УДК 517.956

# ТЕОРЕМА О СЛЕДАХ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ВЫРОЖДЕНИЕМ*

**А. Д. Баев, Н. А. Бабайцева, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко**

*Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 11.01.2020 г.

**Аннотация**. Статья посвящена доказательству теоремы о следах для одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением. Рассматривается новый класс переменных символов, зависящих также от комплексного параметра. Псевдодифференциальные операторы построены по специальному интегральному преобразованию. Теорема о следах таких операторов доказывается в специальных весовых пространствах, типа пространств С. Л. Соболева.

**Ключевые слова**: псевдодифференциальный оператор с вырождением, теорема о следах, весовые пространства С. Л. Соболева.

# TRACE THEOREM FOR PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS WITH DEGENERACY

**A. D. Baev, N. A. Babaytseva, A. A. Babaytsev, V. D. Kharchenko**

**Abstract**. The article is devoted to the proof of the trace theorem for a class of pseudo-differential operators with degeneracy. We consider a new class of variable symbols that also depend on the complex parameter. Pseudo-differential operators are constructed by a special integral transformation. The trace theorem of such operators is proved in special weight spaces, such as S. L. Sobolev spaces.

**Keywords**: pseudo-differential operator with degeneracy, trace theorem, S. L. Sobolev weight spaces.

## ВВЕДЕНИЕ

Вырождающиеся дифференциальные уравнения используются при моделировании различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Такие уравнения используются при исследовании стационарных процессов конвекции — диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 19.11.00197), выполняемого в Воронежском государственном университете

расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются также обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции — диффузии. Кроме того, известно, что нахождение решения краевой задачи для эллиптического уравнения эквивалентно минимизации некоторого функционала. В теории управления задача о минимуме некоторого функционала соответствует задаче об оптимальном управлении. Вырождающимся эллиптическим уравнениям соответствуют вырожденные или особые оптимальные управления.

Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к "неклассическим" задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [3] и М. И. Вишика [4]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [5]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [6], С. З. Левендорским [7], А. Д. Баева, Р. А. Ковалевского, А. А. Бабайцева [8]–[15].

Настоящая работа посвящена доказательству теоремы об ограниченности одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим также от комплексного параметра.

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование $F_\alpha$, введенное в [8]. Преобразование $F_\alpha$ позволяет ввести в рассмотрение специальный класс весовых псевдодифференциальных операторов. Весовые псевдодифференциальные операторы с постоянным по $y$ символом были изучены в [8], в работах [16]–[18] были исследованы некоторые классы весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом.

В работе исследуются весовые псевдодифференциальные операторы с переменным по $t$ символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S^{\sigma}_{\alpha,p}$, $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$. Доказывается теорема об ограниченности таких операторов в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(\mathrm{t}) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(\mathrm{t}) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором $d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t) \exp(i\eta \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}) \frac{dy}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(R^1_+)$ — пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит $R^1_+$. Преобразование (1) и преобразование Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau,\ \ \eta \in R^1$ связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(y) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования $F_\alpha$ справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}. \tag{3}$$

Равенство (3) даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть преобразование $F_\alpha$ на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования $F_\alpha$ сохраним старое обозначение. Обозначим через $F_\alpha^{-1}$ обратное к $F_\alpha$ преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}} F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1,2,...,\ \text{где}\ D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\ \ \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Определим пространства $H_{s,\alpha}(R^n_+)$; $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ следующим образом.

**Определение 1.** Пространство $H_{s,\alpha}(R^n_+)$($s$ — действительное число) состоит из всех функций пространства $L_2(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|^2_{s,\alpha} = \int\limits_{R^n} (|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^s \,|F_\alpha F_{x\to\xi}[v(x,y)]|^2\, d\xi d\eta, \tag{4}$$

зависящая от комплексного параметра $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$.

