УДК 517.951, 517.952

ПРИМЕР СОКРАЩЕНИЯ РАЗМЕРНОСТИ В ОДНОМЕРНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ

М. Л. Зайцев[1], В. Б. Аккерман[2]

[1] — *Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, Москва, Россия;*
[2] — *Университет Западной Вирджинии, Моргантаун, США*

Поступила в редакцию 10.09.2018 г.

Аннотация. Рассматриваются упрощения систем УрЧП первого порядка с помощью приема сокращения размерности у переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных. Предложен новый способ переопределения любых систем уравнений в частных производных. Исследуется это переопределение на примере одномерных эволюционных уравнений. Приведены аналитические примеры, когда этим способом задача Коши для двумерных систем уравнений может быть сведена к параметрической задаче Коши для ОДУ, решение которой потом находится в явном виде.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, дифференциальные уравнения на поверхности, ОДУ, размерность дифференциальных уравнений, задача Коши.

EXAMPLE OF DIMENSION REDUCTION IN ONE-DIMENSIONAL EVOLUTIONARY PROBLEMS

M. L. Zaytsev, V. B. Akkerman

Abstract. Simplifications of the first-order PDE systems with the help of dimension reduction in overdetermined systems of partial differential equations are considered. A new method for overriding any system of partial differential equations is proposed. This overdetermination is investigated using the example of one-dimensional evolution equations. Analytic examples are given where by this method the Cauchy problem for two-dimensional systems of equations can be reduced to the parametric Cauchy problem for an ODE, whose solution is then found explicitly.

Keywords: ODE, PDE, differential equation on the surface, dimension of differential equations, Cauchy problem.

1. В работах авторов [1-4] был предложен прием нахождения частных решений у переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных. В этом методе в случае удачного выбора дополнительного уравнения связи нахождение решений сводится к решению систем обыкновенных неявных уравнений. Предлагаемый способ в более слабых предположениях допускает также редуцирование переопределенных систем дифференциальных уравнений до систем УрЧП размерности меньшей, чем у исходных систем УрЧП. В работах авторов [1-4] были приведены только тестовые аналитические примеры, показывающие работу метода. Требуется привести примеры применения метода, представляющие математический интерес. В работе [5] был предложен способ переопределения любых систем уравнений в частных производных. Цель данной статьи исследовать это переопределение на примере одномерных эволюционных уравнений и получить их решение в явном виде, где это возможно. Везде мы предполагаем достаточную гладкость, непрерывность и дифференцируемость всех рассматриваемых функций.

2. Приведем следующую схему переопределения любых систем УрЧП первого порядка, являющуюся обобщением схемы, предложенной в работе [5]. Рассмотрим систему из p дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных $S_v(\mathbf{x})$, $v = 1...p$, $\mathbf{x} = (x_1, ...x_m) \in \Re^m_{\mathbf{x}}$

$$H_k\left(\frac{\partial S_v}{\partial \mathbf{x}}, S_v, \mathbf{x}\right) = 0, \quad v = 1...p, \quad k = 1...p. \tag{1}$$

Обозначим

$$U^i_v = \frac{\partial S_v}{\partial x_i}, \quad v = 1...p, \quad i = 1...m. \tag{2}$$

Тогда уравнения (1) можно записать в виде

$$H_k\left(U^i_v, S_v, \mathbf{x}\right) = 0, \quad i = 1...m, \quad v = 1...p, \quad k = 1...p. \tag{3}$$

Можно выписать следующие выражения:

$$\frac{\partial U^i_v}{\partial x_m} = \frac{\partial^2 S_v}{\partial x_m \partial x_i} = \frac{\partial U^m_v}{\partial x_i}, \quad i = 1...(m-1), \quad v = 1...p, \tag{4}$$

$$\frac{\partial S_v}{\partial x_m} = U^m_v, \quad v = 1...p. \tag{5}$$

Уравнения (4) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial U^i_v}{\partial x_m} + (\boldsymbol{\alpha}^v \cdot \nabla)\, U^i_v = 0, \quad i = 1...(m-1), \quad v = 1...p, \tag{6}$$

где $\nabla = (\partial/\partial_1 ... \partial/\partial_{m-1})$ и векторы $\boldsymbol{\alpha}^v = \left(\alpha^v_1 .... \alpha^v_{m-1}\right)$, $v = 1...p$, определяются из системы линейных относительно него уравнений

$$(\boldsymbol{\alpha}^v \cdot \nabla)\, U^i_v = -\frac{\partial U^m_v}{\partial x_i}, \quad i = 1...(m-1), \quad v = 1...p. \tag{7}$$

