УДК 621.391

ОЦЕНКА МОМЕНТА И ВЕЛИЧИНЫ РАЗЛАДКИ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ ГАУССОВСКОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА*

М. М. Шахморадиан, А. А. Макаров, А. А. Кенесова, З. С. Талапкалиева

Национальный исследовательский университет "МЭИ",
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию 13.03.2020 г.

Аннотация. Выполнен синтез максимально правдоподобного алгоритма измерения момента разладки и скачкообразного изменения центральной частоты быстрофлуктуирующего гауссовского случайного процесса. Рассмотрены возможности его практической реализации на основе достаточно простых одноканальных устройств. С использованием метода аддитивной локально-марковской аппроксимации приращения решающей статистики найдены замкнутые аналитические выражения для условных смещений и рассеяний выносимых оценок. Методами статистического моделирования установлено, что предложенный измеритель является работоспособным, а аналитические формулы, описывающие качество его функционирования хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными в широком диапазоне значений параметров анализируемого случайного процесса.

Ключевые слова: разладка случайного процесса, центральная частота, метод максимального правдоподобия, разрывный параметр, метод аддитивной локально-марковской аппроксимации, смещение оценки, рассеяние оценки, статистическое моделирование.

ESTIMATING THE MOMENT AND THE MAGNITUDE OF THE STEPWISE CHANGE IN THE BAND CENTER OF THE GAUSSIAN RANDOM PROCESS

M. M. Shahmoradian, A. A. Makarov, A. A. Kenesova, Z. S. Talapkalieva

Abstract. The synthesis is carried out of the maximum likelihood algorithm for measuring the point of time and the stepwise change of the central frequency of a fast-fluctuating Gaussian random process. The possibilities are considered of its practical implementation by means of the simpler single-channel devices. Application of the method of the additive local-Markov approximation of the decision statistics increment makes it possible to find the closed analytical expressions for the conditional biases and variances of the resulting estimates. By means of statistical simulation, it is established that the introduced measurer is operable while the analytical formulas describing the quality of its operation are in good agreement with the corresponding experimental data in a wide range of the parameter values of the analyzed random process.

Keywords: abrupt change of random process, band center, maximum likelihood method, discontinuous parameter, additive local Markov approximation method, bias of estimate, variance of estimate, statistical simulation.

---

* Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект FSWF-2020-0022).

ВВЕДЕНИЕ

В ряде приложений теории управления, технической и медицинской диагностики, распознавания образов, обработки данных измерений и др. необходимо решать задачу статистического анализа скачкообразных случайных возмущений диагностируемых процессов и систем [1]. На практике диагностируемые объекты могут иметь стохастическую природу, либо быть подвержены внешним случайным воздействиям. Скачкообразное возмущение таких объектов часто представляет собой случайный процесс, равномерно занимающий всю рабочую полосу частот и возникающий в некоторый априори неизвестный момент времени.

В работах [2–4] рассмотрена методика измерения неизвестных момента и величины скачкообразного изменения (разладки) ширины полосы частот и энергетических параметров быстрофлуктуирующих полосовых гауссовских случайных процессов. Показано, что использование предложенного подхода позволяет получать эффективные алгоритмы определения разладки в условиях параметрической априорной неопределенности. Ниже на основе полученных в [2–4] результатов найдена структура и характеристики измерителя неизвестной разладки центральной частоты гауссовского случайного процесса в предположении быстроты его флуктуаций и относительной равномерности его спектральной плотности в заданной полосе частот. Показано, что синтезированный измеритель может быть реализован на современной элементной базе и является технически существенно более простым по сравнению с аналогами. Методами статистического моделирования установлена его работоспособность и достаточно высокая эффективность.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Положим, что на вход приемного устройства в течение интервала времени $[0,T]$ поступает полосовой быстрофлуктуирующий гауссовский случайный процесс

$$\xi(t) = [1 - \theta(t - \lambda_0)]\, \nu_1(t) + \theta(t - \lambda_0)\, \nu_2(t), \tag{1}$$

наблюдаемый на фоне белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0. В (1) обозначено: $\theta(t) = 0$ при $t < 0$ и $\theta(t) = 1$ при $t \geqslant 0$ — функция Хевисайда, $\lambda_0 \in [\Lambda_1,\Lambda_2]$ — некоторый неизвестный момент времени, причем $0 < \Lambda_1$, $\Lambda_2 < T$, а $\nu_i(t)$, $i = 1,2$ — статистически независимые центрированные стационарные гауссовские случайные процессы со спектральными плотностями [5]

$$G_i(\omega,\vartheta_{0i}) = \frac{d}{2}\left[I\left(\frac{\vartheta_{0i} - \omega}{\Omega}\right) + I\left(\frac{\vartheta_{0i} + \omega}{\Omega}\right)\right], \quad I(x) = \begin{cases} 1\ , & |x| \leqslant 1/2\ , \\ 0\ , & |x| > 1/2\ . \end{cases} \tag{2}$$

Здесь ϑ_{0i} — центральная частота, Ω — ширина полосы частот, а d — величина спектральной плотности (интенсивность) процесса $\nu_i(t)$, определяющая его дисперсию $D = d\Omega/2\pi$, причем $\vartheta_{01} \neq \vartheta_{02}$.

Величину λ_0 в (1) можно интерпретировать как момент разладки центральной частоты быстрофлуктуирующего процесса $\xi(t)$. При этом условие "быстроты" его флуктуаций запишем следующим образом

$$\mu_{\min} = T_{\min}\Omega/2\pi >> 1, \tag{3}$$

где $T_{\min} = \min(\lambda_0, T - \lambda_0)$.

На основе наблюдаемой реализации

$$x(t) = \xi(t) + n(t), \quad t \in [0,T] \tag{4}$$

необходимо оценить параметры λ_0 и ϑ_{02} случайного процесса $\xi(t)$, принимающие значения из априорных интервалов $[\Lambda_1,\Lambda_2]$, $[\Theta_1,\Theta_2]$.

