УДК 517.955.8

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ*

П. В. Бабич

Математический институт им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук

Поступила в редакцию 31.05.2020 г.

Аннотация. Работа посвящена развитию теории обратных задач для двумерного волнового уравнения с быстро осциллирующими по времени слагаемыми. Развивается новый подход к постановкам таких задач, когда дополнительные условия ставится не на все решение, а на несколько первых членов его асимптотики. Этот подход применяется при учете специфики области – прямой круговой цилиндр.

Ключевые слова: двумерные дифференциальные уравнения, волновое уравнение, быстро осциллирующая правая часть, асимптотика решения, обратная задача.

THE INVERSE PROBLEM FOR A TWO-DIMENSIONAL WAVE EQUATION WITH A QUICKLY OSCILLATING RIGHT SIDE

P. V. Babich

Abstract. The paper is devoted to the development of the theory of inverse problems for two-dimensional wave equation with summands rapidly oscillating in time. A new approach to setting such problems is developed for the case in which overdetermination conditions are imposed only on several first terms of the asymptotics of the solution rather that on the whole solution. This approach is applied with an allowance for specificity of the domain – straight round cylinder.

Keywords: two-dimensional differential equations, wave equation, rapidly oscillating absolute term, asymptotics of solution, inverse problem.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи, рассматриваемые в данной работе, находятся на пересечении двух дисциплин: «обратные задачи» и «асимптотические методы». Теории обратных задач посвящено большое число работ (см., например монографии [1]–[4]). Однако, в этой теории практически не изучены вопросы, касающиеся уравнений с быстро осциллирующими данными. Теория асимптотических методов также богато представлена в литературе (см., [5] и многие другие).

Несмотря на то, что уравнения с быстро осциллирующими данными практически отсутствуют в современной теории обратных задач, они моделируют многие физические процессы в высокочастотных силовых полях (см., [6]–[9]). Некоторые быстро осциллирующие обратные коэффициентные задачи изучались в работах [10], [11].

Данная статья посвящена вопросу о восстановлении неизвестной быстро осциллирующей по времени правой части двумерного линейного волнового уравнения, рассматриваемого в пространственно-временной области, представляющей прямой круговой цилиндр. Отметим,

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20–11–20141).

что в этой работе мы существенно опираемся на результаты, полученные в [14], где исследовался случай произвольной области. Здесь же разработанный метод применен, при этом учтена специфика области.

Изложение статьи разбито на три пункта. В п. 1 приведены некоторые обозначения, используемые в дальнейшем; в п. 2 изложены результаты, касающиеся прямой и обратной задач в круговом цилиндре; в п. 3 рассматривается пример решения обратной задачи.

1. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символом Ω обозначим единичный круг в $\mathbb{R}^2$, то есть $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ Через Q_T обозначим открытый цилиндр $\Omega \times (0,T) \subset \mathbb{R}^3$. Рассмотрим гиперболическую начально-краевую задачу с большим параметром ω:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u + f(x)r(t,\omega t), (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0. \tag{3}$$

Будем предполагать, что $f, \Delta f \in C^3(\overline{\Omega})$, а также

$$f|_{x_1^2+x_2^2=1} = \Delta f|_{x_1^2+x_2^2=1} = \Delta^2 f|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0. \tag{4}$$

Будем также считать, что функция $r(t,\tau)$ определена и непрерывна на множестве $D = \{(t,\tau) : (t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty)\}$ и 2π-периодична по τ. Представим ее в виде суммы:

$$r(t,\tau) = r_0(t) + r_1(t,\tau),$$

плавной r_0 и осциллирующей компоненты r_1 с нулевым средним $\langle r_1 \rangle_\tau = 0$. Будем предполагать, что $r_0 \in C^1([0,T])$, $r_1, r_{1t}, r_{1tt}, r_{1ttt}, \in C(D), D = \{(t,\tau) : (t,\tau) \in [0,T] \times [0,\infty)\}$.

2. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Введем функцию u_0, пусть она является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \Delta u_0 + f(x) r_0(t), \\ u_0|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0, \\ u_0|_{t=0} = \left.\frac{\partial u_0}{\partial t}\right|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Далее в силу [13, Теорема 8] решение задачи (2.1) имеет вид

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) \frac{f_n}{\sqrt{\lambda_n}} \int_0^t r_0(\tau) \sin \sqrt{\lambda_n}(t-\tau) d\tau \tag{2.2}$$

где $y_n(x), \lambda_n$ – собственные функции и соответствующие им собственные значения оператора Δ в круге Ω, f_n – коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье по функциям y_n.

Рассмотрим задачу Штурма-Лиувилля для круга Ω:

$$\begin{cases} \Delta z(x_1, x_2) + \lambda z(x_1, x_2) = 0, (x_1,x_2) \in \Omega, \\ y|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Собственные функции круга имеют вид

$$z_{m,k}(\rho,\varphi) = J_m(j_{m,k}\rho)\begin{cases}\cos m\varphi,\\ \sin m\varphi,\end{cases} \tag{2.4}$$

где $J_m(x), m = 0,1,2,...$ – функции Бесселя первого рода порядка m, $j_{m,k}, k = 1,2,...$ – k-ый нуль функции $J_m(x)$, (ρ,φ) – полярные координаты с началом координат в центре круга Ω. Собственные значения $\mu_{m,k} = (j_{m,k})^2$.

Таким образом решение задачи (2.1) представляется в виде (2.2) с собственными значениями $\lambda_{2n-1} = \lambda_{2n} = j_n^2, n \in \mathbb{N}$, где j_n – нули функции Бесселя первого рода записанные в порядке возрастания, т.е. $\{j_{0,1}, j_{1,1}, j_{2,1}, j_{0,2}, ...\}$, и собственными функциями

$$y_{2n-1}(\rho,\varphi) = J_{m_{2n-1}}(j_n\rho)\sin m_{2n-1}\varphi,$$

$$y_{2n}(\rho,\varphi) = J_{m_{2n}}(j_n\rho)\cos m_{2n}\varphi,$$

где m_k – индекс m функции $z_{m,k}$, соответствующей собственному значению λ_k. Учитывая абсолютную сходимость ряда (2.2) его можно переписать в виде

$$u_0(\rho,\varphi,t) = \sum_{m=0,k=1}^{\infty} \frac{J_m(j_{m,k}\rho)}{j_{m,k}} \left(f_{m,k}\sin m\varphi + g_{m,k}\cos m\varphi\right) \int\limits_0^t r_0(s)\sin j_{m,k}(t-s)ds, \tag{2.5}$$

$$f_{m,k} = \frac{2}{(J'_m(j_{m,k}))^2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} f(\rho,\varphi)J_{m,k}(j_{m,k}\rho)\sin m\varphi\, d\varphi\, d\rho,$$

$$g_{m,k} = \frac{2}{(J'_m(j_{m,k}))^2}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi} f(\rho,\varphi)J_{m,k}(j_{m,k}\rho)\cos m\varphi\, d\varphi\, d\rho.$$

Далее, в силу [14, Теорема 4] справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Задача* (1)–(3) *однозначно разрешима. И кроме того для решения задачи* $u_\omega(x,t)$ *справедлива следующая асимптотическая формула*

$$\left\|u_\omega - u_0\right\|_{C(\overline{\Pi})} = o(1),\ \omega \to \infty, \tag{2.6}$$

где функция u_0 *имеет вид* (2.5).