**Определение 2.** Пространство $H_{s,\alpha,q}(R^n_+)$ ($s \geqslant 0$, $q > 1$) состоит из всех функций $v(x,y) \in H_{s,\alpha}(R^n_+)$, для которых конечна норма

$$\|v,|p|\|_{s,\alpha,q} = \{\sum_{l=0}^{[\frac{s}{q}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x} F^{-1}_\alpha[(|p|^2 + |\xi|^2 + \eta^2)^{\frac{s-ql}{2}} F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_y v]]\right\|^2_{L_2(R^n_+)}\}^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

зависящая от комплексного параметра. Здесь $[\frac{s}{q}]$ — целая часть числа $\frac{s}{q}$.

Пусть выполнено следующее условие.

**Условие 1.** Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0,+\infty)$. Кроме того, $\alpha(y) \in C^{s_1}[0,+\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где $N \geqslant \max\limits_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \frac{l-p_1+\frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma+1,\ \sigma+\frac{l}{2}\}$, $l = 1, 2, \ldots, \sigma$ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число $\nu$ существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$G^{(\sigma)}(p,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_\alpha F^{-1}_{\xi\to x}[g(p,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{6}$$

**Определение 3.** Будем говорить, что символ $g(p,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $G^{(\sigma)}(p,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma,p}_{\alpha,\rho}$, где $\sigma \in \mathrm{R}^1, p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, если функция $g(p,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0, 1, 2,...,$ $l = 0, 1, 2,...$ справедливы оценки

$$|\partial^l_\eta \lambda(p,t,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(|p|^2 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-\rho l} \tag{7}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $\rho \in (0;1]$. Здесь $\sigma$ - действительное число.

Доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть $q > 1$, $\sigma$ – действительные числа, $v(x,y) \in H_{s+\sigma,\alpha,q}(R^n_+)$. Пусть символ $\lambda(p,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $K^{(\sigma)}(p,D_x,D_{\alpha,t})$ принадлежит классу $S^{\sigma,p}_{\alpha,\rho}$, $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$,$\rho \in (0;1]$ $\quad \sigma \in R^1$. Тогда при выполнении условия 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\lim_{y\to+0} K^{(\sigma)}(p,D_x,D_{\alpha,y})v(x,y) = \lim_{y\to+0} K^{(\sigma)}(p,D_x,0)v(x,y) = \\ &= \lim_{y\to+0} F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(p,\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,y)]]. \end{aligned} \tag{8}$$

## 1. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Справедливы следующие утверждения.

**Лемма 1.1.** Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(p,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора принадлежит классу $S^{\sigma,p}_{\alpha,\rho}$, $\rho \in (0;1]$ $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$. Тогда для любой функции $v(x,t) \in C_0^\infty(R^n_+)$ справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+0} K^{(\sigma)}(p,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F^{-1}_{\xi\to x}[\lambda(p,\xi,0)F_{x\to\xi}[v(x,0)]] + \\ &+ \lim_{t\to+0} F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[g_N(p,\xi,\eta)F_\alpha F_{x\to\xi}[D^N_{\alpha,t}v]], \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $N > 0$ — целое число и $s_1$ в условии 1, такое, что $s_1 \geqslant N$;

$$\begin{aligned} &g_N(p,\xi,\eta) = N\int_0^1 \lambda_N(p,\xi,\theta\eta)(1-\theta)^{N-1}d\theta, \\ &\lambda_j(p,\xi,\eta) = \tfrac{(-1)^j}{j!}\partial^j_\eta\lambda(p,\xi,\eta),\ j = 1,\ 2,...,\ N. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Тейлора. Получим

$$\lambda(p,\xi,\eta) = \lambda(p,\xi,0) + \sum_{i=1}^{N-1}\lambda_j(p,\xi,0)\eta^i + g_N(p,\xi,\eta)\eta^N, \tag{1.3}$$

где функции $\lambda_i$, $g_N$ определены в (1.2).

