},\end{cases}$$

а индексы γ, l принимают при фиксированном i по два значения каждый.

В этой системе допускается, что i, γ, l имеют четное или нечетное число перестановок, что удваивает число тех уравнений, где содержится индекс r.

Авторами проведено исследование решений системы (11). Она разбивается на три линейные алгебраические подсистемы с определителями не равными нулю. Получен конкретный вид решений этих систем. В силу громоздкости, проведенных выкладок и полученных в результате выражений для решений систем в данной статье они не приведены. Точность решения задачи для компонент вектора скоростей имеет порядок $\left(\frac{a}{L}\right)^3$, где L — расстояние от центра эллипсоида до особенностей основного потока, a — максимальная длинна полуосей эллипсоида.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Седов, Л. И. Механика сплошной среды / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1973.

2. Слезкин, Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. — М., 1955.

3. Хаппель, Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. — М. : Мир, 1976.

4. Купцов, В. С. О силе, действующей на сферическую частицу, помещенную в нестационарный поток вязкой жидкости / В. С. Купцов // В кн. : Сб. статей по мех. спл. сред. Труды НИИМа. Воронеж: ВГУ, 1976, вып. 18.

5. Катрахова, А. А. О существовании и единственности классического решения смешанной задачи гиперболического уравнения, содержащего оператор Бесселя / А. А. Катрахова, А. Ю. Сазонов, А. Ю. Фомичева // Вестник Тамбовского госуниверситета. — 2009. — Т. 14, вып. 6.

6. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

7. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

8. О существовании решений граничных задач в полупространстве для некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 64–76.

REFERENCES

1. Sedov L.I. Continuum mechanics. [Sedov L.I. Mexanika sploshnoyj sredy]. Moscow, 1973.

2. Slezkin N.A. Viscous incompressible fluid dynamics. [Slezkin N.A. Dinamika vyazkoyj neszhimaemoyj zhidkosti]. Moscow, 1955.

3. Happel J., Brenner G. Hydrodynamics at low Reynolds numbers. [Xappel' Dzh., Brenner G. Gidrodinamika pri malyx chislax Reyjnol'dsa]. Moscow, 1976.

4. Kuptsov V.S. On the force acting on a spherical particle placed in an unsteady flow of a viscous fluid. [Kupcov V.S. O sile, deyjstvuyushheyj na sfericheskuyu chasticu, pomeshhennuyu v nestacionarnyyj potok vyazkoyj zhidkosti]. NIIM Proceedings. Voronezh: VSU, 1976, iss. 18.

5. Katrakhova A.A. Sazonov A.Yu., Fomicheva A.Yu. On the existence and uniqueness of the classical solution to the mixed problem of a hyperbolic equation containing the Bessel operator. [Katraxova A.A.. Sazonov A.Yu., Fomicheva A.Yu. O sushhestvovanii i edinstvennosti klassicheskogo resheniya smeshannoyj zadachi giperbolicheskogo uravneniya, soderzhashhego operator Besselya]. *Vestnik Tambovskogo gosuniversiteta — Tambov State University Bulletin*, 2009, vol. 14, iss. 6.

6. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

7. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 162–172.

8. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A. On the existence of solutions to boundary value problems in a half-space for some classes of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. O sushhestvovanii resheniyj granichnyx zadach v poluprostranstve dlya nekotoryx klassov vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 64–76.

Купцов Валерий Семенович, доцент кафедры ВМФММ ВГТУ, кандидат физико–математических наук, Воронеж, Россия
Тел.: +7(473)277–95–43

Kupchov Valery Semenovich, associate Professor of VMEM Voronezh State Technical University, candidate of physico-mathematical Sciences, Voronezh, Russia
Tel.: +7(473)277–95–43

Катрахова Алла Анатольевна, доцент кафедры ВМФММ ВГТУ, кандидат физико–математических наук, Воронеж, Россия

Katrakhova Alla Anatolyevna, associate Professor of VMEM Voronezh State Technical University, candidate of physico-mathematical Sciences, Voronezh, Russia