2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ

При синтезе алгоритма оценки момента и величины скачкообразного изменения центральной частоты процесса $\xi(t)$ (1) воспользуемся методом максимального правдоподобия. Согласно этому методу необходимо формировать решающую статистику — логарифм функционала отношения правдоподобия — как функцию текущих значений всех неизвестных параметров. При выполнении (3) согласно [5,6] имеем

$$L(\lambda,\vartheta) = \frac{d}{N_0(N_0+d)}\left[\int_0^\lambda y^2(t,\vartheta_{01})\ \mathrm{d}t + \int_\lambda^T y^2(t,\vartheta)\ \mathrm{d}t\right] - \frac{\Omega T}{2\pi}\ln\left(1+\frac{d}{N_0}\right), \tag{5}$$

где λ, ϑ — текущие значения неизвестных параметров λ_0, ϑ_{02} соответственно, а $y(t,\vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t')\ h(t-t',\vartheta)\ \mathrm{d}t'$ — отклик фильтра на реализацию наблюдаемых данных (4) такого, что его передаточная функция $H(\omega,\vartheta)$ удовлетворяет условию $|H(\omega,\vartheta)|^2 = I[(\vartheta-\omega)/\Omega] + I[(\vartheta+\omega)/\Omega]$.

Оценки максимального правдоподобия (ОМП) λ_m, ϑ_m измеряемых величин λ_0, ϑ_{02} определятся как положение наибольшего максимума решающей статистики (4):

$$(\lambda_m,\vartheta_m) = \operatorname*{arg\,max}_{\lambda\in[\Lambda_1,\Lambda_2]\ ,\vartheta\in[\Theta_1,\Theta_2]} L(\lambda,\vartheta)$$

или, после несложных преобразований,

$$(\lambda_m,\vartheta_m) = \operatorname*{arg\,max}_{\lambda\in[\Lambda_1,\Lambda_2]\ ,\vartheta\in[\Theta_1,\Theta_2]} M(\lambda,\vartheta), \tag{6}$$

$$M(\lambda,\vartheta) = \int_\lambda^T \left[y^2(t,\vartheta) - y^2(t,\vartheta_{01})\right]\ \mathrm{d}t. \tag{7}$$

Максимально правдоподобный измеритель (6) технически может быть реализован в виде N-канального устройства, каждый канал которого настроен на полосу частот $[\vartheta_i-\Omega/2,\vartheta_i+\Omega/2]$, где $\vartheta_i = \Theta_1 + (i-1/2)\,\Delta\vartheta$, $i=\overline{1,N}$, $\Delta\vartheta = (\Theta_2-\Theta_1)/N$ (при параллельной обработке), либо на основе последовательного спектранализатора [5]. Одна из возможных блок-схем такого устройства показана на рис. 1, где обозначено: 1 — ключ, замыкающийся на время $[0,T]$, 2^0 — фильтр с передаточной функцией $H(\omega,\vartheta_{01})$, 2^i – фильтр с передаточной функцией $H(\omega,\vartheta_i)$, 3 — квадратор, 4 — вычитающее устройство, 5 — интегратор в течение интервала времени $[0,T]$, 6 — линия задержки на время T, 7 – интегратор, 8 — решающее устройство, определяющее по номеру канала с наибольшим максимальным значением оценку центральной частоты случайного процесса после разладки, а по положению наибольшего максимума сигнала в этом канале на интервале $[\Lambda_1,\Lambda_2]$ — оценку момента разладки. Очевидно, чем больше число каналов N, тем точнее обнаружитель, представленный на рис. 1, реализует алгоритм (6).

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ

Найдем характеристики алгоритма оценивания (6). С этой целью перепишем решающую статистику (7) в виде

$$\widetilde{M}(l,v) = M_1(l,v) - M_2(l), \quad l\in\left[\widetilde{\Lambda}_1,\widetilde{\Lambda}_2\right], \quad v\in\left[\widetilde{\Theta}_1,\widetilde{\Theta}_2\right], \tag{8}$$

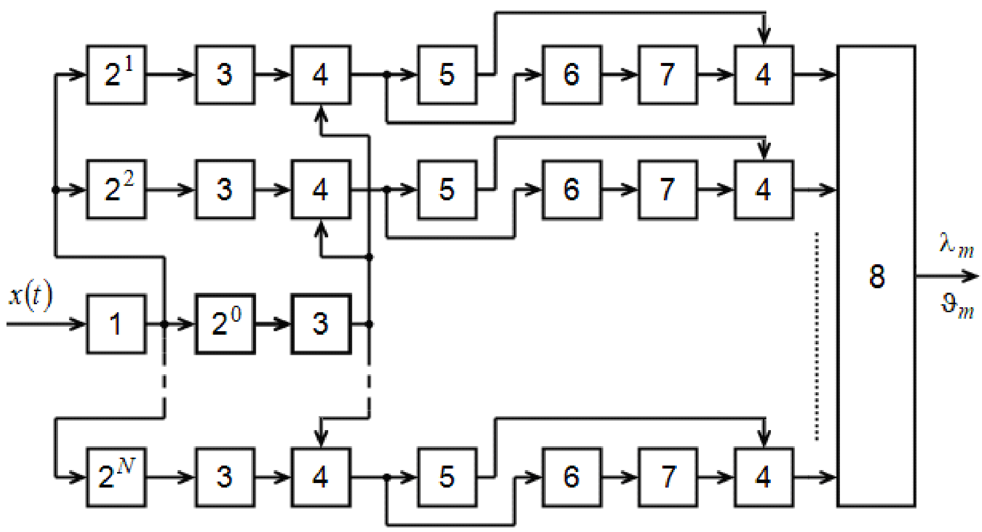

Рис. 1. *Максимально правдоподобный измеритель момента и величины разладки центральной частоты гауссовского случайного процесса.*

где

$$M_1(l,v) = \frac{T}{\mu N_0}\int\limits_l^1 y^2\left(\widetilde{t},v\right)\,\mathrm{d}\widetilde{t}, \quad M_2(l) = \frac{T}{\mu N_0}\int\limits_l^1 y^2\left(\widetilde{t},v_{01}\right)\,\mathrm{d}\widetilde{t}, \tag{9}$$

$$l = \lambda/T, v = \vartheta/\Omega, \widetilde{\Lambda}_i = \Lambda_i/T, \widetilde{\Theta}_i = \Theta_i/\Omega, i = 1{,}2, \mu = \Omega T/2\pi, \widetilde{t} = t/T, v_{01} = \vartheta_{01}/\Omega.$$