Используя равенство (1.3), получим равенство

$$\begin{aligned} &F^{-1}_\alpha[\lambda(p,\xi,\eta)F_\alpha[v(x,t)]] = F^{-1}_\alpha[\lambda(p,\xi,0)F_\alpha[v]] + \\ &+ \sum_{i=1}^{N-1} F^{-1}_\alpha[\lambda_i(p,\xi,0)F_\alpha[D^i_{\alpha,t}v(x,t)]] + F^{-1}_\alpha[g_N(p,\xi,\eta)F_\alpha[D^N_{\alpha,t}v]]. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Заметим, что справедливо равенство

$$F^{-1}_\alpha[\lambda_i(p,\xi,0)F_\alpha[D^i_{\alpha,t}v(x,t)]] = \lambda_i(p,\xi,0)D^i_{\alpha,t}v(x,t),\ \ i = 1,2,....$$

И так как $D^i_{\alpha,t}v(x,t)\big|_{t=0} = 0$ при $i = 1,\ 2, \dots,\ N-1$, то

$$F^{-1}_\alpha[\lambda_i(p,\xi,0)F_\alpha\ [D^i_{\alpha,t}v(x,t)]]\big|_{t=0} = 0, \quad i = 1,\ 2, ...,\ N-1.$$

Отсюда и из (1.4) следует (1.1).

Введем функцию $\beta(\tau)$ такие, что

$$\beta(\tau) = \alpha^{-\frac{1}{2}}\ (t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}\, , w(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}D^N_{\alpha,t}\ u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}\, , D_{\alpha,t} = -\sqrt{-\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)} \tag{1.5}$$

где $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

**Лемма 1.2.** Пусть выполнены условия леммы 1.1. Тогда для любой функции $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$ при $N \geqslant \sigma$ справедливо равенство

$$F_\alpha^{-1}[g_N(p,\xi,\eta)F_\alpha[D_{\alpha,t}^N u(t)]] = \{F_{\eta\to\tau}^{-1}[g_N(p,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\beta(\tau)w(\tau)]]+$$
$$+\sum_{i=1}^{N-1} F_{\eta\to\tau}^{-1}[g_{N,i}(p,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D_\tau^i\beta(\tau)\cdot w(\tau)]]+$$
$$+F_{\eta\to\tau}^{-1}[\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\tau\to(\eta-y)}[D_\tau^{N_1}\beta(\tau)]\cdot \widetilde{g}_{N,N_1}(p,\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w]dy]\ \}|_{\tau=\varphi(t)}. \quad (1.6)$$

Здесь $N_1 \geqslant \max\{\frac{3}{2\nu},2+\frac{1}{2\nu}\}$,

$$g_{N,i}(p,\xi,\eta) = \frac{(-1)^i}{i!}\partial_\eta^i g_N(p,t,\xi,\eta), \quad (1.7)$$

$$\widetilde{g}_{N,N_1}(p,\xi,\eta-y,y) = N\int\limits_0^1 g_{N,N_1}(p,\xi,\eta-\theta(\eta-y))(1-\theta)^{N_1-1}d\theta. \quad (1.8)$$

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из справедливости оценок

$$\left|\partial_\eta^i g_N(p,\xi,\eta)\right| \leqslant c\int\limits_0^1 (|p|+|\xi|+\theta\eta)^{\sigma-N-i}d\theta \leqslant c < \infty \quad (1.9)$$

при всех $i = 0,\ 1, 2,\ ...$ для $N \geqslant \sigma$

**Лемма 1.3.** Пусть выполнены условия леммы 1.1; $u(t) \in C_0^\infty(R_+^1)$. Тогда при всех $\xi \in R^{n-1}$ функция

$$f_0(p,\xi,\eta) = F_{\tau\to\eta}[\beta(\tau)w(\tau)]g_N(p,\xi,\eta) \quad (1.10)$$

принадлежит по переменной $\eta$ пространству $L_1(R^1)$ при $N \geqslant \max\{\sigma+1,\ 1+\frac{1}{\nu}\}$.

Доказательство. Из (1.9) при всех $N \geqslant \sigma+1$ получим

$$|\eta g_N(p,\xi,\eta)| \leqslant c\left|\int\limits_0^{|\eta|} (|p|+|\xi|+\theta_1)^{\sigma-N}d\theta_1\right| \leqslant c_1 < \infty$$

с некоторой константой $c_1 > 0$, не зависящей от $\xi$. Значит, функция $g_N(p,\xi,\eta)$ принадлежит по переменной $\eta$ пространству $L_2(R^1)$. Отсюда следует, что функция $\beta(\tau)w(\tau) \in L_2(R^1)$, а, значит, $F_{\tau\to\eta}[\beta(\tau)w(\tau)] \in L_2(R^1)$. Отсюда и из (1.10) получаем, что функция принадлежит по $\eta$ пространству $L_1(R^1)$, как произведение двух функций из $L_2(R^1)$.