Рассмотрим p замен переменных

$$\frac{d\mathbf{r}}{dx_m} = \boldsymbol{\alpha}^v(\mathbf{r}, x_m), \quad v = 1...p,$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(\mathbf{r}^v_0, x_m\right) \text{ и } \mathbf{r}^v_0 = \mathbf{r}^v_0\left(\mathbf{r}, x_m\right), \quad x_m = x_m, \quad \mathbf{r}^v_0|_{x_m=0} = \mathbf{r}, \tag{8}$$

где $\mathbf{r}^v_0 = \left(x^v_{01}, ...x^v_{0(m-1)}\right)$, $v = 1...p$, и $\mathbf{r} = (x_1, ...x_{m-1})$. Для каждой из этих p переменных выражения (4) или (6) запишутся в виде

$$\frac{dU^i_v}{dx_m} = 0, \quad i = 1...(m-1), \quad v = 1...p, \tag{9}$$

или

$$U^i_v = U^i_{0v}\left(\mathbf{r}^v_0\right) = \frac{\partial S_{0v}\left(\mathbf{r}^v_0\right)}{\partial x^v_{0i}}, \quad i = 1...(m-1), \quad v = 1...p. \tag{10}$$

Здесь $U^i_v\big|_{x_m=0} = U^i_{0v}(\mathbf{r}) = \frac{\partial S_{0v}(\mathbf{r})}{\partial x_i}$ и $S_v|_{x_m=0} = S_{0v}(\mathbf{r})$. Замены переменных (8) означают также, что

$$\frac{\partial \mathbf{r}^v_0}{\partial t} + \boldsymbol{\alpha}^v \cdot \nabla \mathbf{r}^v_0 = 0, \quad v = 1...p. \tag{11}$$

Можно составить следующую переопределенную систему из $(3m-1)\,p$ уравнений в частных производных: (2), (3), (10), (11) и $2mp$ неизвестных U^i_v, S_v, $\mathbf{r}^v_0$, $v = 1...p$, $i = 1...m$.

Следовательно, вообще переопределение возможно только при $m \geqslant 2$. Начальные данные $S_{0v}(\mathbf{r})$, $v = 1...p$, должны быть такими, чтобы была корректна замена переменных (7), (8).

3. Авторами было предположено, что полная редукция с помощью данного переопределения возможна при $m \geqslant 3$ [5]. Можно проверить, что, когда $m = 2$, формально применяя преобразования, изложенные в работах [1-4], полная редукция на любую поверхность сниженной размерности не происходит. Однако и при $m = 2$ можно получить редукцию уравнений (1) в некоторых случаях на специально выделенных поверхностях пониженной размерности, используя переопределение (1) – (11).

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = F(\frac{\partial S}{\partial x}, S, x, t). \tag{12}$$

Это соответствует случаю $m = 2$, $p = 1$. Обозначим $U = \partial S/\partial t$, $P = \partial S/\partial x$. Тогда

$$U = F(P, S, x, t), \tag{13}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial x}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = U. \tag{15}$$

Преобразуем уравнение (14) к виду:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \alpha \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \tag{16}$$

где

$$\alpha = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial P}{\partial x}}.$$

Сделаем замену переменных

$$\frac{dx}{dt} = \alpha, \quad x = x(x_0, t) \text{ и } x_0 = x_0(x, t), \quad t = t, \quad x_0|_{t=0} = x. \tag{17}$$

Замена переменных (17) означает, что

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} + \alpha \frac{\partial x_0}{\partial x} = 0. \tag{18}$$

Тогда из выражения (16) следует, что

$$P = P_0(x_0) = \frac{\partial S_0(x_0)}{\partial x_0}, \tag{19}$$

где $P|_{t=0} = P_0(x)$ и $S|_{t=0} = S_0(x)$. Из определения величины P следует

$$\frac{\partial S}{\partial x} = P_0(x_0). \tag{20}$$

После подстановки выражения (19) в уравнения (13), (15) и (18) и преобразований получим, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = F(P_0(x_0), S, x, t), \tag{21}$$

$$\frac{\partial x_0}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial P}\frac{\partial x_0}{\partial x} = \frac{\frac{\partial F}{\partial S}P_0(x_0) + \frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial P_0}{\partial x_0}}. \tag{22}$$

Из уравнений (20), (21) можно получить также:

$$\frac{\partial S}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial P}\frac{\partial S}{\partial x}=F(P_0\left(x_0\right),S,x,t)-\frac{\partial F}{\partial P}P_0\left(x_0\right). \tag{23}$$