Будем далее считать, что функция r_0 известна, а функции f и r_1 не известны. Предположим, что множество $M_0 \equiv \{(m,k), \Lambda_{m,k}(t_0) = 0\} = \varnothing$, где

$$\Lambda_{m,k}(t) = \int_0^t \frac{r_0(s)\sin j_{m,k}(t-s)}{j_{m,k}}ds. \tag{2.7}$$

Пусть заданы 2π-периодическая с нулевым средним по второй переменной функция $\chi(t,\tau), \chi \in C^{3,2}(D), D = [0,T]\times[0,\infty)$, а так же функция $\psi \in C^{12}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая дополнительным условиям

$$\psi|_{\rho=1} = \Delta\psi|_{\rho=1} = \Delta^2\psi\big|_{\rho=1} = ... = \Delta^5\psi\big|_{\rho=1} = 0, \tag{2.8}$$

$$\psi(\rho,\varphi) = \sum_{m=0,k=1}^{\infty} J_m(j_{m,k}\rho)\left(\psi_{m,k}\sin m\varphi + \overline{\psi}_{m,k}\cos m\varphi\right).$$

И пусть $x^0 = (\rho_0, \varphi_0) \in \Omega$ – точка, в которой $\widetilde{f}(\rho_0, \varphi_0) \neq 0$, где

$$\widetilde{f}(\rho, \varphi) = \sum_{m=0,k=1}^{\infty} J_m(j_{m,k}\rho)\left(\widetilde{f}_{m,k}\sin m\varphi + \widetilde{g}_{m,k}\cos m\varphi\right),\ \widetilde{f}_{m,k} = \frac{\psi_{m,k}}{\Lambda_{m,k}(t_0)}, \widetilde{g}_{m,k} = \frac{\overline{\psi}_{m,k}}{\Lambda_{m,k}(t_0)}. \tag{2.9}$$

Рассмотрим функции $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$, определенные следующим образом. Функция $\varphi_0(t)$ является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \varphi_0''(t) = \widetilde{f}(x^0)r_0(t) + \int_0^t K(t,s)r_0(s)\,ds, \\ \varphi_0(0) = \varphi_0'(0) = 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$K(t,s) = -\sum_{m=0,k=1}^{\infty} j_{m,k}J_m(j_{m,k}\rho_0)\left(\widetilde{f}_{m,k}\sin m\varphi_0 + \widetilde{g}_{m,k}\cos m\varphi_0\right)\sin j_{m,k}(t-s).$$

Функции φ_1, φ_2 удовлетворяют условиям

$$\varphi_1(t) = -p_{0t}(0,0)\sum_{m=0,k=1}^{\infty}\frac{J_m(j_{m,k}\rho_0)}{j_{m,k}}\left(\widetilde{f}_{m,k}\sin m\varphi_0 + \widetilde{g}_{m,k}\cos m\varphi_0\right)\sin j_{m,k}t, \tag{2.11}$$

$$\varphi_2(t) = -p_0(0,0)\sum_{m=0,k=1}^{\infty} J_m(j_{m,k}\rho)\cos j_{m,k}t\left(\widetilde{f}_{m,k}\sin m\varphi_0 + \widetilde{g}_{m,k}\cos m\varphi_0\right) -$$
$$(2p_{1t}(0,0) + p_{ot}(0,0))\sum_{m=0,k=1}^{\infty} J_m(j_{m,k}\rho)\sin j_{m,k}t\left(\frac{\widetilde{f}_{m,k}}{j_{m,k}}\sin m\varphi_0 + \frac{\widetilde{g}_{m,k}}{j_{m,k}}\cos m\varphi_0\right), \tag{2.12}$$

где

$$p_0(t,\tau) = \int_0^\tau\left(\int_0^h r_1(t,s)ds - \left\langle\int_0^\tau r_1(t,s)ds\right\rangle_\tau\right)dh -$$
$$\left\langle\int_0^\tau\left(\int_0^h r_1(t,s)ds - \left\langle\int_0^\tau r_1(t,s)ds\right\rangle_\tau\right)dh\right\rangle_\tau, \tag{2.13}$$

$$p_1(t,\tau) = \left\langle\int_0^\tau p_0(t,s)ds\right\rangle_\tau - \int_0^\tau p_0(t,s)ds.$$