При выполнении (4) функционалы $M_1(l,v)$, $M_2(l)$ (а, следовательно, и функционал $\widetilde{M}(l,v)$) являются приближенно гауссовскими [5], т.е. допускают полное статистическое описание с помощью моментных или корреляционных функций первых двух порядков. В этой связи представим (9) в виде суммы регулярных и шумовых составляющих [7]:

$$M_1(l,v) = S_1(l,v) + N_1(l,v), \quad M_2(l) = S_2(l) + N_2(l).$$

Здесь $S_1(l,v) = \langle M_1(l,v)\rangle$, $S_2(l) = \langle M_2(l)\rangle$ — регулярные, $N_1(l,v) = M_1(l,v) - \langle M_1(l,v)\rangle$, $N_2(l) = M_2(l) - \langle M_2(l)\rangle$ — шумовые составляющие, а усреднение $\langle\cdot\rangle$ выполняется по реализациям $x(t)$ при фиксированных значениях λ_0, ϑ_{02}. Путем непосредственного усреднения (9) находим

$$S_1(l,v) = \max(0,l_0 - l)\left[1 + qC_1(v - v_{01})\right] + \left[1 - \max(l_0,l)\right]\left[1 + qC_1(v - v_{02})\right],$$

$$\begin{gathered} S_2(l,v) = (1+q)\max(0,l_0 - l) + \left[1 - \max(l_0,l)\right]\left[1 + qC_1(\Delta v)\right], \\ \langle N_1(l_1,v_1)\,N_1(l_2,v_2)\rangle = \left[q(2+q)\max(0,l_0 - \max(l_1,l_2))\,C_3(v_{01},v_1,v_2) + \right. \\ \left. + q(2+q)(1 - \max(l_0,l_1,l_2))\,C_3(v_{02},v_1,v_2) + (1 - \max(l_1,l_2))\,C_1(v_2 - v_1)\right]/\mu, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \langle N_2(l_1)\,N_2(l_2)\rangle = \Big[(1+q)^2\max(0,l_0 - \max(l_1,l_2)) + \\ + (1 - \max(l_0,l_1,l_2))\,(1 + q(2+q)\,C_1(\Delta v))\Big]/\mu, \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} \langle N_1(l_1,v_1)\,N_2(l_2)\rangle = \Big[(1+q)^2\max(0,l_0 - \max(l_1,l_2))\,C_1(v_1 - v_{01}) + \\ + (1 - \max(l_0,l_1,l_2))\,(C_1(v_1 - v_{01}) + q(2+q)\,C_3(v_{01},v_{02},v_1))\Big]/\mu, \end{gathered}$$

где $l_0 = \lambda_0/T$, $q = d/N_0$, $v_{02} = \vartheta_{02}/\Omega$, $\Delta v = v_{01} - v_{02}$, $C_1(x) = \max(0, 1 - |x|)$, $C_3(x,y,z) = \max(0{,}1 + \min(x,y,z) - \max(x,y,z))$.

Сделаем замену переменных

$$l \to l', \quad v \to \widetilde{v}' = v - v_{02} \tag{11}$$

и с учетом (10) представим регулярную составляющую $S\left(l,v\right) = \left\langle \widetilde{M}\left(l,v\right)\right\rangle$ и корреляционную функцию шумовой составляющей $N\left(l,v\right) = \widetilde{M}\left(l,v\right) - \left\langle \widetilde{M}\left(l,v\right)\right\rangle$ решающей статистики $\widetilde{M}\left(l,v\right)$ (8) в виде

$$\begin{gathered}
S\left(l',\widetilde{v}'\right) = q\min\left(0,l'_0 - l'\right)\left[1 - C_1\left(\widetilde{v}' - \Delta v\right)\right] + q\min\left(l'_0,l'\right)\left[C_1\left(\widetilde{v}'\right) - C_1\left(\Delta v\right)\right],\\
\left\langle N\left(l'_1,\widetilde{v}'_1\right)N\left(l'_2,\widetilde{v}'_2\right)\right\rangle = \Big\{\min\left(l'_1,l'_2\right)\left[1 + C_1\left(\widetilde{v}'_1 - \widetilde{v}'_2\right) - C_1\left(\widetilde{v}'_1 - \Delta v\right) - C_1\left(\widetilde{v}'_2 - \Delta v\right)\right] +\\
q\left(2+q\right)\Big[\max\left(0,\min\left(l'_1,l'_2\right) - l'_0\right)\left(1 + C_3\left(\Delta v,\widetilde{v}'_1,\widetilde{v}'_2\right) - C_2\left(\widetilde{v}'_1 - \Delta v\right) - C_2\left(\widetilde{v}'_2 - \Delta v\right)\right) +\\
\min\left(l'_0,l'_1,l'_2\right)\left(C_1\left(\Delta v\right) + C_3\left(0,\widetilde{v}'_1,\widetilde{v}'_2\right) - C_3\left(0,\Delta v,\widetilde{v}'_1\right) - C_3\left(0,\Delta v,\widetilde{v}'_2\right)\right)\Big]\Big\}\Big/\mu\ ,
\end{gathered} \tag{12}$$

где $l'_0 = 1 - l_0$, а Δv, $C_1\left(x\right)$ и $C_3\left(x,y,z\right)$ определяются так же, как в (10).

Учтем, что регулярная составляющая $S\left(l',\widetilde{v}'\right)$ достигает абсолютного максимума в точке $\left(l'_0,0\right)$, а реализации шумовой составляющей $N\left(l',\widetilde{v}'\right)$ непрерывны с вероятностью 1. Тогда выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для алгоритма (6) запишется в виде [7]

$$z^2 = \frac{S^2\left(l'_0,0\right)}{\left\langle N^2\left(l'_0,0\right)\right\rangle} = \mu\frac{l'_0 q^2\min\left(1,\left|\Delta v\right|\right)}{1 + \left(1+q\right)^2}. \tag{13}$$

Из (13) следует, что при выполнении (3) и не слишком малых значениях q и $|\Delta v|$ ОСШ $z^2 >> 1$, так что координаты $\left(l'_m,\widetilde{v}'_m\right)$ положения абсолютного максимума функционала $\widetilde{M}\left(l',\widetilde{v}'\right)$ находятся в малой δ-окрестности точки $\left(l'_0,0\right)$. С увеличением z^2 ($z^2 \to \infty$) величина этой окрестности $\delta = \max\left(\left|l' - l'_0\right|,\left|\widetilde{v}'\right|\right) \to 0$ [5,7], и для регулярной составляющей и корреляционной функции шумовой составляющей (12) справедливы асимптотические представления

$$\begin{gathered}
S\left(\widetilde{l}',\widetilde{v}'\right) = S_0 + S_1\left(\widetilde{l}'\right) + S_2\left(\widetilde{v}'\right) + o\left(\delta\right),\\
\left\langle N\left(\widetilde{l}'_1,\widetilde{v}'_1\right)N\left(\widetilde{l}'_2,\widetilde{v}'_2\right)\right\rangle = \left[R_1\left(\widetilde{l}'_1,\widetilde{l}'_2\right) + R_2\left(\widetilde{v}'_1,\widetilde{v}'_2\right)\right]\Big/\mu + o\left(\delta\right),
\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}
S_0 = l'_0 q\min\left(1,\left|\Delta v\right|\right), \quad S_1\left(\widetilde{l}'\right) = -q\min\left(1,\left|\Delta v\right|\right)\left|\widetilde{l}'\right|, \quad S_2\left(\widetilde{v}'\right) = -ql'_0\left|\widetilde{v}'\right|,\\
R_1\left(\widetilde{l}'_1,\widetilde{l}'_2\right) = \left[1 + \left(1+q\right)^2\right]\min\left(1,\left|\Delta v\right|\right)\min\left(\widetilde{l}'_1,\widetilde{l}'_2\right),\\
R_2\left(\widetilde{v}'_1,\widetilde{v}'_2\right) = l'_0\left[\min\left(1,\left|\widetilde{v}'_1 - \Delta v\right|\right) + \min\left(1,\left|\widetilde{v}'_2 - \Delta v\right|\right) - \left|\widetilde{v}'_2 - \widetilde{v}'_1\right|\right] + l'_0 q\left(2+q\right)\times\\
\times\left[1 + \min\left(0,\widetilde{v}'_1,\widetilde{v}'_2\right) - \max\left(0,\widetilde{v}'_1,\widetilde{v}'_2\right) + C_1\left(\Delta v\right) - C_3\left(0,\Delta v,\widetilde{v}'_1\right) - C_3\left(0,\Delta v,\widetilde{v}'_2\right)\right],
\end{gathered} \tag{15}$$

а $\widetilde{l}' = l' - l'_0$.

Следуя [8], перейдем от (8) к разностному функционалу

$$\Delta\left(\widetilde{l}',\widetilde{v}'\right) = \left[M\left(\widetilde{l}',\widetilde{v}'\right) - M_0\right]\Big/\sigma,$$

где $M_0 = M\left(0,0\right)$ — асимптотически (с ростом $\mu_{\min}$ (3)) гауссовская случайная величина с характеристиками $\left\langle M_0\right\rangle = S_0$, $\left\langle M_0^2\right\rangle = \sigma^2$, $\sigma^2 = l'_0\left[1 + \left(1+q\right)^2\right]\min\left(1,\left|\Delta v\right|\right)\Big/\mu$. При этом

$$\left(\widetilde{l}'_m,\widetilde{v}'_m\right) = \arg\sup\widetilde{M}\left(\widetilde{l}',\widetilde{v}'\right) = \arg\sup\Delta\left(\widetilde{l}',\widetilde{v}'\right). \tag{16}$$

Из (15), (16) следует, что первые два момента функционала $\Delta\left(\widetilde{l}',\widetilde{v}'\right)$ при $\delta \to 0$ определятся как

$$\begin{gathered}\left\langle \Delta\left(\widetilde{l}',\widetilde{v}'\right)\right\rangle = S_{\Delta 1}\left(\widetilde{l}'\right) + S_{\Delta 2}\left(\widetilde{v}'\right) + o\left(\delta\right), \\ \left\langle\left[\Delta\left(\widetilde{l}'_1,\widetilde{v}'_1\right) - \left\langle\Delta\left(\widetilde{l}'_1,\widetilde{v}'_1\right)\right\rangle\right]\left[\Delta\left(\widetilde{l}'_2,\widetilde{v}'_2\right) - \left\langle\Delta\left(\widetilde{l}'_2,\widetilde{v}'_2\right)\right\rangle\right]\right\rangle = \\ B_{\Delta 1}\left(\widetilde{l}'_1,\widetilde{l}'_2\right) + B_{\Delta 2}\left(\widetilde{v}'_1,\widetilde{v}'_2\right) + o\left(\delta\right)\ ,\end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered}S_{\Delta 1}\left(\widetilde{l}'\right) = -\frac{z\left|\widetilde{l}'\right|}{l'_0}, \quad S_{\Delta 2}\left(\widetilde{v}'\right) = -\frac{z\left|\widetilde{v}'\right|}{\min\left(1,\left|\Delta v\right|\right)}, \\ B_{\Delta 1}\left(\widetilde{l}'_1,\widetilde{l}'_2\right) = \frac{1}{l'_0}\begin{cases}\min\left(\left|\widetilde{l}'_1\right|,\left|\widetilde{l}'_2\right|\right)\ ,\ \widetilde{l}'_1\widetilde{l}'_2 \geqslant 0\ , \\ 0\ ,\ \widetilde{l}'_1\widetilde{l}'_2 < 0\ ,\end{cases} \\ B_{\Delta 2}\left(\widetilde{v}'_1,\widetilde{v}'_2\right) = \frac{1}{\min\left(1,\left|\Delta v\right|\right)}\begin{cases}\min\left(\left|\widetilde{v}'_1\right|,\left|\widetilde{v}'_2\right|\right)\ ,\ \widetilde{v}'_1\widetilde{v}'_2 \geqslant 0\ , \\ 0\ ,\ \widetilde{v}'_1\widetilde{v}'_2 < 0\ ,\end{cases}\end{gathered} \tag{18}$$

а z — ОСШ (13).