Мы видим, что, если сделать замену переменных

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x\left(x',t\right)}{\partial t}=-\frac{\partial F}{\partial P},\quad x=x\left(x',t\right)\text{ и } x'=x'\left(x,t\right),\quad t=t,\quad x'|_{t=0}=x,\quad x|_{t=0}=x', \tag{24}$$

то уравнения (22) и (23) запишутся в виде

$$\frac{\partial x_0\left(x',t\right)}{\partial t}=\frac{\frac{\partial F}{\partial S}P_0\left(x_0\right)+\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial P_0(x_0)}{\partial x_0}}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial S\left(x',t\right)}{\partial t}=F(P_0\left(x_0\right),S,x,t)-\frac{\partial F}{\partial P}P_0\left(x_0\right). \tag{26}$$

Таким образом, фактически мы имеем систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений (24) – (26) от трех неизвестных S, x_0, x, где в правых частях этих уравнений стоят только функции от S, x_0, x, t. Начальные данные должны быть следующие: $x|_{t=0}=x'$, $x_0|_{t=0}=x'$, $S|_{t=0}=S_0\left(x'\right)$. В итоге, решая систему (24) – (26) размерности меньшей, чем у исходного уравнения (12), можно найти его решение соответствующей задачи Коши $S\left(x,t\right)$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение Хопфа

$$\frac{\partial S}{\partial t}+S\frac{\partial S}{\partial x}=0 \tag{27}$$

с начальным условием $S|_{t=0}=S_0\left(x\right)$. Решая его стандартным способом, мы приходим к следующей системе ОДУ [6]:

$$\frac{dS}{dt}=0, \tag{28}$$

$$\frac{dx}{dt}=S, \tag{29}$$

где $S|_{t=0}=S_0\left(x_0\right)$ и $x|_{t=0}=x_0$. Решение системы ОДУ (28), (29), очевидно, имеет вид

$$S=S_0\left(x_0\right),\quad x=x_0+S_0\left(x_0\right)t. \tag{30}$$

Исключая x_0 из уравнений (30), мы найдем решение уравнения Хопфа (27).

Решим теперь его нашим способом. В этом случае имеем $F=F(P,S,x,t)=-PS$. Система ОДУ (24) – (26) имеет вид:

$$\frac{\partial x\left(x',t\right)}{\partial t}=S, \tag{31}$$

$$\frac{\partial x_0\left(x',t\right)}{\partial t}=-\frac{\left[P_0\left(x_0\right)\right]^2}{\frac{\partial P_0(x_0)}{\partial x_0}}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial S\left(x',t\right)}{\partial t}=0. \tag{33}$$

Здесь $x|_{t=0}=x'$, $x_0|_{t=0}=x'$, $S|_{t=0}=S_0\left(x'\right)$. Решение системы уравнений (31) – (33) имеет вид:

$$S=S_0\left(x'\right),\quad x=x'+S_0\left(x'\right)t,\quad \frac{\partial S_0\left(x_0\right)}{\partial x_0}=P_0\left(x_0\right)=\frac{1}{t+\left[\frac{\partial S_0(x')}{\partial x'}\right]^{-1}}. \tag{34}$$

Сравнивая (30) и (34), видно, что оба решения исходного уравнения Хопфа (27) совпадают. Мы видим, что уравнения (28), (29) и (31), (33) одинаковые. В следующем примере оба способа также приводят к одинаковым системам уравнений.

Пример 2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = F\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x, t\right). \tag{35}$$

Обозначим также

$$U_1 = \frac{\partial S}{\partial t} \text{ и } U_2 = \frac{\partial S}{\partial x}, \tag{36}$$

Тогда

$$\frac{\partial U_2}{\partial t} - \frac{\partial U_1}{\partial x} = 0, \tag{37}$$

$$U_2 = F\left(U_1, x, t\right). \tag{38}$$

Подставим это выражение (38) в (37). В итоге,

$$\frac{\partial F\left(U_1, x, t\right)}{\partial U_1}\frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial F\left(U_1, x, t\right)}{\partial t} = 0. \tag{39}$$

Мы получили одно квазилинейное уравнение, решая которое, можно найти решение нелинейного уравнения в частных производных (35). Решение уравнения (39) сводится к решению следующей системы ОДУ [6]:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial F\left(U_1, x, t\right)}{\partial U_1}, \tag{40}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = -1, \tag{41}$$

$$\frac{dU_1}{d\tau} = -\frac{\partial F\left(U_1, x, t\right)}{\partial t}. \tag{42}$$

Система ОДУ (40) – (42) не отличается коренным образом от соответствующей системы (24) – (26) для уравнения (39).