Обратная задача состоит в нахождении функций f и r_1 указанных классов, что для решения $u_\omega(x,t)$ задачи (1)-(3) выполнено соотношение порядка

$$\left\|u_\omega(x^0,t) - \left[\varphi_0(t) + \frac{1}{\omega}\varphi_1(t) + \frac{1}{\omega^2}\big(\varphi_2(t) + \chi(t,\omega t)\big)\right]\right\|_{C([0,T])} = o(\omega^{-2}), \tag{2.14}$$

$$\left\|u_\omega(x,t_0) - \psi(x)\right\|_{C(\overline{\Omega})} = o(1), \omega \to \infty. \tag{2.15}$$

Согласно [14, Теорема 6] имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть функции r_0, ψ, χ и точки $(\rho_0, \varphi_0), t_0$ удовлетворяют условиям, изложенным выше, и кроме того $M_0 = \varnothing$. Тогда обратная задача однозначно разрешима. При этом функция $f(x) = \widetilde{f}(x)$ вычисляется по формуле* (2.9), *а*

$$r_1(t,\tau) = (f(\rho_0,\varphi_0))^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\chi(t,\tau). \tag{2.16}$$

3. ПРИМЕР

Рассмотрим обратную задачу для системы (1)-(3). В качестве исходных данных возьмем следующие:

$$
\begin{gathered}
t_0 = \tfrac{\pi}{2}, \rho = \tfrac{1}{3}, \varphi = \tfrac{\pi}{4}, \\
\psi(\rho, \varphi) = \sqrt{3} J_2(j_{2,3}\rho)\sin 2\varphi + \tfrac{1}{5} J_3(j_{3,1}\rho)\sin 3\varphi, \\
r_0(t) = 2t, \chi(t,\tau) = \cos\tau.
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

где (ρ, φ) — полярные координаты.

Заметим, что $M_0 = \varnothing$. Рассмотрим $\Lambda_{m,k}(t_0)$. Вычисляя соответствующий интеграл, получим:

$$
\Lambda_{m,k}(t_0) = \frac{j_{m,k}\pi - 2\sin\frac{j_{m,k}\pi}{2}}{j^3_{m,k}} > 0. \tag{3.2}
$$

Действительно, так как при росте индексов m и k согласно свойствам нулей функции Бесселя первого рода числа $j_{m,k} > j_{0,1}$. Таким образом

$$
j_{m,k}\pi - 2\sin\frac{j_{m,k}\pi}{2} > j_{0,1}\pi - 2 \approx 5.55 > 0.
$$

Покажем, что функция ψ удовлетворяет следующим условиям: $\psi \in C^{12}(\overline{\Omega})$

$$
\psi|_{\rho=1} = \Delta\psi|_{\rho=1} = ... = \Delta^5\psi\big|_{\rho=1} = 0. \tag{3.3}
$$

Применим оператор Лапласа к функции ψ, получим

$$
\Delta^i\psi(\rho,\varphi) = (j_{2,3})^{2i}\sqrt{3}J_2(j_{2,3}\rho)\sin 2\varphi + \frac{(j_{3,1})^{2i}}{5}J_3(j_{3,1}\rho)\sin 3\varphi, i = \overline{1{,}5}.
$$

Заметим, что $\Delta^i\psi(\rho,\varphi)\big|_{\rho=1} = 0, i = \overline{1{,}5}$.