Введем в рассмотрение статистически независимые гауссовские случайные процессы $r_1\left(\widetilde{l}'\right)$, $r_2\left(\widetilde{v}'\right)$ со средними значениями (18) $\left\langle r_1\left(\widetilde{l}'\right)\right\rangle = S_{\Delta 1}\left(\widetilde{l}'\right)$, $\left\langle r_2\left(\widetilde{v}'\right)\right\rangle = S_{\Delta 2}\left(\widetilde{v}'\right)$ и корреляционными функциями (18)

$$\left\langle\ \left[\ r_1\left(\widetilde{l}'_1\right) - \left\langle r_1\left(\widetilde{l}'_1\right)\right\rangle\ \right]\ \left[\ r_1\left(\widetilde{l}'_2\right) - \left\langle r_1\left(\widetilde{l}'_2\right)\right\rangle\ \right]\ \right\rangle = B_{\Delta 1}\left(\widetilde{l}'_1,\widetilde{l}'_2\right),$$

$$\left\langle\left[\ r_2\left(\widetilde{v}'_1\right) - \left\langle r_2\left(\widetilde{v}'_1\right)\right\rangle\ \right]\left[\ r_2\left(\widetilde{v}'_2\right) - \left\langle r_2\left(\widetilde{v}'_2\right)\right\rangle\ \right]\right\rangle = B_{\Delta 2}\left(\widetilde{v}'_1,\widetilde{v}'_2\right).$$

При $z \to \infty$ (13), $\delta \to 0$ характеристики (20) функционала $\Delta\left(\widetilde{l}',v'\right)$ совпадают с соответствующими характеристиками суммы $r_1\left(\widetilde{l}'\right) + r_2\left(v'\right)$, так что $\Delta\left(\widetilde{l}',\widetilde{v}'\right) \underset{z\to\infty}{\longrightarrow} r_1\left(\widetilde{l}'\right) + r_2\left(\widetilde{v}'\right)$ по распределению. Следовательно, центрированные нормированные оценки $\widetilde{l}'_m = (\lambda_0 - \lambda_m)/T$, $\widetilde{v}'_m = (\vartheta_m - \vartheta_{02})/\Omega$ (19) с увеличением ОСШ z сходятся по распределению к соответствующим оценкам

$$\eta_{m1} = \underset{\widetilde{l}'\in[-\delta,\delta]}{\arg\max}\, r_1\left(\widetilde{l}'\right), \quad \eta_{m2} = \underset{\widetilde{v}'\in[-\delta,\delta]}{\arg\max}\, r_2\left(\widetilde{v}'\right),$$

а ОМП λ_m и Ω_m (6) сходятся по распределению к оценкам

$$T\left(l_0 - \eta_{m1}\right) \text{и} \quad \Omega\left(\eta_{m2} + v_{02}\right). \tag{19}$$

Из (15), (16) следует, что на интервалах $\widetilde{l}' \in [-\delta,\delta]$, $\widetilde{v}' \in [-\delta,\delta]$ процессы $r_1\left(\widetilde{l}'\right)$, $r_2\left(\widetilde{v}'\right)$ удовлетворяют условиям теоремы Дуба [7] и являются непрерывными гауссовскими марковскими процессами с коэффициентами сноса $a_{\eta 1}$, $a_{\eta 2}$ и диффузии $b_{\eta 1}$, $b_{\eta 2}$:

$$a_{\eta 1} = \frac{z}{l'_0}\begin{cases}1\ ,\ \widetilde{l}' \leqslant 0\ , \\ -1\ ,\ \widetilde{l}' > 0\ ,\end{cases} \qquad a_{\eta 2} = \frac{z}{\min\left(1,\left|\Delta v\right|\right)}\begin{cases}1\ ,\ \widetilde{v}' < 0\ , \\ -1\ ,\ \widetilde{v}' \geqslant 0\ ,\end{cases}$$

$$b_{\eta 1} = 1/l'_0, \quad b_{\eta 2} = 1/\min\left(1,\left|\Delta v\right|\right).$$

Аналитические выражения для статистических характеристик величины и положения наибольшего максимума марковского случайного процесса со скачкообразно изменяющимся коэффициентом сноса и постоянным коэффициентом диффузии найдены в [8,9]. Используя результаты [8,9], для плотностей вероятности $w_{\eta i}(\eta)$ случайных величин η_{mi}, $i = 1{,}2$ получаем

$$w_i(\eta) = \frac{2a_{\eta i}^2}{b_{\eta i}} \left\{ 3\exp\left(\frac{4a_{\eta i}^2|\eta|}{b_{\eta i}}\right)\left[1 - \Phi\left(3|a_{\eta i}|\sqrt{\frac{|\eta|}{b_{\eta i}}}\right)\right] + \Phi\left(|a_{\eta i}|\sqrt{\frac{|\eta|}{b_{\eta i}}}\right) - 1 \right\}. \tag{20}$$

Точность формулы (20) возрастает с увеличением $\mu_{\min}$ (3) и z (13).

Используя (20) нетрудно записать асимптотические выражения для условных смещений $b(\lambda_m|\lambda_0) = \langle\lambda_m - \lambda_0\rangle$, $b(\vartheta_m|\vartheta_{02}) = \langle\vartheta_m - \vartheta_{02}\rangle$ и рассеяний $V(\lambda_m|\lambda_0) = \left\langle(\lambda_m - \lambda_0)^2\right\rangle$, $V(\Omega_m|\Omega_{02}) = \left\langle(\Omega_m - \Omega_{02})^2\right\rangle$ оценок (5):

$$\begin{array}{ll} b(\lambda_m|\lambda_0) = -T\langle\eta_{m1}\rangle, & b(\vartheta_m|\vartheta_{02}) = \Omega\langle\eta_{m2}\rangle, \\ V(\lambda_m|\lambda_0) = T^2\left\langle\eta_{m1}^2\right\rangle, & V(\vartheta_m|\vartheta_{02}) = \Omega^2\left\langle\eta_{m2}^2\right\rangle, \end{array} \tag{21}$$

где

$$\begin{array}{ll} \langle\eta_{m1}\rangle = \int\limits_{l_0-\tilde\Lambda_2}^{l_0-\tilde\Lambda_1} \eta w_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta, & \left\langle\eta_{m1}^2\right\rangle = \int\limits_{l_0-\tilde\Lambda_2}^{l_0-\tilde\Lambda_1} \eta^2 w_1(\eta)\,\mathrm{d}\eta, \\ \langle\eta_{m2}\rangle = \int\limits_{\tilde\Theta_1-v_{02}}^{\tilde\Theta_2-v_{02}} \eta w_2(\eta)\,\mathrm{d}\eta, & \left\langle\eta_{m2}^2\right\rangle = \int\limits_{\tilde\Theta_1-v_{02}}^{\tilde\Theta_2-v_{02}} \eta^2 w_2(\eta)\,\mathrm{d}\eta. \end{array} \tag{22}$$

Точные значения интегралов (19) при фиксированных z могут быть найдены только с использованием численных методов. Однако при выполнении условия $z >> 1$, следуя [8,9], вместо (18), (19) можно предложить более простые асимптотические аппроксимации для смещений и рассеяний оценок (6). Действительно, в этом случае функция $w_i(\eta)$ существенно отлична от нуля в малой окрестности точки $\eta = 0$, так что без заметной потери в точности пределы интегрирования в (19) можно расширить до бесконечности. Тогда после выполнения соответствующих математических операций получаем

$$\begin{gathered} \langle\eta_{m1}\rangle = \langle\eta_{m2}\rangle = 0, \\ \left\langle\eta_{m1}^2\right\rangle = 13b_{\eta 1}^2/8a_{\eta 1}^4 = 13{l'_0}^2/8z^4, \quad \left\langle\eta_{m2}^2\right\rangle = 13b_{\eta 2}^2/8a_{\eta 2}^4 = 13\min^2(1,|\Delta v|)\Big/8z^4. \end{gathered} \tag{23}$$

Точность формул (23) возрастает с увеличением $\mu_{\min}$ (3) и z (13).

