УДК 517.9

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А. В. Костин, М. Н. Силаева, Алкади Хамса Мохамад

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.01.2018 г.

Аннотация. Устанавливается корректность по С. Г. Крейну задачи Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Капуто порядка $\alpha \in (0,1)$ в банаховом пространстве с генератором сильно непрерывной полугруппы линейных преобразований. Получено представление решения задачи через соответствующую полугруппу, функцию Иосиды и интеграл Римана-Лиувилля дробного порядка.

Устанавливается оценка корректности на решение задачи через начальные данные.

Полученные результаты применяются к установлению корректной разрешимости задачи Коши, описывающей дробную диффузию с оператором Лапласа, заданным в пространствах равномерно непрерывных и ограниченных в $R^n (n = 1,2,...)$ функций. Этот факт существенно дополняет результат Майнарди, получивший фундаментальное решение для этой задачи при $n = 1$.

Другим примером, демонстрирующим общий результат, является установление корректности задачи Коши для дифференциального уравнения с оператором $A = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$, являющимся генератором полугруппы Пуассона в пространствах равномерно непрерывных и ограниченных в R^n функций.

Ключевые слова: корректные и некорректные задачи, генератор сильно непрерывной полугруппы, дробные интегралы Римана-Лиувилля, дробные производные Капуто.

ON THE CORRECT SOLVABILITY OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE FRACTIONAL DERIVATIVE EQUATION IN BANACH SPACE

A. V. Kostin, M. N. Silaeva, Alkadi Hamsa Mohamad

Abstract. The correctness according to S.G. Crane of Cauchy's task for the differential equation from fractional derivative Kaputo $\alpha \in (0.1)$ in Banach space with the generator of strongly continuous semi-group of linear transformations is established by order An impression of the solution of a task through the corresponding semi-group, Iosida's function and Rimana-Liouville's integral of a fractional order is gained.

Correctness assessment on the solution of a task through initial data is established.

The received results are applied to establishment of correct resolvability of a task of Cauchy describing fractional diffusion with Laplace's operator set in spaces evenly continuous and limited in $R^n (n = 1.2...)$ functions. This fact significantly supplements Maynardi's result which received the fundamental decision for this task at $n = 1$.

Other example showing the general result is establishment of correctness of a task of Cauchy for the differential equation with the operator of $A = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ which is the generator of semi-group of Poisson in spaces evenly continuous and functions limited in R^n.

Keywords: correct and incorrect problems, generator of strongly continuous semi-group, fractional integrals of Rimana-Liouville, fractional derivatives of Kaputo.

© Костин А. В., Силаева М. Н., Алкади Хамса Мохамад, 2020

В [8] для уравнения

$$\frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, 0 < \alpha < 1, t > 0, x \in (-\infty, \infty); \tag{0.1}$$

где

$$\frac{\partial^\alpha u(t,x)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \frac{\partial u(s,x)}{\partial s} ds- \tag{0.2}$$

производная в смысле Капуто по переменной t, рассматривается задача Коши с условиями

$$u(0, x,\alpha) = g(x), \tag{0.3}$$

$$u(t, \pm\infty,\alpha) = 0, \tag{0.4}$$

и производится решение этой задачи в виде

$$u(t,x,\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,\xi,\alpha) g(x-\xi) d\xi \tag{0.5}$$

с указанием функции Грина $G(t,\xi,\alpha)$.

Однако, корректная разрешимость этой задачи, с точки зрения устойчивости решения к погрешностям, в [8] не обсуждается.

Решению этой проблемы для общего случая дифференциальных уравнений в банаховом пространстве посвящена настоящая заметка.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

В банаховом пространстве E с нормой $\|\cdot\|_E = \|\cdot\|$ рассматривается уравнение

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = Au(t), t \geqslant 0, \tag{0.6}$$

где A-линейный замкнутый оператор с областью определения $D(A) \subset E$ и областью значений $R(A)$,

$$\frac{d^\alpha u(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds- \tag{0.7}$$

производная по Капуто порядка $0 < \alpha < 1$.

Определение 0.1 *Решением уравнения (0.6) называется вектор-функция $u(t)$ со значениями в $D(A)$, для которой определена производная (0.7) и, удовлетворяющая уравнению (0.6).*

Определение 0.2 *Решение уравнения (0.6) удовлетворяющее условию*

$$u(0) = u_0 \in D(A) \tag{0.8}$$

будем называть решением задачи Коши (0.6)-(0.7).