Пример 3. Рассмотрим теперь уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^4 + S + t^3 \tag{43}$$

с начальным условием $S|_{t=0} = S_0\left(x\right)$. Имеем $F = F(P, S, x, t) = P^4 + S + t^3$. Система ОДУ (24) – (26) имеет вид:

$$\frac{\partial x\left(x', t\right)}{\partial t} = -4\left[P_0\left(x_0\right)\right]^3, \tag{44}$$

$$\frac{\partial x_0\left(x', t\right)}{\partial t} = \frac{P_0\left(x_0\right)}{\frac{\partial P_0\left(x_0\right)}{\partial x_0}}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial S\left(x', t\right)}{\partial t} = -3\left[P_0\left(x_0\right)\right]^4 + S + t^3. \tag{46}$$

Здесь $x|_{t=0} = x'$, $x_0|_{t=0} = x'$, $S|_{t=0} = S_0\left(x'\right)$, $P_0\left(x_0\right) = \partial S_0\left(x_0\right)/\partial x_0$. Очевидно, решение уравнения (45) с учетом этих начальных данных имеет вид:

$$\frac{\partial S_0\left(x_0\right)}{\partial x_0} = P_0\left(x_0\right) = \frac{\partial S_0\left(x'\right)}{\partial x'}e^t. \tag{47}$$

Тогда, учитывая (47), решение уравнения (44) имеет вид

$$x = x' - 4\int\limits_0^t \left[\frac{\partial S_0\left(x_0\right)}{\partial x_0}\right]^3 dt = x' - 4\int\limits_0^t \left[\frac{\partial S_0\left(x'\right)}{\partial x'}e^t\right]^3 dt =$$

$$= x' - \frac{4}{3}\left(\frac{\partial S_0\left(x'\right)}{\partial x'}\right)^3 \left(e^{3t}-1\right). \quad (48)$$

После подстановки решения уравнения (45) в уравнение (46) получается линейное относительно неизвестной S уравнение. Решая его стандартным методом вариации постоянной [6] и интегрируя по обычным правилам [7], находим его решение:

$$S = S_0\left(x'\right)e^t + e^t\int\limits_0^t e^{-t}\left(-3\left[\frac{\partial S_0\left(x'\right)}{\partial x'}e^t\right]^4 + t^3\right)dt =$$

$$= S_0\left(x'\right)e^t + \left(\frac{\partial S_0\left(x'\right)}{\partial x'}\right)^4\left(-e^{4t}+e^t\right) - t^3 - 3t^2 - 6t - 6 + 6e^t. \quad (49)$$

Таким образом, формулы (48), (49) задают решение задачи Коши для уравнения (43). Приведенные выше рассуждения позволяют утверждать, что указанным выше методом можно решить в явном виде следующее уравнение общего вида:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = p\left(t\right)G\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right) + q\left(t\right)S + r\left(t\right)x + v\left(t\right), \quad (50)$$

где $S|_{t=0} = S_0\left(x\right)$, $p\left(t\right)$, $q\left(t\right)$, $r\left(t\right)$, $v\left(t\right)$ — функции от $t \in \Re$, $G(p)$ — функция от $p \in \Re$ (например, $G(p) = p^\alpha$, $\alpha \in \Re$). В случае $\partial S/\partial x = 0$, $r\left(t\right) = 0$ уравнение (50) сводится к известному случаю линейного ОДУ, которое имеет решение в явном виде [8].

Стандартным способом уравнение (50) можно преобразовать к некоторой системе ОДУ, решая которую можно найти решение исходного уравнения (50) [6]. Однако возможность нахождения решения в явном виде у этой системы ОДУ, как в предлагаемом методе, далеко не очевидна.

4. В случае $m = 2$, $p > 1$ система уравнений (1) с помощью переопределения (1) – (11) преобразовывается к переопределенной системе квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка аналогично [9] на стр. 54. Однако снизить размерность это не позволяет. В частном случае здесь возможно упрощение иного рода.