Из (13), (21), (23), в частности, следует, что характеристики оценки λ_m (6) асимптотически (с ростом z) не зависят от истинного значения момента разладки λ_0, но зависят от абсолютной разности центральных частот до и после разладки $|\vartheta_{01} - \vartheta_{02}|$. Действительно, с ростом величины $|\vartheta_{01} - \vartheta_{02}|$ в диапазоне $(0{,}\Omega]$ точность оценки λ_m (6) повышается. При $|\vartheta_{01} - \vartheta_{02}| > \Omega$ точность оценки λ_m (6) перестает зависеть от разности частот $|\vartheta_{01} - \vartheta_{02}|$. С другой стороны, характеристики оценки ϑ_m (6) асимптотически (с ростом z) не зависят от истинного значения центральной частоты после разладки ϑ_{02}, но зависят от момента разладки λ_0 (с уменьшением значения λ_0 точность оценки ϑ_m (6) увеличивается).

Отметим также, что при малых значениях z расчеты, выполняемые на основе (20) могут приводить к большой погрешности, поскольку формулы (20) в отличие от (21) не учитывают ограниченную протяженность априорных интервалов возможных значений неизвестных параметров λ_0, ϑ_{02}.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью определения погрешностей найденных приближенных формул для характеристик синтезированного алгоритма оценивания момента и величины разладки центральной частоты гауссовского случайного процесса выполнялось статистическое имитационное моделирование работы измерителя (6) на ЭВМ. В процессе моделирования на интервале $\widetilde{t} \in [0{,}1]$ (9) в дискретные моменты времени $\widetilde{t}_j = j\Delta\widetilde{t},\ j = \overline{0{,}int\left\{\,1/\Delta\widetilde{t}\right\}}$ для каждого значения $v_k = \widetilde{\Theta}_1 + (k+1/2)\,\Delta V,\ k = \overline{0{,}int\left\{\left(\widetilde{\Theta}_2 - \widetilde{\Theta}_1\right)\Big/\Delta V - 1\right\}}$ нормированной центральной частоты v (9) формировались отсчеты $\widetilde{y}_{jk} = y\left(T\widetilde{t}_j,\Omega v_k\right)\sqrt{T/N_0}$ (9), как описано в [8]. По сформированным отсчетам $\widetilde{y}_{jk}$, следуя [8], вычислялись отсчеты $M_{1nk} = M_1\left(n\Delta l{,}k\Delta V\right)$, $M_{2n} = M_1\left(n\Delta l{,}k_0\Delta V\right)$ случайных поля $M_1\left(l{,}v\right)$ и процесса $M_2\left(l\right)$ (9) на интервалах $\left[\,\widetilde{\Lambda}_1{,}\widetilde{\Lambda}_2\right]$, $\left[\,\widetilde{\Theta}_1{,}\widetilde{\Theta}_2\right]$. Здесь значение k_0 соответствует частоте v_{01}, так что $\widetilde{\Theta}_1 + k_0\Delta V = v_{01}$. Шаг дискретизации по переменной $\widetilde{t}$ выбирался равным $\Delta\widetilde{t} = 0{,}05/\mu_{\min}$, а по переменным l и v — равным $\Delta l = \Delta V = 0{,}01$. В результате относительная среднеквадратическая погрешность ступенчатой аппроксимации функционала $M\left(l{,}v\right)$ (8) на основе сформированных отсчетов, рассчитанная по методике [10], не превышала 10 %.

Нормированные ОМП $l_m = \lambda_m/T,\ v_m = \vartheta_m/\Omega$ (6) определялись по номерам $n_{\max}$, $k_{\max}$ наибольшего отсчета M_{nm} функционала (8) как $l_m = \widetilde{\Lambda}_1 + n_{\max}\Delta l$, $v_m = \widetilde{\Theta}_1 + k_{\max}\Delta v$. На основе ряда оценок, полученных в ходе обработки N реализаций случайного поля $M\left(l{,}v\right)$, рассчитаны значения выборочных смещений и рассеяний оценок l_m, v_m для заданного набора параметров l_0, v_{01}, v_{02}, q, μ.

На рис. 2, 3 представлены некоторые полученные в процессе статистического моделирования результаты, а также соответствующие им теоретические кривые. Для получения каждого экспериментального значения обрабатывалось не менее 10^4 реализаций $x\left(t\right)$ (4) при $\widetilde{\Lambda}_1 = 0{,}1$, $\widetilde{\Lambda}_2 = 0{,}9$, $\widetilde{\Theta}_1 = 8$, $\widetilde{\Theta}_2 = 12$, $v_{01} = 9$ (9). Это позволило обеспечить отклонение границ доверительных интервалов от экспериментальных данных не более чем на 15 % с вероятностью 0,9.

На рис. 2 нанесены теоретические зависимости нормированного условного рассеяния $V_l = V\left(\lambda_m|\,\lambda_0\right)/T^2$ оценки момента скачкообразного изменения ширины полосы частот λ_m (6) как функции нормированной величины q (10) спектральных плотностей (2). Сплошные линии рассчитаны по более точным формулам (18), (19), а штриховые линии — по асимптотической формуле (20). Кривые 1 построены для $v_{02} = 9{,}5$ ($|\Delta v| = 0{,}5$), $\mu = 100$, кривые 2 — $v_{02} = 10$ ($|\Delta v| = 1$), $\mu = 100$, кривые 3 — $v_{02} = 10$, $\mu = 200$. Соответствующие экспериментальные значения условного рассеяния момента разладки центральной частоты нанесены квадратиками, крестиками и ромбиками. При этом истинное значение параметра l_0 (10) принималось равным 0,5.

На рис. 3 сплошными и штриховыми линиями показаны аналогичные теоретические зависимости нормированного условного рассеяния $V_v = V\left(v_m|\,v_{02}\right)/\Omega^2$ оценки ширины полосы частот после разладки Ω_m (5) от параметра q, рассчитанные согласно (18), (19) и (20). Кривые 1 получены при $l_0 = 0{,}75$, $\mu = 100$, кривые 2 — $l_0 = 0{,}5$, $\mu = 100$, кривые 3 — $l_0 = 0{,}5$, $\mu = 200$. Соответствующие экспериментальные значения условного рассеяния центральной частоты после разладки нанесены квадратиками, крестиками и ромбиками. При этом истинное значение параметра v_{02} (10) принималось равным 10.

Из рис. 2, 3 следует, что полученные теоретические зависимости для рассеяний $V\left(\lambda_m|\,\lambda_0\right)$, $V\left(\vartheta_m|\,\vartheta_{02}\right)$ (18), (19) хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными, по крайней мере, при $\mu \geqslant 100$, $z > 0{,}9$, $\widetilde{\Lambda}_1 \geqslant 0{,}1$, $\widetilde{\Lambda}_2 \leqslant 0{,}9$. В условиях достаточно больших выходных ОСШ, когда $z > 2{,}5$ (13), для расчета рассеяний оценки момента и вели-

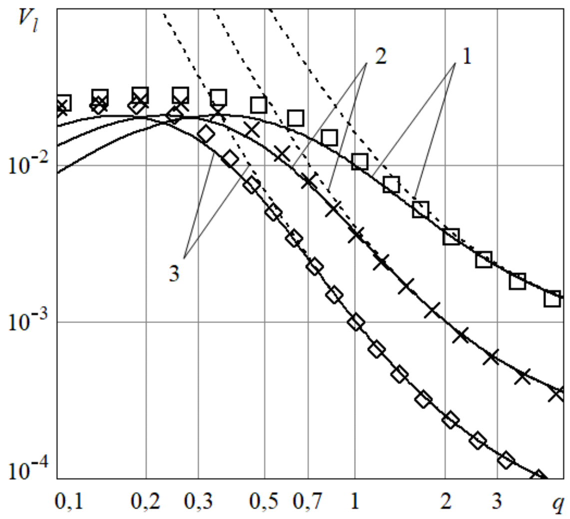

Рис. 2. *Зависимости нормированного рассеяния оценки момента скачкообразного изменения центральной частоты.*

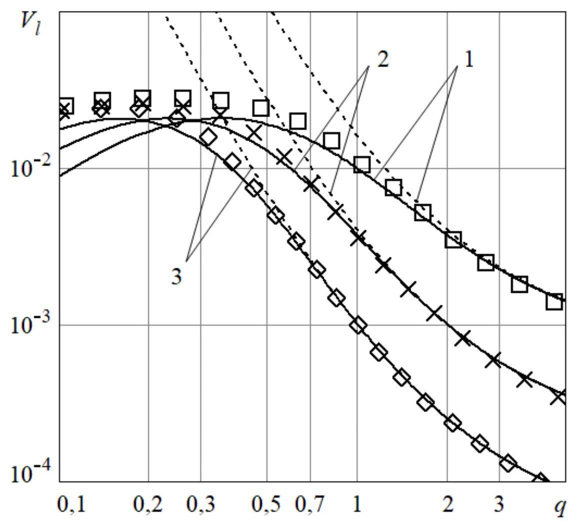

Рис. 3. *Зависимости нормированного рассеяния оценки центральной частоты после разладки.*

чины разладки центральной частоты случайного процесса можно использовать более простые аппроксимации (18), (20).

Как отмечено в [8], при весьма больших значениях q может наблюдаться расхождение теоретических, полученных с помощью (18), (19) или (18), (20), и экспериментальных значений рассеяний $V\left(\lambda_m|\,\lambda_0\right)$, $V\left(\vartheta_m|\,\vartheta_{02}\right)$. Это объясняется тем, что выводе формул (12) для характеристик функционала $M\left(l,v\right)$ (8) были опущены величины порядка времени корреляции процесса $\xi\left(t\right)$. Таким образом, когда значения рассеяния нормированных ОМП λ_m/T, ϑ_m/Ω оказываются сопоставимыми (или менее) с величинами порядка μ^{-2} (9), погрешность формул (18)-(20) может быть весьма значительной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для определения разладки быстрофлуктуирующего полосового гауссовского случайного процесса может быть эффективно использован метод максимального правдоподобия. Применение этого метода позволяет в пренебрежении величинами порядка времени корреляции анализируемого случайного процесса получить технически существенно более простой по сравнению с известными аналогами алгоритм измерения неизвестных момента разладки и скачкообразно меняющейся центральной частоты случайного процесса, С помощью аддтивной локально-марковской аппроксимации решающей статистики удается записать замкнутые аналитические выражения для характеристик эффективности максимально правдоподобного измерителя.

Методами статистического моделирования установлено, что полученные теоретические результаты хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными в широком диапазоне значений параметров реализации наблюдаемых данных. Как показывает дополнительный анализ, синтезированный на основе предложенного подхода измеритель без заметных потерь в качестве функционирования может использоваться также при приеме быстрофлуктуирующих негауссовских случайных процессов с неизвестным скачкообразным изменением центральной частоты в неизвестный момент времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обнаружение изменения свойств сигналов и динамических систем / Под ред. М. Бассвиль, А. Банвениста. — М. : Мир, 1989.

2. Detection and measurement of the unknown moment and magnitude of the Gaussian random process energy parameters abrupt change / O. V. Chernoyarov, B. Dobrucky, A. V. Salnikova, A. A. Makarov // International Review on Modelling and Simulations. — 2019. — V. 12, № 5. — P. 264–280.

3. Голпайегани, Л. А. Стохастические сигналы с неизвестными параметрами. Обнаружение и измерение разладки быстрофлуктуирующих случайных процессов в условиях априорной неопределенности / Л. А. Голпайегани, К. С. Калашников, А. В. Сальникова. — М. : Lap Lambert Academic Publishing, 2019.