Определение 0.3 *Задачу (0.6)-(0.7) будем называть равномерно корректной, если для ее решений выполняется оценка*

$$\|u(t)\|_E \leqslant M\|u_0\|_E, \tag{0.9}$$

где константа M от t и u_0 не зависит.

В настоящей заметке доказывается

Теорема 0.1 *Если оператор A является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы линейных преобразований $U(t,A)$, то задача Коши (0.6)-(0.8) равномерно корректна и ее решение имеет вид*

$$u(t) = \int_0^\infty I_t^{(1-\alpha)}(h_\alpha(t,\xi)) U(\xi,A) u_0 d\xi, \tag{0.10}$$

где $I^{(1-\alpha)}f(t)$*-дробный интеграл Римана-Лиувилля,* $h_\alpha(t,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{tp-\xi p^\alpha}dp$ *— функция Иосиды и справедлива оценка (0.9).*

1. ГЕНЕРАТОР СЖИМАЮЩИХ ПОЛУГРУПП И КОРРЕКТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО АДАМАРУ

В этом параграфе используются сведения из работ [2]-[5]. Пусть F и U-метрические пространства с метриками ρ_F и ρ_U. Согласно Адамару, задача определения решения $u \in U$ уравнения

$$Au = f, \tag{1.1}$$

где $f \in F$ задано, называется корректно поставленной на пространствах (F,U), если выполняются условия:

а) для всякого $f \in F$ существует $u \in U$-решение уравнения (1.1)

б) решение определяется однозначно

в) задача устойчива на пространствах (F,U), то есть для любого $\delta > 0$, такое что из неравенства $\rho_F(f_1,f_2) < \delta$ следует $\rho_U(u_1,u_2) < \varepsilon$.

В случае линейности оператора A, задача (1.1) корректна тогда и только тогда, когда существует ограниченный оператор A^{-1}, действующий из F в F.

Методы теории сильно непрерывных полугрупп преобразований (операторных экспонент) являются основными при исследовании корректной разрешимости задачи Коши для уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \tag{1.2}$$

где A- линейный оператор с плотной в банаховом пространстве E областью определения $D(A)$, $t \in [0,T] \subset R^+ = [0,\infty)$. Тогда отыскивается сильно дифференцируемая на $[0,T]$ функция $u(t)$ со значениями в $D(A)$, удовлетворяющая (1.1) и условию

$$u(0) = u_0 \in D(A). \tag{1.3}$$

В этом случае задача (1.2)-(1.3) называется равномерно корректной, если она однозначно разрешима и из $u_n \to 0$ следует $u_n(t) \to 0$ равномерно по t на каждом промежутке $[0,T]$.

На связь корректной разрешимости задачи (1.2)-(1.3) указывает следующий факт.

Задача (1.2)-(1.3) равномерно корректна тогда и только тогда, когда A является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы (C_0-полугруппы) $U(t,A)$ со свойствами

1) $U(0,A) = I$ — тождественный в E оператор

2) $U(t+s,A) = U(t,a)U(s,A)$ для всех $T \in R^+$

3) $\lim_{t\to 0_+} \|U(t)\varphi - \varphi\| = 0$ при всех $\varphi \in E$.

Тогда $\frac{dU}{dt}\varphi|_{t=0} = U'(0,A)\varphi, \varphi \in D(A)$ и решение имеет вид

$$u(t) = U(t,A)u_0. \tag{1.4}$$

Для C_0-полугрупп при некоторых $M > 0$ и $\omega \in R$ выполняется оценка

$$\|U(t,A)\| \leqslant Me^{-\omega t}. \tag{1.5}$$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Для доказательства используем функцию Иосиды [1] с. 357

$$h(t,s,\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt-sp^\alpha dp}, & t \geqslant 0; \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

где $0 < \alpha \leqslant 1$, $s > 0$, $\sigma > 0$ и ветви функции p^α выбраны так, что $Re(p^\alpha) > 0$ при $Re(p) > 0$.

Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной p-плоскости с разрезом на отрицательной части вещественной оси. Множитель e^{-sp^α} обеспечивает сходимость интеграла (2.1).

Функция $h(t,s,\alpha)$ является обратным преобразованием Лапласа e^{-sp^α}, то есть

$$h(t,s,\alpha) = L^{-1}(e^{-sp^\alpha})(t) \tag{2.2}$$

и не зависит от выбора $\sigma > 0$.