Разложим функцию ψ в ряд Фурье, в силу ее вида, получим

$$
\psi(\rho,\varphi) = \sum_{m=0,k=1}^{\infty} \psi_{m,k} J_m(j_{m,k}\rho)\sin m\varphi, \tag{3.4}
$$

$$
\psi_{2,3} = \sqrt{3}, \psi_{3,1} = \frac{1}{5}, \psi_{m,k} = 0, (m,k) \neq (2{,}3), (3{,}1). \tag{3.5}
$$

Согласно [14, Теореме 6] функция $f(\varrho,\varphi)$ представляется в виде

$$
f(\rho,\varphi) = \frac{\sqrt{3}j^3_{2,3}}{j_{2,3}\pi^2 - 2\sin j_{2,3}\frac{\pi}{2}}J_2(j_{2,3}\rho)\sin 2\varphi + \frac{j^3_{3,1}}{5j_{3,1}\pi^2 - 10\sin j_{3,1}\frac{\pi}{2}}J_3(j_{3,1}\rho)\sin 3\varphi \tag{3.6}
$$

$$
f_{2,3} = \frac{\sqrt{3}j^3_{2,3}}{j_{2,3}\pi^2 - 2\sin j_{2,3}\frac{\pi}{2}}, f_{3,1} = \frac{j^3_{3,1}}{5j_{3,1}\pi^2 - 10\sin j_{3,1}\frac{\pi}{2}}, f_{m,k} = 0, (m,k) \neq (2{,}3), (3{,}1). \tag{3.7}
$$

В силу свойств нулей функции Бесселя первого рода

$$
f(x^0) = \frac{10\sqrt{3}j^3_{2,3}J_2(\frac{j_{2,3}}{3}) + \sqrt{2}j^3_{3,1}J_3(\frac{j_{3,1}}{3})}{10j_{3,1}\pi^2 - 20\sin j_{3,1}\frac{\pi}{2}} \approx 16.78 \neq 0.
$$

Таким образом находим

$$
r_1(t,\tau) = \frac{(20\sin j_{3,1}\frac{\pi}{2} - 10j_{3,1}\pi^2)\cos\tau}{10\sqrt{3}j^3_{2,3}J_2(\frac{j_{2,3}}{3}) + \sqrt{2}j^3_{3,1}J_3(\frac{j_{3,1}}{3})}.
$$

Автор выражает благодарность научному руководителю В. Б. Левенштаму за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаврентьев, М. М. Одномерные обратные задачи математической физики / М. М. Лаврентьев, К. Г. Резницкая, В. Г. Яхно. — Новосибирск : Наука, 1982.

2. Романов, В. Г. Обратные задачи математической физики / В. Г. Романов. — М. : МГУ, 1984.

3. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. — М. : Наука, 1994.

4. Anikonov, Jn. E. Multidimentional inverse and Ill-posed problems for diffentional equations / Jn. E. Anikonov. — Utrecht : VSP, 1995.

5. Ильин, А. М. Асимптотические методы в анализе / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009.

6. Зеньковская, С. М. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции / С. М. Зеньковская, И. Б. Симоненко // Механика жидкости и газа. — 1966. — № 5. — С. 51–55.

7. Симоненко, И. Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений / И. Б. Симоненко // Математический сборник. — 1972. — Т. 87(129), № 2. — С. 236–253.

8. Левенштам, В. Б. Метод усреднения в задаче конвекции при высокочастотных наклонных вибрациях / В. Б. Левенштам // Сибирский математический журнал. — 1996. — Т. 37, № 5. — С. 1103–1116.

9. Левенштам, В. Б. Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции / В. Б. Левенштам // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2000. — Т. 40, № 9. — С. 1416–1424.

10. Babich, P. V. Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms / P. V. Babich, V. B. Levenshtam // Asymptotic Analysis. — 2016. — V. 97. — P. 329–336.

11. Бабич, П. В. Восстановление быстро осциллирующего источника в уравнении теплопроводности по асимптотике решения / П. В. Бабич, В. Б. Левенштам, С. П. Прика // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57, № 12. — С. 1908–1918.

12. Боголюбов, А. Н. Задачи по математической физике / А. Н. Боголюбов, В. В. Кравцов. — М. : Издательство Московского университета, 1998.

13. Ильин, В. А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений / В. А. Ильин // Успехи математических наук. — 1960. — Т. 15, № 2. — С. 97–154.

14. Babich, P. V. Inverse problems in the multidimensional hyperbolic equation with rapidly oscillating absolute term / P. V. Babich, V. B. Levenshtam // arXiv:2003.07625

REFERENCES

1. Lavret'ev M.M., Reznitskaya K.G., Yakhno V.G. One-Dimensional Inverse Problems of Mathematical Physics. [Lavrent'ev M.M., Reznickaya K.G., Yaxno V.G. Odnomernye obratnye zadachi matematicheskoyj fiziki]. Novosibirsk, 1982.

2. Romanov V.G. Inverse Problems of Mathematical Physics. [Romanov V.G. Obratnye zadachi matematicheskoyj fiziki]. Moscow, 1984.

3. Denisov A.M. Introduction to the Theory of Inverse Problems. [Denisov A.M. Vvedenie v teoriyu obratnyx zadach]. Moscow, 1994.

4. Anikonov Jn.E. Multidimentional inverse and Ill-posed problems for diffentional equations. Utrecht: VSP, 1995.

5. Il'in A.M., Danilin A.R. Asymptotic methods in analysis. [Il'in A.M., Danilin A.R. Asimptoticheskie metody v analize]. Moscow, 2009.

6. Zenkovskaya S.M., Simonenko I.B. About influence of the high frequency to the onset of convection. [Zen'kovskaya S.M., Simonenko I.B. O vliyanii vibracii vysokoyj chastoty na vozniknovenie konvekcii]. *Mexanika zhidkosti i gaza — Fluid and gas mechanics*, 1966, no. 5, pp. 51–55.

7. Simonenko I.B. A justification of the averaging method for a problem of convection in a field of rapidly oscillating forces and for other parabolic equations. [Simonenko I.B. Obosnovanie metoda usredneniya dlya zadachi konvekcii v pole bystro oscilliruyushhix sil i dlya drugix parabolicheskix uravneniyj]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1972, vol. 87(129), no. 2, pp. 236–253.

8. Levenshtam V.B. The averaging method in the convection problem with high-frequency oblique vibrations. [Levenshtam V.B. Metod usredneniya v zadache konvekcii pri vysokochastotnyx naklonnyx vibraciyax]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1996, vol. 37, no. 5, pp. 1103–1116.

9. Levenshtam V.B. Asymptotic expansion of the solution to the problem of vibrational convection. [Levenshtam V.B. Asimptoticheskoe razlozhenie resheniya zadachi o vibracionnoyj konvekcii]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2000, vol. 40, no. 9, pp. 1416–1424.

10. Babich P.V., Levenshtam V.B. Direct and inverse asymptotic problems high-frequency terms. Asymptotic Analysis, 2016, vol. 97, pp. 329–336.

11. Babich P.V., Levenshtam V.B., Prika S.P. Recovery of a rapidly oscillating source in the heat equation from solution asymptotics. [Babich P.V., Levenshtam V.B., Prika S.P. Vosstanovlenie bystro oscilliruyushhego istochnika v uravnenii teploprovodnosti po asimptotike resheniya]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, vol. 57, no. 12, pp. 1908–1918.

12. Bogoliubov A.N., Kravtsov V.V. Problems of mathematical physics. [Bogolyubov A.N., Kravcov V.V. Zadachi po matematicheskoyj fizike]. Moscow, 1998.

13. Ilin V.A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations. [Il'in V.A. O razreshimosti smeshannyx zadach dlya giperbolicheskogo i parabolicheskogo uravneniyj]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1960, vol. 15, no. 1, pp. 85–142.

14. Babich P.V., Levenshtam V.B. Inverse problems in the multidimensional hyperbolic equation with rapidly oscillating absolute term. arXiv:2003.07625.

Бабич Павел Васильевич, Математический институт им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук, Москва, Россия
E-mail: xblahblahc@gmail.com

Babich Pavel Vasil'evich, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: xblahblahc@gmail.com