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = F\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \frac{\partial S_2}{\partial x}\right), \quad (51)$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = G\left(\frac{\partial S_1}{\partial x}, \frac{\partial S_2}{\partial x}\right) \quad (52)$$

с начальным условием $S_1|_{t=0} = S_1^0\left(x\right)$, $S_2|_{t=0} = S_2^0\left(x\right)$. Обозначим

$$P_1 = \frac{\partial S_1}{\partial x}, \quad P_2 = \frac{\partial S_2}{\partial x}. \quad (53)$$

Тогда $F = F\left(P_1, P_2\right)$, $G = G\left(P_1, P_2\right)$. Можно выписать соотношения

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (54)$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \frac{\partial G}{\partial x}. \tag{55}$$

Уравнения (54), (55) можно преобразовать к виду

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} + \alpha^1 \frac{\partial P_1}{\partial x} = 0, \tag{56}$$

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial P_2}{\partial x} = 0, \tag{57}$$

где

$$\alpha^1 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial P_1}{\partial x}}, \quad \alpha^2 = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial P_2}{\partial x}}.$$

Сделаем две замены переменных

$$\frac{dx}{dt} = \alpha^1, \quad x = x\left(x_0^1, t\right) \text{ и } x_0^1 = x_0^1\left(x, t\right), \quad t = t, \quad x_0^1|_{t=0} = x, \tag{58}$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha^2, \quad x = x\left(x_0^2, t\right) \text{ и } x_0^2 = x_0^2\left(x, t\right), \quad t = t, \quad x_0^2|_{t=0} = x. \tag{59}$$

Замены переменных (58), (59) означают, что

$$\frac{\partial x_0^1}{\partial t} + \alpha^1 \frac{\partial x_0^1}{\partial x} = 0, \tag{60}$$

$$\frac{\partial x_0^2}{\partial t} + \alpha^2 \frac{\partial x_0^2}{\partial x} = 0. \tag{61}$$

Тогда из выражений (56), (57) следует, что

$$P_1 = P_1^0\left(x_0^1\right) = \frac{\partial S_1^0\left(x_0^1\right)}{\partial x_0^1}, \tag{62}$$

$$P_2 = P_2^0\left(x_0^2\right) = \frac{\partial S_2^0\left(x_0^2\right)}{\partial x_0^2}, \tag{63}$$

где $P_1|_{t=0} = P_1^0\left(x\right)$, $P_2|_{t=0} = P_2^0\left(x\right)$. Из определения величин P_1 и P_2 следует

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} = P_1^0\left(x_0^1\right), \tag{64}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x} = P_2^0\left(x_0^2\right). \tag{65}$$

Подставим выражения (64), (65) в соотношения (51), (52) и (60), (61). После преобразований получим, что

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = F\left(P_1^0\left(x_0^1\right), P_2^0\left(x_0^2\right)\right), \tag{66}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial t} = G\left(P_1^0\left(x_0^1\right), P_2^0\left(x_0^2\right)\right), \tag{67}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_0^1}{\partial t} \\ \frac{\partial x_0^2}{\partial t} \end{pmatrix} + \mathbf{A} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_0^1}{\partial x} \\ \frac{\partial x_0^2}{\partial x} \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \tag{68}$$

где

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -\frac{\partial F}{\partial P_1} & -\frac{\partial F}{\partial P_2}\cdot\frac{\frac{\partial P_2^0\left(x_0^2\right)}{\partial x_0^2}}{\frac{\partial P_1^0\left(x_0^1\right)}{\partial x_0^1}} \\ -\frac{\partial G}{\partial P_1}\cdot\frac{\frac{\partial P_1^0\left(x_0^1\right)}{\partial x_0^1}}{\frac{\partial P_2^0\left(x_0^2\right)}{\partial x_0^2}} & -\frac{\partial G}{\partial P_2} \end{pmatrix}.$$

Сделаем в системе уравнений (68) замену переменных

$$x_0^1=x_0^1\left(x,t\right),\quad x_0^2=x_0^2\left(x,t\right),\tag{69}$$

$$x=x\left(x_0^1,x_0^2\right),\quad t=t\left(x_0^1,x_0^2\right).\tag{70}$$

Имеем,

$$\frac{\partial x_0^1}{\partial t}=\frac{\partial\left(x_0^1,x\right)}{\partial\left(t,x\right)}=-\frac{1}{\frac{\partial(x,t)}{\partial\left(x_0^1,x_0^2\right)}}\frac{\partial\left(x_0^1,x\right)}{\partial\left(x_0^1,x_0^2\right)}=-\frac{1}{\frac{\partial(x,t)}{\partial\left(x_0^1,x_0^2\right)}}\frac{\partial x}{\partial x_0^2},\tag{71}$$

$$\frac{\partial x_0^2}{\partial t}=\frac{1}{\frac{\partial(x,t)}{\partial\left(x_0^1,x_0^2\right)}}\frac{\partial x}{\partial x_0^1},\quad \frac{\partial x_0^1}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial(x,t)}{\partial\left(x_0^1,x_0^2\right)}}\frac{\partial t}{\partial x_0^2},\quad \frac{\partial x_0^2}{\partial x}=-\frac{1}{\frac{\partial(x,t)}{\partial\left(x_0^1,x_0^2\right)}}\frac{\partial t}{\partial x_0^1}.\tag{72}$$

Подставим (71), (72) в систему уравнений (68). После преобразований находим, что

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial x}{\partial x_0^2} \\ \frac{\partial x}{\partial x_0^1} \end{pmatrix}+\mathbf{A}\begin{pmatrix} \frac{\partial t}{\partial x_0^2} \\ -\frac{\partial t}{\partial x_0^1} \end{pmatrix}=\mathbf{0},\tag{73}$$

Элементы матрицы $\mathbf{A}$ в переменных $\left(x_0^1,x_0^2\right)$ выражены автоматически, т. к. из (62), (63) следует, $F=F\left(\frac{\partial S_1^0\left(x_0^1\right)}{\partial x_0^1},\frac{\partial S_2^0\left(x_0^2\right)}{\partial x_0^2}\right)$, $G=G\left(\frac{\partial S_1^0\left(x_0^1\right)}{\partial x_0^1},\frac{\partial S_2^0\left(x_0^2\right)}{\partial x_0^2}\right)$. Для системы (73) задается следующая задача: $t=0$, $x=x_0^1$ на прямой $x_0^1=x_0^2$ в плоскости $\left(x_0^1,x_0^2\right)$.

Таким образом, система уравнений в частных производных (73) линейная. Эту систему уравнений можно преобразовать к одному линейному эволюционному уравнению второго порядка, но увеличив количество переменных [5].

Используя (64) – (67), имеем,

$$\frac{\partial S_1}{\partial x_0^1}=\frac{\partial S_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0^1}+\frac{\partial S_1}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_0^1}=P_1^0\left(x_0^1\right)\frac{\partial x}{\partial x_0^1}+F\left(P_1^0\left(x_0^1\right),P_2^0\left(x_0^2\right)\right)\frac{\partial t}{\partial x_0^1},\tag{74}$$

$$\frac{\partial S_2}{\partial x_0^1}=\frac{\partial S_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0^1}+\frac{\partial S_2}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_0^1}=P_2^0\left(x_0^1\right)\frac{\partial x}{\partial x_0^1}+G\left(P_1^0\left(x_0^1\right),P_2^0\left(x_0^2\right)\right)\frac{\partial t}{\partial x_0^1}.\tag{75}$$

Неизвестные величины S_1, S_2 можно найти из уравнений (74), (75), поставив к ним задачу:$S_1=S_1^0\left(x_0^1\right)$, $S_2=S_2^0\left(x_0^1\right)$ на прямой $x_0^1=x_0^2$ в плоскости $\left(x_0^1,x_0^2\right)$.

5. В данной работе рассматриваются упрощения систем УрЧП первого порядка. Приведены аналитические примеры, когда новым способом задача Коши для двумерных систем уравнений может быть сведена к параметрической задаче Коши для ОДУ, решение которой потом находится. Используется переопределение (1) – (11), предложенное авторами, для случая $m=2$. В случае $m=2$, $p=2$ системы вида (51), (52) преобразовываются к линейным. В остальных случаях $m\geqslant 3$ задача сокращения размерности у систем УрЧП данным способом сильно усложняется, и получить решение в явном виде практически невозможно.

Переопределение (1) – (11) позволяет также преобразовать любые системы УрЧП первого порядка к системам интегро-дифференциальных уравнений с пониженной на единицу размерностью (см. Приложение А).

В работе [5] было предложено преобразование систем УрЧП первого порядка к унифицированному квазилинейному уравнению второго порядка большей размерности. Достаточно найти “хорошее” переопределение только для этого уравнения, чтобы найти явное представление его решения. Как вариант, представляющий теоретический интерес, предлагается переопределение (1) – (11).