Эта функция обладает следующими свойствами:

1.

$$h(t,s,\alpha) \geqslant 0$$

2.

$$\int\limits_0^\infty h(t, s, \alpha)\, dt = 1$$

3.

$$\int\limits_0^\infty \frac{\partial h(t, s, \alpha)}{\partial s}\, dt = 0. \tag{2.3}$$

Функцию $h(t,s,\alpha)$ можно представить в вещественном виде ([1], с. 362)

$$h(t, s, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{tr\cos\Theta - sr^\alpha \cos\alpha\Theta} \sin(tr\cos\Theta - sr^\alpha \sin\theta + \theta) dr. \tag{2.4}$$

При любом $\frac{\pi}{2} \leqslant \Theta \leqslant \pi$. В частности при $\Theta_\alpha = \frac{\pi}{1+\alpha}$ справедливы неравенства

$$cos\Theta_\alpha < 0, \quad cos\alpha\Theta_\alpha > 0$$

при всех

$$0 < \alpha \leqslant 1. \tag{2.5}$$

При $\alpha = \frac{1}{2}$ имеем представление

$$h(t, s, \frac{1}{2}) = \frac{t}{2\sqrt{\pi}} s^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{t^2}{4s}}. \tag{2.6}$$

Из (2.4) следует оценка: если $\Theta = \Theta_\alpha = \frac{\pi}{1+\alpha}$, то

$$h(t,s,\alpha) \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty e^{-tr|\cos\Theta_\alpha| - sr^\alpha \cos\alpha\Theta} dr \tag{2.7}$$

Для доказательства теоремы будем предполагать, что решение задачи (0.6)-(0.7) преобразуемо по Лапласу. Тогда применение преобразования Лапласа в (0.6) с учетом (0.7) получаем уравнение в образах

$$(p^\alpha I - A)\widetilde{u}(p) = p^{\alpha-1} t^{-\alpha} u_0, \tag{2.8}$$

где

$$\widetilde{u}(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} u(t) dt. \tag{2.9}$$

Так как A — генератор полугруппы $U(t,A)$ класса C_0, то для $Re(p^\alpha) > 0$ справедливо равенство

$$\widetilde{u}(p) = p^{\alpha-1} R(p^\alpha,A) u_0. \tag{2.10}$$

где $R(p^\alpha,A) = (p^\alpha I - A)^{-1}$ — резольвента оператора A, которая определена и ограничена на всем пространстве E.

Далее, учитывая связь между $R(p^\alpha,A)$ и $U(t,A)$, запишем (2.10) в виде

$$\widetilde{u}(p) = p^{\alpha-1} \int\limits_0^\infty e^{-\xi p^\alpha} U(\xi,A) u_0 \, d\xi \tag{2.11}$$

Применение обратного преобразования дает решение задачи в виде свертки

$$u(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \int\limits_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} exp(pt - \xi p^\alpha) \, dp \; U(\xi,A) u_0 d\xi =$$

$$= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} * \int\limits_0^\infty h(t,\xi,\alpha) U(\xi,A) u_0 \, d\xi \tag{2.12}$$

Используя неравенство (2.7), оценим поведение решения задачи (0.6) - (0.7)

$$||u(t)|| \leqslant \frac{t^{-\alpha}}{\pi\Gamma(1-\alpha)} * \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty e^{-tr|\cos\Theta_\alpha| - \xi r^\alpha \cos\alpha\Theta_\alpha} \, \|U(\xi,A)\| ||u_0|| d\xi dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Mt^{-\alpha}}{\pi\Gamma(1-\alpha)} * \int\limits_0^\infty e^{-tr|\cos\Theta_\alpha|} \int\limits_0^\infty e^{-\xi r^\alpha \cos\alpha\Theta_\alpha - \omega\xi} \, d\xi dr ||u_0|| =$$

$$= \frac{Mt^{-\alpha}}{\pi\Gamma(1-\alpha)} * \int\limits_0^\infty \frac{-e^{tr|cos\Theta_\alpha|} dr}{r^\alpha cos\alpha\Theta_\alpha + \omega} \leqslant \frac{Mt^{-\alpha}}{\pi\Gamma(1-\alpha)} * \int\limits_0^\infty \frac{-e^{tr|cos\Theta_\alpha|} dr}{r^\alpha cos\alpha\Theta_\alpha} =$$

$$= \frac{Mt^{-\alpha}}{\pi\Gamma(1-\alpha)} * \frac{\Gamma(1-\alpha)}{cos\alpha\Theta_\alpha} * \frac{||u_0||}{|cos\Theta_\alpha|^{1-\alpha}} = \frac{M|cos\Theta_\alpha|^\alpha}{\pi|cos\Theta_\alpha cos\alpha\Theta_\alpha|} t^{-\alpha} * t^{\alpha-1} ||u_0|| =$$

$$= \frac{||u_0||}{cos(\Theta_\alpha)^{1-\alpha} sin\alpha\pi}.$$

Таким образом для предполагаемого решения задачи (0.6) - (0.7) указан вид (0.10) и получена оценка (0.9).