**Следствие 1.1.** Пусть выполнены условия леммы 1.3. Тогда при всех $\xi \in R^{n-1}$ функция

$$f_i(p,\xi,\eta) = g_{N,i}(p,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D_\tau^i\beta(\tau)\cdot w(\tau)]$$

принадлежит по переменной $\eta$ пространству $L_1(R^1)$.

Доказательство. Из (1.7) и (1.9) выводим неравенства $|\eta g_{N,i}(p,\xi,\eta)| \leqslant c < \infty$, $i = 1,2,...,N_1-1$, при всех $\xi \in R^{n-1},\eta \in R^1$. Следовательно, $g_{N,i}(p,\xi,\eta)$ принадлежит $L_2(R^1)$ по переменной $\eta$ при каждом $\xi \in R^{n-1}$. Отсюда выводим, что $D_\tau^i\beta(\tau)w(\tau) \in L_2(R^1)$. Заметим, что функция $D^i_\tau\beta(\tau)w(\tau)$ является непрерывной и ограниченной на $R^1$. Следовательно, функция $D^i_\tau\beta(\tau)w(\tau) \in L_2(R^1)$.

Таким образом, функции $f_i(p,\xi,\eta), i = 1,2,...,N_1 - 1$ принадлежат при каждом $\xi \in R^{n-1}$ пространству $L_1(R^1)$ как произведение двух функций из $L_2(R^1)$.

**Теорема 1.1**. Пусть выполнено условие 1 и символ $\lambda(p,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора принадлежит классу $S^{\sigma,p}_{\alpha,\rho}$, $\sigma \in R^1, p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$. Тогда для любой функции $v(x,t) \in C_0^\infty(R^n_+)$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to+0} F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_\alpha[g_N(p,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[D^N_{\alpha,t}v(x,t)]] = 0 \tag{1.11}$$

при $N \geqslant \max\{\sigma + 1,\ 1 + \frac{1}{\nu}\}$.

Доказательство. Так как $g_{N,i}(p,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D^i_\tau\beta(\tau)\cdot w(\tau)] \in L_1(R^1)$ по переменной $\eta \in R^1$, при всех $\xi \in R^{n-1}$, то в силу леммы Римана – Лебега, получим, что

$$F^{-1}_{\eta\to\tau}[g_{N,i}(p,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D^i_\tau\beta(\tau)w(\tau)]] \to 0 \text{ при } |\tau| \to \infty.$$

Заметим, что условие $\tau \to +\infty$ равносильно условию $t = \varphi^{-1}(\tau) \to +0$. Отсюда получим, что

$$\sum_{i=0}^{N-1}\lim_{t\to+0}F^{-1}_{\eta\to\tau}[g_{N,i}(p,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[D^i_\tau\beta(\tau)\cdot w(\tau)]\,]|_{\tau=\varphi(t)} = 0, \tag{1.12}$$

где $g_{N,0}(p,\xi,\eta) \equiv g_N(p,\xi,\eta)$.

Из (1.6) и (1.12) следует, что для доказательства теоремы 1.1 осталось доказать, что

$$\lim_{\tau\to+\infty} F^{-1}_{\eta\to\tau}[\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\tau\to(\eta-y)}[D^{N_1}_\tau\beta]\widetilde{g}_{N,N_1}(p,\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w]dy] = 0, \tag{1.13}$$

где функция $\widetilde{g}_{N,N_1}$ определена в (1.8).

Для доказательства (1.13) достаточно показать, что

$$J = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_{\tau\to(\eta-y)}[D^{N_1}_\tau\beta]\widetilde{g}_{N,N_1}(p,\xi,\eta-y,y)F_{\tau\to y}[w]dy \in L_1(R^1) \tag{1.14}$$

при всех $\xi \in R^1$.