4. Измерение момента и величины разладки ширины полосы частот гауссовского процесса / Л. А. Голпайегани, К. С. Калашников, А. Н. Фаульгабер, М. М. Шахморадиан // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 2. — С. 20–30.

5. Трифонов, А. П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А. П. Трифонов, Е. П. Нечаев, В. И. Парфенов. — Воронеж : ВГУ, 1991.

6. Chernoyarov, O. V. The decision statistics of the Gaussian signal against correlated Gaussian interferences / O. V. Chernoyarov, M. M. Shahmoradian, K. S. Kalashnikov // Proceeding of the 2016 International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences and Engineering (MCSEE2016), Shenzhen, China, October 30–31, 2016, pp. 426–431.

7. Трифонов, А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М. : Радио и связь, 1986.

8. Application of the local Markov approximation method for the analysis of information processes processing algorithms with unknown discontinuous parameters / O. V. Chernoyarov et. al. // Applied Mathematical Sciences. — 2014. – V. 8, № 90. — P. 4469–4496.

9. Трифонов, А. П. Статистические свойства высоты и положения абсолютного максимума марковского случайного процесса типа Башелье / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, М. Б. Беспалова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 54–65.

10. Захаров, А. В. Обнаружение скачкообразного случайного возмущения / А. В. Захаров, А. П. Трифонов, Е. В. Проняев // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2001. — № 6. — С. 29–37.

REFERENCES

1. Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems. Edited by M. Basseville, A. Benveniste. [Obnaruzhenie izmeneniya svoyjstv signalov i dinamicheskix sistem. Pod red. M. Bassvil', A. Banvenista]. Moscow, 1989.

2. Chernoyarov O.V., Dobrucky B., Salnikova A.V., Makarov A.A. Detection and measurement of the unknown moment and magnitude of the Gaussian random process energy parameters abrupt change. International Review on Modelling and Simulations, 2019, vol. 12, no. 5, pp. 264–280.

3. Golpaiegani L.A., Kalashnikov K.S., Salnikova A.V. Stochastic signals with unknown parameters. Detection and measurement of the abrupt change of the fast-fluctuating random processes under conditions of a priori uncertainty. [Golpaiegani L.A., Kalashnikov K.S., Salnikova A.V. Stohasticheskie signaly s neizvestnymi parametrami. Obnaruzhenie i izmerenie razladki bystrofluktuiruyuschih sluchainyh protsessov v usloviyah apriornoi neporedelennosti]. Moscow: Lap Lambert Academic Publishing, 2019.

4. Golpaiegani L.A., Kalashnikov K.S., Faulgaber A.N., Shahmoradian M.M. Measurement of the moment and the magnitude of the bandwidth of a Gaussian process. [Golpaiegani L.A.,

Kalashnikov K.S., Faulgaber A.N., Shahmoradian M.M. Izmerenie momenta i velichiny razladki shiriny polosy chastot gaussovskogo protsessa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 2, pp. 20–30.

5. Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Detection of stochastic signals with unknown parameters. [Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Obnaruzhenie stokhasticheskih signalov s neizvestnymi parametrami]. Voronezh: Voronezh State University, 1991. 6. Chernoyarov O.V., Shahmoradian M.M., Kalashnikov K.S. The decision statistics of the Gaussian signal against correlated Gaussian interferences. Proceeding of the 2016 International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences and Engineering (MCSEE2016), Shenzhen, China, October 30–31, 2016, pp. 426–431.

7. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Joint discrimination of signals and estimation of their parameters against background. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i otsenka ikh parametrov na fone pomekh]. Moscow, 1986.

8. Chernoyarov O.V., Sai Si Thu Min, Salnikova A.V., Shakhtarin B.I., Artemenko A.A. Application of the local Markov approximation method for the analysis of information processes processing algorithms with unknown discontinuous parameters. Applied Mathematical Sciences, 2014, vol. 8, no. 90, pp. 4469–4496.

9. Trifonov A.P., Korchagin Y.E., Bespalova M.B. Statistical properties of height and provisions of absolute maximum Markov processes Bachelier type. [Trifonov A.P., Korchagin Y.E., Bespalova M.B. Statisticheskie svoistva vysoty i polozheniya absolyutnogo maksimuma markovskogo sluchainogo protsessa tipa Bashel'e]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 54–65.

10. Zakharov A.V., Trifonov A.P., Pronyaev E.V. Detection of step random disturbance. [Zakharov A.V., Trifonov A.P., Pronyaev E.V. Obnaruzhenie skachkoobraznogo sluchainogo vozmuscheniya]. *Izvestiya Akademii Nauk. Teoriya i Sistemy Upravleniya — Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2001, no. 6, pp. 29–37.

Шахморадиан Махди Мохммадджафар, аспирант кафедры электроники и наноэлектроники Национального исследовательского университета “МЭИ”, Москва, Российская Федерация
E-mail: mehdi_shahmoradian@yahoo.com
Тел.: +7(495)362–71–68

Shahmoradian Mahdi Mohammadjafar, postgraduate student of the Department of Electronics and Nanoelectronics of the National Research University “MPEI”, Moscow, Russian Federation
E-mail: mehdi_shahmoradian@yahoo.com
Tel.: +7(495)362–71–68

Макаров Александр Андреевич, аспирант кафедры электроники и наноэлектроники Национального исследовательского университета “МЭИ”, Москва, Российская Федерация
E-mail: al.an.makarov@gmail.com
Тел.: +7(495)362–71–68

Makarov Alexander Andreevich, postgraduate student of the Department of Electronics and Nanoelectronics of the National Research University “MPEI”, Moscow, Russian Federation
E-mail: al.an.makarov@gmail.com
Tel.: +7(495)362–71–68

Кенесова Аида Абатовна, студент кафедры компьютерных систем и сетей Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
E-mail: aidakenesova2@gmail.com
Тел.: +7(499)261–03–90

Талапкалиева Зарина Сериккаликызы, студент кафедры компьютерных систем и сетей Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана, Москва, Российская Федерация
E-mail: zaya11104@gmail.com
Тел.: +7(499)261–03–90

Kenesova Aida Abatovna, student of the Department of Computer Systems and Networks of the Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
E-mail: aidakenesova2@gmail.com
Tel.: +7(499)261–03–90

Talapkalieva Zarina Serikkalikyzy, student of the Department of Computer Systems and Networks of the Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russian Federation
E-mail: zaya11104@gmail.com
Tel.: +7(499)261–03–90