Для доказательства существования решения нужно рассмотреть функцию $u(t)$ вида (0.10) и с помощью обратной процедуры с применением преобразования Лапласа показывается, что она является решением задачи Коши с оценкой (0.9).

3. ПРИМЕРЫ

Для $x \in R^n, \; x = (x_1, x_2, ..., x_n), \; t > 0$ рассмотрим интеграл

$$W(t)\varphi(x) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^n} \int\limits_{R^n} e^{\frac{-|t-s|^2}{4t}} \varphi(s) ds. \tag{3.1}$$

В теории уравнений с частными производными этот интеграл носит название поверхностного теплового потенциала. В [7] интеграл (3.1) называется потенциалом Гаусса-Вейерштрасса.

В [3] он называется полугруппой Вейерштрасса. При $n = 1$ в [1] с. 325 доказывается, что полугруппа $W(t)\varphi(x)$ является сжимающей в пространствах $L_p(R^1)(p \geqslant 1)$ и $C_{[-\infty;+\infty]}$ - пространство равномерно-непрерывных и ограниченных функций на R^1 с производящим оператором $A\varphi = \frac{d^2\varphi}{dx^2}$ и областью определения $D(A) = \{\varphi \in L_p, \frac{d^2u}{dx^2} \in L_p\}$

В общем случае из корректной разрешимости, указанной в [6] с. 519 для задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2 u}{dx_i^2} \tag{3.2}$$

$$u(0,x) = \varphi(x) \tag{3.3}$$

в пространстве непрерывных и ограниченных в R^n с нормой $||\varphi||_C = \sup_{x\in R_n} |\varphi(x)|$ следует, что оператор A заданный Лапласианом Δ и областью определения $D(A) = \{\varphi, \varphi \in C(R^n), \frac{d^2u}{dx_i^2} \in C(R^n)\}$ является производящим оператором полугруппы Вейерштрасса $W(t)$ и для нее выполняются оценки

$$||W(t)\varphi||_C \leqslant ||\varphi||_C. \tag{3.4}$$

И таким образом из теоремы следует, что задача

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \Delta_x u(x,t) \tag{3.5}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{3.6}$$

равномерно корректна в пространстве $C(R^n)$, ее решение имеет вид

$$u(x,t) = \int\limits_0^\infty I^{1-\alpha} h(\xi, t) W(\xi)\varphi(x)\, d\xi \tag{3.7}$$

и справедлива оценка

$$||u(t,x)\|_c \leqslant \frac{||\varphi||_c}{(cos\Theta_\alpha)^{1-\alpha} \sin \alpha\pi}. \tag{3.8}$$

2. Полугруппа Пуассона

В соответствии с [7], с. 366 (см. также [3], с. 122) интегралом Пуассона называется интеграл вида

$$P(t)\varphi(x) = C_n t \int_{R_n} \frac{\varphi(x-s)ds}{(|s|^2 + t^2)^{\frac{n+1}{2}}}, t > 0 \tag{3.9}$$

где

$$C_n = \pi^{\frac{n+1}{2}} \Gamma(\frac{n+1}{2}).$$

Семейство $P(t)\varphi(x)$ является сильно непрерывной полугруппой в пространствах $L_p(^n), C(R^n)$ с производящим оператором $D = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$.

Существуют различные реализации этого оператора.

В одномерном случае ($n = 1$)он реализуется представлением (см.[7] с.369)

$$(D\varphi)(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x-s) - \varphi(s)}{s^2 + h^2} ds,$$

де предел понимается в сильном смысле.

В общем случае варианты реализации оператора $(D\varphi)(x) = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\varphi(x)$ приведены в [7] с.370.

Из общей теории полугрупп Балакришнана следует, что оператор $-(-\Delta)^{\frac{1}{2}}$ является производящим оператором полугруппы класса C_0, представимой интегралом Пуассона в тех же пространствах, в которых сильно непрерывна полугруппа Вейерштрасса $W(t)$ и, следовательно, задача

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + (-\Delta)^{\frac{1}{2}} u(x,t) = 0, \tag{3.10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

равномерно корректна, ее решение имеет вид

$$u(x,t) = I_t^{(1-\alpha)}) \int_0^\infty h(\xi,t) P(\xi)\varphi(x) dx \tag{3.11}$$

и справедлива оценка вида (3.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

2. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

3. Костин, А. В. К теории функциональных пространств Степанова / А. В. Костин, В. А. Костин. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2007. — 258 с.

4. Костин, В. А. Элементарные полугруппы преобразований и их производящие уравнения / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // Доклады Академии Наук. — 2014. — Т. 455, № 2. — С. 142–146.

5. Костин, А. В. О корректной разрешимости задач без начальных условий для некоторых сингулярных уравнений / А. В. Костин, Д. В. Костин, М. Н. Небольсина // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 1. — С. 87–93.

6. Михлин, С. Г. Курс математической физики / С. Г. Михлин. — СПб. : Лань, 2002. — 575 с.

7. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. — Минск : Наука и техника, 1987. — 687 с.

8. Майнарди, Ф. Временное уравнение дробной диффузионно-волновой функции / Ф. Майнарди // Радиофизика и квантовая электроника. — 1995. — Вып. 38, № 1–2. — С. 20–36.

9. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

10. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

11. О существовании решений граничных задач в полупространстве для некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 64–76.

12. Об априорных оценках решений граничных задач для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 77–92.

13. Об априорных оценках решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 64–76.

REFERENCES

1. Iosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyyj analiz]. Moscow, 1967, 624 p.

2. Krejn S.G. Linear Differential Equations in Banach Spaces. [Kreyjn S.G. Lineyjnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow, 1967, 464 p.

3. Kostin A.V., Kostin V.A. To the theory of functional spaces Stepanova. [Kostin A.V., Kostin V.A. K teorii funkcional'nyx prostranstv Stepanova]. Voronezh, 2007, 258 p.

4. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Elementary transformation semigroups and their generating equations. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Elementarnye polugruppy preobrazovaniyj i ix proizvodyashhie uravneniya]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2014, vol. 455, no. 2, pp. 142–146.

5. Kostin A.V., Kostin D.V., Nebolsina M.N. On the correct solvability of problems without initial conditions for some singular equations. [Kostin A.V., Kostin D.V., Nebolsina M.N. O korrektnoyj razreshimosti zadach bez nachal'nyx usloviyj dlya nekotoryx singulyarnyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 1, pp. 87–93.

6. Mikhlin S.G. Course of mathematical physics. [Mixlin S.G. Kurs matematicheskoyj fiziki]. SPb., 2002, 575 p.

7. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. [Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ix prilozheniya]. Minsk, 1987, 687 p.

8. Maynardi F. Time equation of fractional diffusion-wave function. [Mayjnardi F. Vremennoe uravnenie drobnoyj diffuzionno-volnovoyj funkcii]. *Radiofizika i kvantovaya elektronika — Radiophysics and quantum electronics*, 1995, iss. 38, no. 1–2, pp. 20–36.

9. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

10. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 162–172.

11. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A. On the existence of solutions to boundary value problems in a half-space for some classes of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. O sushhestvovanii resheniyj granichnyx zadach v poluprostranstve dlya nekotoryx klassov vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 64–76.

12. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A. On a priori estimates for solutions of boundary value problems for a class of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. Ob apriornyx ocenkax resheniyj granichnyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 77–92.

13. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Lezhenina I.F., Glushko A.V. A priori estimates for solutions of general boundary value problems in a half-space for degenerate elliptic equations. [Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Lezhenina I.F., Glushko A.V. Об априорных оценках решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 64–76.

Костин А. В., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: leshakostin@mail.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Kostin A. V., candidate of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: leshakostin@mail.ru
Tel.: +7(473)220–83–64

Силаева М. Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru
Тел.: +7(473)220–83–64

Silaeva M. N., candidate of physico-mathematical sciences, associate professor of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: marinanebolsina@yandex.ru
Tel.: +7(473)220–83–64

Алкади Хамса Мохамад, аспирант кафедры математического моделирования математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
Тел.: +7(473)220–83–64

Alkadi Hamsa Mohamad, graduate student of mathematical modeling of mathematical faculty of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
Tel.: +7(473)220–83–64