Из (1.8) и (1.9) получим, что $|\widetilde{g}_{N,N_1}(p,\xi,\eta-y,y)| \leqslant c < \infty$ при $N+N_1 \geqslant \sigma$, причем константа $c > 0$ не зависит от $t$, $\xi$, $\eta$, $y$.

Отсюда с помощью неравенства Минковского получим

$$\|J\|_{L_1(R^1)} \leqslant c\left\|F_{\tau\to y}[D^{N_1}_\tau\beta(\tau)]\right\|_{L_1(R^1)}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}|F_{\tau\to y}[w]|dy. \tag{1.15}$$

Оценим правую часть неравенства (1.15). Покажем вначале, что $F_{\tau\to\eta}[D^{N_1}_\tau\beta(\tau)] \in L_1(R^1)$. Для этого достаточно доказать, например, что

$$\lim_{|\eta|\to\infty}\eta^2F_{\tau\to y}[D^{N_1}_\tau\beta(\tau)] = \lim_{|\eta|\to\infty}F_{\tau\to y}[D^{N_1+2}_\tau\beta(\tau)] = 0. \tag{1.16}$$

Действительно, учитывая, что $\alpha(t) = const$ при $t \geqslant d > 0$, что функция $D^{N_1}_\tau\beta(\tau) \equiv (\alpha\partial_t)^{N_1}(\alpha^{-\frac{1}{2}}(t)\ )|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$ принадлежит $L_1(R^1)$ при всех $N_1 \geqslant \max\{\frac{3}{2\nu},1+\frac{1}{\nu}\}$, откуда и вытекает справедливость равенства (1.16).

Таким образом, чтобы оценить правую часть (1.15) сверху некоторой константой, остается показать, что $F_{\tau\to\eta}[w] \in L_1(R^1)$. Для этого достаточно доказать, например, что

$$\lim_{|\eta|\to\infty} \eta^2 F_{\tau\to\eta}[w(\tau)] = 0. \tag{1.17}$$

Так как $\eta^2 F_{\tau\to\eta}[w] = F_\alpha[D_{\alpha,t}^{N+2}u(t)]$, то при $N+2 \geqslant 1+\frac{1}{\nu}$ получаем равенство (1.17). Отсюда и из (1.15) получим (1.14).

Теорема 1.1 доказана.

**Доказательство теоремы 1.** Утверждение теоремы 1 для функций $v(x,t) \in C_0^\infty(R_+^n)$ следует из леммы 1.1 и теоремы 1.1. В общем случае утверждение теоремы 1 следует из того, что множество функций $C_0^\infty(R_+^n)$ плотно в пространстве $H_{q+\sigma,\alpha,q}(R_+^n)$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш, М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Олейник, О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук СССР. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885–887.

3. Михлин, С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. — 1954. — № 8. — С. 19–48.

4. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сб. — 1954. — Т. 35 (77), вып. 33. — С. 513–568.

5. Вишик, М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4. — С. 29–56.

6. Глушко, В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : Труды семинара акад. С. Л. Соболева. — 1978. — № 2. — С. 49–68.

7. Левендорский, С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С. З. Левендорский // Математический сб. — 1980. — Т. 111 (153), вып. 4. — С. 483–501.

8. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

9. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

10. О существовании решений граничных задач в полупространстве для некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 64–76.

11. Об априорных оценках решений граничных задач для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 77–92.

12. Об априорных оценках решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 64–76.

13. О существовании решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 51–66.

14. Баев, А. Д. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, В. В. Панков, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 161–171.

15. О некоторых начально-краевых задачах для вырождающихся параболических уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 1. — С. 59–69.

16. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

17. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Н. И. Работинская // Доклады академии наук. — 2017. — Т. 477, № 1. — С. 7–10.

18. Баев, А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

## REFERENCES

1. Keldysh M.V. On some cases of degeneracy of elliptic type equations at the boundary of the domain. [Keldysh M.V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravneniyj ellipticheskogo tipa na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

2. Oleinik O.A. On the equations of the elliptic type, which are degenerate on the boundary of the domain. [Oleinik O.A. Ob uravneniyax ellipticheskogo tipa, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1952, vol. 87, no. 6, pp. 885–887.