Приложение А. Уравнения с сокращенной размерностью в интегральной форме

Рассмотрим случай $m = 4$. Положим, что все неизвестные функции $S_v(\mathbf{x})$, $v = 1...p$, $\mathbf{x} = (x_1, ...x_m) \in \Re^m_{\mathbf{x}}$ достаточно быстро убывают на бесконечности. Согласно формуле Пуассона имеем,

$$S_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\left[\nabla_{\mathbf{r}'} S_v(x_1', x_2', x_3', x_4)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx_1' dx_2' dx_3', \quad v = 1...p. \tag{A.1}$$

Здесь $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{r}' = (x_1', x_2', x_3')$, $\nabla_{\mathbf{r}'} = (\partial/\partial x_1', \partial/\partial x_2', \partial/\partial x_3')$, $S_v(\mathbf{x}) = S_v(\mathbf{r}, x_4)$, $v = 1...p$. Используя формулы (2) и (10), можно выписать

$$\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\left[\nabla_{\mathbf{r}'} S_v\left(x_1', x_2', x_3', x_4\right)\right] = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{\partial S_v}{\partial x_i'}\right) = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{\partial S_{0v}(\mathbf{r}_0^v)}{\partial x_{0i}^v}\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 S_{0v}(\mathbf{r}_0^v)}{\partial x_{0j}^v \partial x_{0i}^v}\frac{\partial x_{0j}^v}{\partial x_i'}. \tag{A.2}$$

Согласно формуле (5) имеем,

$$U_v^4 = \frac{\partial S_v}{\partial x_4} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty} \frac{\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\left[\nabla_{\mathbf{r}'} \frac{\partial S_v\left(x_1', x_2', x_3', x_4\right)}{\partial x_4}\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dx_1' dx_2' dx_3', \quad v = 1...p. \tag{A.3}$$

Здесь

$$\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\left[\nabla_{\mathbf{r}'}\frac{\partial S_v(x_1', x_2', x_3', x_4)}{\partial x_4}\right] = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^3 S_{0v}(\mathbf{r}_0^v)}{\partial x_{0l}^v\partial x_{0j}^v\partial x_{0i}^v}\frac{\partial x_{0l}^v}{\partial x_4}\frac{\partial x_{0j}^v}{\partial x_i'} + \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 S_{0v}(\mathbf{r}_0^v)}{\partial x_{0j}^v\partial x_{0i}^v}\frac{\partial^2 x_{0j}^v}{\partial x_4 \partial x_i'}. \tag{A.4}$$

Из формулы (2) следует, что

$$U_v^i = \frac{\partial S_v}{\partial x_i} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\infty}\frac{(x_i - x_i')\,\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\left[\nabla_{\mathbf{r}'} S_v(x_1', x_2', x_3', x_4)\right]}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} dx_1' dx_2' dx_3', \quad v = 1...p, \quad i = 1...3. \tag{A.5}$$

Можно выписать следующую систему из $12p$ интегро-дифференциальных уравнений (A.1), (A.3), (A.5), (3), (10), (11) и $11p$ неизвестных U_v^i, S_v, $\mathbf{r}_0^v$, $\partial\mathbf{r}_0^v/\partial x_4$ $\quad v = 1...p$, $i = 1...m$. Размерность снижена на единицу, т.к. производная по x_4 здесь фактически отсутствует. Не все уравнения (A.1), (A.3), (A.5), (3), (10), (11) являются независимыми друг от друга из-за особенности формулы Пуассона (A.1).

В случае $m = 3$ формулу (A.1) необходимо взять в виде

$$S_v(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\infty}\nabla_{\mathbf{r}'}\cdot\left[\nabla_{\mathbf{r}'} S_v\left(x_1', x_2', x_3\right)\right]\ln\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right| dx_1' dx_2', \quad v = 1...p. \tag{A.6}$$

А в случае $m = 2$

$$S_v(\mathbf{x}) = A(x_2) + B(x_2)\,x_1 + \int\limits_0^{x_1} dx \int\limits_0^{x} \frac{\partial^2 S_v(y, x_2)}{\partial y^2} dy =$$

$$= A(x_2) + B(x_2)x_1 + \int\limits_0^{x_1} dx \int\limits_0^{x} \frac{\partial^2 S_{0v}(x_0^v)}{\partial (x_0^v)^2} \frac{\partial x_0^v}{\partial y} dy, \quad v = 1...p, \tag{A.7}$$

где $S_v|_{x_1=0} = A(x_2)$, $\frac{\partial S_v}{\partial x_1}\Big|_{x_1=0} = B(x_2)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аккерман, В. Б. Снижение размерности в уравнениях гидродинамики / В. Б. Аккерман, М. Л. Зайцев // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2011. — Т. 51, № 8. — С. 1518–1530.

2. Зайцев, М. Л. Гипотеза об упрощении переопределенных систем дифференциальных уравнений и ее применение к уравнениям гидродинамики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 5–27.

3. Зайцев, М. Л. Еще один способ нахождения частных решений уравнений математической физики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Вестник ВолГУ. Серия 1, Математика. Физика. — 2016. — № 6 (37). — С. 119–127.

4. Зайцев, М. Л. Редукция переопределенных систем дифференциальных уравнений математической физики / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2017. — Т. 20, № 4. — С. 43–67.

5. Зайцев, М. Л. Преобразование систем уравнений в частных производных к системам квазилинейных и линейных дифференциальных уравнений. Их редукция и унификация / М. Л. Зайцев, В. Б. Аккерман // Математическая физика и компьютерное моделирование. — 2018. — Т. 21, № 1. — С. 18–33.

6. Федорюк, М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения / М. В. Федорюк. — СПб. : “Лань”, 2003. — 448 с.

7. Смолянский, М. Л. Таблицы неопределенных интегралов / М. Л. Смолянский. — М. : Гос. Изд. Физ-мат лит., 1963. — 112 с.

8. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М. : Наука, 1976. — 576 с.

9. Курант, Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. — М. : Мир, 1964. — 830 с.

REFERENCES

1. Akkerman V.B., Zaytsev M.L. Dimension Reduction in Fluid Dynamics Equations. [Akkerman V.B., Zajcev M.L. Snizhenie razmernosti v uravneniyah gidrodinamiki]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, vol. 8, no. 51, pp. 1418–1430.

2. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Hypothesis on Reduction of Overdetermined Systems of Differential Equations and its Application to Equations of Hydrodynamics. [Zajcev M.L., Akkerman V.B. Gipoteza ob uproshchenii pereopredelennyh sistem differencial'nyh uravnenij i ee primenenie k uravneniyam gidrodinamiki]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 5–27.

3. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Another method for finding particular solutions of equations of mathematical physics. [Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Echsho odin sposob nakhozhdeniya chastnykh reshenij uravnenij matematicheskoj fiziki]. *Vestnik Volgogradskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1. Matematika. Fizika — Science Journal of Volgograd State University. Mathematics. Physics*, 2016, no. 6 (37), pp. 119–127.

4. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Reduction of overdetermined differential equations of mathematical physics. [Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Reduktsiya pereopredelennyih sistem

differentsialnyih uravneniy matematicheskoy fiziki]. *Matematicheskaya fizika i komp'yuternoe modelirovanie — Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2017, vol. 20, no. 4, pp. 43–67.

5. Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Transformation of systems of partial differential equations to systems of quasilinear and linear differential equations. Their reduction and unification. [Zaytsev M.L., Akkerman V.B. Preobrazovanie sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh k sistemam kvazilinejnyh i linejnyh differencial'nyh uravnenij. Ih redukciya i unifikaciya]. *Matematicheskaya fizika i komp'yuternoe modelirovanie — Mathematical Physics and Computer Simulation*, 2018, vol. 21, no. 1, pp. 18–33.

6. Fedoryuk M.V. Ordinary Differential Equations. [Fedoryuk M.V. Obyknovennye differentsial'nye uravneniya]. St. Petersburg, 2003, 448 p.

7. Smolyanskij M.L. Tables of indeterminate integrals. [Smolyanskij M.L. Tablicy neopredelennyh integralov]. Moscow, 1963, 112 p.

8. Kamke E. Handbook of Ordinary Differential Equations. [Kamke E. Spravochnik po obyknovennym differencial'nym uravneniyam]. Moscow, 1976, 576 p.

9. Kurant R. Partial Differential Equations. [Kurant R. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh]. Moscow, 1964, 830 p.

Зайцев Максим Леонидович, Институт проблем безопасного развития атомной энергетики РАН, аспирант, Москва, Россия
E-mail: mlzaytsev@gmail.com, mlzaytsev@mail.ru
Тел.: +7(495)955–22–83

Zaytsev Maxim L., Nuclear Safety Institute of Russian Academy of Sciences, PhD student, Moscow, Russia
E-mail: mlzaytsev@gmail.com, mlzaytsev@mail.ru
Tel.: +7(495)955–22–83

Аккерман Вячеслав Борисович, PhD, кандидат физико-математических наук, преподаватель, Университет Западной Вирджинии, США
E-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
Тел.: +1.304.293.0802

Akkerman Vyacheslav B. , PhD, Assistant Professor, Department of Mechanical and Aerospace Engineering West Virginia University, USA
E-mail: Vyacheslav.Akkerman@mail.wvu.edu
Tel.: +1.304.293.0802