3. Mikhlin S.G. Degenerate elliptic equations. [Mixlin S.G. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya]. *Vestnik Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of the Leningrad State University*, 1954, no. 8, pp. 19–48.

4. Vishik M.I. Boundary value problems for elliptic equations degenerating on the boundary of the domain. [Vishik M.I. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1954, vol. 35 (77), iss. 33, pp. 513–568.

5. Vishik M.I., Grushin V.V. Degenerate elliptic differential and pseudo-differential operators. [Vishik M.I., Grushin V.V. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, iss. 4, pp. 29–56.

6. Glushko V.P. The theorems of solvability of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi: Trudy seminara akad. S.L. Soboleva — Differential equations with partial derivatives. Acad seminar. S.L. Sobolev*, 1978, no. 2, pp. 49–68.

7. Levendorsky S.Z. Boundary value problems in a half-space for quasielliptic pseudodifferential operators degenerate on the boundary. [Levendorskiyj S.Z. Kraevye zadachi v poluprostranstve dlya kvaziellipticheskix psevdodifferencial'nyx operatorov, vyrozhdayushhixsya na granice]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1980, vol. 111 (153), iss. 4, pp. 483–501.

8. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential

operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

9. Baev A.D. On General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

10. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A. On the existence of solutions to boundary value problems in a half-space for some classes of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. O sushhestvovanii resheniyj granichnyx zadach v poluprostranstve dlya nekotoryx klassov vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 64–76.

11. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A. On a priori estimates for solutions of boundary value problems for a class of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. Ob apriornyx ocenkax resheniyj granichnyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 77–92.

12. Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Lezhenina I.F., Glushko A.V. A priori estimates for solutions of general boundary value problems in a half-space for degenerate elliptic equations. [Baev A.D., Bakhtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Lezhenina I.F., Glushko A.V. Об априорных оценках решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 64–76.

13. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Kharchenko V.D. On the existence of solutions to general boundary value problems in a half-space for degenerate elliptic equations. [Baev A.D., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Kharchenko V.D. O sushhestvovanii resheniyj obshhix granichnyx zadach v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 51–66.

14. Baev A.D., Pankov V.V., Kharchenko V.D. On an a priori estimate for solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate high-order elliptic equation. [Baev A.D., Pankov V.V., Kharchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 161–171.

15. Baev A.D., Nayduk F.O., Babaytsev A.A., Kharchenko V.D., Lezhenina I.F., Pletneva O.K. On some initial boundary value problems for degenerate parabolic equations. [Baev A.D., Nayjdyuk F.O., Babayjcev A.A., Xarchenko V.D., Lezhenina I.F., Pletneva O.K. O nekotoryx nachal'no-kraevyx zadachax dlya vyrozhdayushhixsya parabolicheskix uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 59–69.

16. Baev A.D., Kobylinsky P.A. On some properties of one class of degenerate pseudo-differential operators. [Baev A.D., Kobylinskiyj P.A. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Reports of the*

*Academy of Sciences*, 2015, vol. 460, no. 2, pp. 133–135.

17. Baev A.D., Rabotinsky N.I. On some properties of a class of degenerate pseudodifferential operators. [Baev A.D., Rabotinskaya N.I. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 2017, vol. 477, no. 1, pp. 7–10.

18. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Kobylinsky P.A. On degenerate high-order elliptic equations and pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A.D., Kovalevskiyj R.A., Kobylinskiyj P.A. O vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyax vysokogo poryadka i psevdodifferencial'nyx operatorax s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2016, vol. 471, no. 4, pp. 387–390.

*Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация*
*E-mail: alexsandrbaev@mail.ru*

*Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: alexsandrbaev@mail.ru*

*Бабайцева Наталия Алексеевна, аспирант Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация*

*Babaitseva Natalia Alekseevna, graduate student of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*

*Бабайцев Андрей Александрович, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия*
*E-mail: 259608@mail.ru*

*Babaitsev Andrey A., student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*
*E-mail: 259608@mail.ru*

*Харченко Виктория Дмитриевна, студент Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация*

*Kharchenko Victoria Dmitrievna, student of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation*