УДК 517.958+519.21+519.872+004.7

ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ТИПА ТАКАЧА С ОПЕРАТОРОМ ФОККЕРА—ПЛАНКА

Е. С. Фролова[1]; Т. А. Жук[2]; Н. И. Головко[3]

[1] — *Морской государственный университет им. Г. И. Невельского;*
[2] — *Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет;*
[3] — *Дальневосточный федеральный университет*

Поступила в редакцию 21.04.2019 г.

Аннотация. В настоящей работе строится математическая модель системы массового обслуживания (СМО) в виде уравнений относительно нестационарных и стационарных характеристик незавершенной работы в СМО. Рассматривается СМО с бесконечной емкостью накопителя, одним обслуживающим прибором, произвольным обслуживанием. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок с диффузионной интенсивностью с упругими границами. Диффузионный процесс имеет ненулевой коэффициент сноса и коэффициент диффузии. В теореме 1 приводится вывод уравнения для нестационарного распределения незавершенной работы СМО в нестационарном режиме. Получены начальные и краевые условия, уравнения для внутренних и граничных точек. В теореме 2 приводится вывод уравнения для стационарного распределения незавершенной работы СМО в стационарном режиме. Получены краевые условия.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения типа Такача, дифференциальный оператор Фоккера — Планка, дважды стохастический пуассоновский поток, диффузионный процесс, система массового обслуживания, вероятностные характеристики незавершенной работы.

DERIVATION OF THE TAKACS TYPE EQUATIONS WITH FOKKER — PLANCK OPERATOR

E. S. Frolova, T. A. Zhuk, N. I. Golovko

Abstract. In this paper we construct a mathematical model of Queuing systems (QS) in the form of a equations with respect to non-stationary and stationary characteristics of unfinished work (work in progress) in QS. QS with infinite storage capacity, one servicing device, arbitrary service with any distribution function is considered. A doubly stochastic Poisson input flow of applications with diffusion intensity with elastic boundaries enters the QS. The diffusion process has a nonzero drift coefficient and a diffusion coefficient. Theorem 1 provides the derivation of the equation for the non-stationary distribution of the unfinished work in the non-stationary mode. Initial and boundary conditions, equations for internal and boundary points are obtained. Theorem 2 presents the derivation of the equation for the stationary distribution of the unfinished work in the stationary mode. Boundary conditions are obtained.

Keywords: Takacs type differential equations, Fokker — Planck differential operator, double stochastic Poisson flow, diffusion process, Queuing system, probabilistic characteristics of the unfinished work.

ВВЕДЕНИЕ

В качестве аналитических моделей информационных сетей в целом и отдельных их элементов использованы сети и системы массового обслуживания во многих работах, например в [1], [2]. В [3] показано, что в силу специфики потока сообщений на узлах локальных и глобальных компьютерных сетей моделями web-узлов в сети Интернет являются СМО с диффузионной интенсивностью входного потока.

Диффузионные процессы в системах массового обслуживания исследуются во многих работах. Непрерывные диффузионные модели массового обслуживания и методика расчета их характеристик исследовались в [4]. В [4] предлагается методика расчета характеристик стохастических сетей на основе новых диффузионных моделей массового обслуживания. Рассмотрены системы массового обслуживания с бесконечной очередью, с конечной очередью и потерями, с переменными параметрами поступления и обслуживания заявок.

В [5] рассматривается система массового обслуживания конечной емкости с приоритетными классами. Разрабатывается стабильная модель G/G/m/N с произвольным распределением входного потока, сервисного времени и параллельными серверами. С применением уточненного метода диффузионной аппроксимации с элементарной отражающей границей, установлены приближенные формулы для числа клиентов в системе, вероятности задержки и средней длины очереди.

В данной работе строится математическая модель СМО с диффузионной интенсивностью входного потока в виде уравнений относительно нестационарных и стационарных характеристик незавершенной работы.

Рассмотрим СМО с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором. Время обслуживания заявок η является случайной величиной с функцией распределения $B(x)$. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого $\lambda(t)$ представляет собой диффузионный процесс с ненулевым коэффициентом сноса $a \neq 0$ и коэффициентом диффузии $b > 0$. Случайный процесс $\lambda(t)$ принимает значения на промежутке $[\alpha,\beta]$ с упругими границами [6].

Введем следующие обозначения: $\lambda(t)$ — интенсивность входного потока в нестационарном режиме, λ — в стационарном; $Q_k(t,x) = \mathsf{P}\{\nu(t) = k, x \leqslant \lambda(t) < x + dx\}/dx$, $\nu(t)$ — число заявок в СМО в момент t; $q_k(x) = \mathsf{P}\{\nu = k, x \leqslant \lambda < x + dx\}/dx$, ν — число заявок в СМО в стационарном режиме; $Q_k(t,x)$, $q_k(x)$ — нестационарные и стационарные характеристики числа заявок, соответственно, $k \geqslant 0$; $f(t,x) = \mathsf{P}\{x \leqslant \lambda(t) < x + dx\}/dx$ — нестационарная плотность интенсивности входного потока $\lambda(t)$; $f(x) = \mathsf{P}\{x \leqslant \lambda < x + dx\}/dx$ — стационарная плотность λ, $x \in [\alpha,\beta]$.

Заметим, что интегралы $\int_a^b Q_k(t,x)dx = P_k(t)$, $\int_a^b q_k(x)dx = p_k$, $k \geqslant 0$, представляют собой нестационарное и стационарное распределение числа заявок, соответственно.

Обозначим через $U(t)$ незавершенную работу системы в момент времени t. *Незавершенной работой* $U(t)$ называется остаточное время, необходимое для освобождения системы от находящихся в ней в момент времени t требований [7]. Каждая новая заявка приносит собой будущее время η работы обслуживающего прибора и увеличивает незавершенную работу. Незавершенная работа измеряется в единицах времени.

Реализации случайного процесса $U(t)$ представляют собой следующие непрерывные ломаные. В момент прихода очередной заявки ломаная совершает вертикальный скачок на случайную величину η с функцией распределения $B(x)$. Между моментами прихода заявок ломаная убывает под углом 45 градусов. В моменты простоя, то есть отсутствия заявок, ломаная лежит на оси абсцисс. В момент прихода очередной заявки незавершенная работа равна времени ожидания начала обслуживания пришедшей заявки.

Обычно в литературе, например в [7], для удобства теоретических исследований нестационарная функция распределения незавершенной работы вводится как функция непрерывная справа в точках разрыва: $\mathrm{H}(\omega,t) = \mathsf{P}\{U(t) \leqslant \omega\}$ в силу того, что в точке $\omega = 0$ эта функция имеет разрыв с нулевого на положительное значение $P_0(t)$. Поступим аналогично. Обозначим для стационарного режима через $\mathrm{h}(\omega) = \mathsf{P}\{U \leqslant \omega\}$ стационарную функцию распределения незавершенной работы U, через $\mathrm{H}(\omega,t,x) = \mathsf{P}\{U(t) \leqslant \omega, x \leqslant \lambda(t) < x + \Delta x\}/\Delta x + O(\Delta x)$ — совместное нестационарное распределение незавершенной работы $U(t)$ и интенсивности входного потока $\lambda(t)$, через $\mathrm{h}(\omega,x) = \mathsf{P}\{U \leqslant \omega, x \leqslant \lambda < x + \Delta x\}/\Delta x + O(\Delta x)$ — совместное стационарное распределение незавершенной работы U и интенсивности входного потока λ.

Введем обозначения:

$$\mathrm{H}_+(\omega,t,x) = \mathrm{H}(\omega,t,x), \mathrm{h}_+(\omega,x) = \mathrm{h}(\omega,x), \omega > 0,$$

$$0^+ = \lim \omega, \omega \to 0,\omega > 0, 0^- = \lim \omega,\omega \to 0,\omega < 0.$$

Заметим, что вероятность отсутствия заявок в нестационарном режиме в рассматриваемой СМО, то есть вероятность простоя СМО, равна $\mathrm{H}(0^+,t) = P_0(t) = \int_a^b Q_0(t,x)\,dx$. Соответственно $\mathrm{H}(0^+,t,x) = Q_0(t,x)$. Аналогичные рассуждения дают: $\mathrm{h}(0^+) = p_0 = \int_a^b q_0(x)\,dx$, $\mathrm{h}(0^+,x) = q_0(x)$.

Согласно определению нестационарное и стационарное совместные распределения незавершенной работы и интенсивности входного потока имеют вид

$$\mathbf{H}(\omega,t,x) = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \quad ; \\ 0, & \omega = 0^- \quad ; \\ Q_0(t,x), & \omega = 0^+ \quad ; \\ \mathbf{H}_+(\omega,t,x), & \omega > 0 \quad ; \end{cases} \quad \mathbf{h}(\omega,x) = \begin{cases} 0, & \omega < 0 \quad ; \\ 0, & \omega = 0^- \quad ; \\ q_0(x), & \omega = 0^+ \quad ; \\ \mathbf{h}_+(\omega,x), & \omega > 0 \quad . \end{cases}$$

Будем рассматривать в пространстве кусочно-непрерывных функций функции $\mathrm{H}(\omega,t)$, $\mathrm{h}(\omega)$, $\mathrm{H}(\omega,t,x)$, $\mathrm{h}(\omega,x)$, а также их частные производные по t,ω, по x первого и второго порядков в области $t \geqslant 0,\omega > 0$, $x \in (\alpha,\beta)$.

Полагаем, что функции $f(t,x)$, $Q_k(t,x)$ принадлежат пространству непрерывно дифференцируемых функций $\mathcal{L}_1$, функции $f(x)$, $q_k(x)$ — пространству непрерывно дифференцируемых функций $\mathcal{L}_2 = C^2(\overline{\Omega})$, $\Omega = (\alpha,\beta)$. Функции в $\mathcal{L}_1$ являются непрерывными и ограниченными при $\{t \geqslant 0,\ x \in [\alpha,\beta]\}$, непрерывными и ограниченными являются их частные производные по t, по x первого и второго порядков при $\{t \geqslant 0,\ x \in (\alpha,\beta)\}$.

Будем считать для указанных функций частные производные первого порядка непрерывно продолжаемыми при $x \to \alpha, x \to \beta$. Функцию $B(x),x \in [\alpha,\beta]$, считаем интегрируемой по Лейбницу. В дальнейшем будем использовать данные функции и их частные производные, повторно не оговаривая указанные свойства.

Для СМО, аналогичной рассматриваемой, но с постоянной интенсивностью входного потока λ, нестационарная функция распределения незавершенной работы $\mathrm{H}(\omega,t)$ удовлетворяет нестационарному уравнению Такача, стационарная функция распределения незавершенной работы $\mathrm{h}(\omega)$ удовлетворяет стационарному уравнению Такача [7].

Нестационарное уравнение Такача получено с применением динамики Колмогорова или так называемого Δt-метода [7]. В литературе “динамикой Колмогорова” называют динамику вывода интегро-дифференциальных уравнений для СМО с марковскими свойствами процессов входного потока и обслуживания. Например, в [7] “динамика Колмогорова – Чепмена” используется для вывода уравнений относительно характеристик числа заявок в СМО с простейшим пуассоновским потоком и экспоненциальным обслуживанием. В [7] динамика Колмогорова применяется для вывода уравнения Такача в нестационарном режиме.

Нестационарное уравнение Такача имеет вид:

$$\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t)}{\partial t} = -\lambda \mathrm{H}(\omega,t) + \lambda \int_0^\omega B(\omega - s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t)}{\partial s}ds + \frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t)}{\partial \omega},\omega > 0, \tag{0.1}$$

с начальным условием: $\mathrm{H}(\omega,0) = \xi(\omega)$, с односторонним краевым условием по $\omega : \mathrm{H}(0^{+},t) = P_0(t)$, $\xi(\omega)$ — заданная функция распределения.

Стационарное уравнение Такача имеет вид:

$$-\lambda \mathrm{h}(\omega) + \lambda \int_0^{\omega} B(\omega - s)\frac{\partial \mathrm{h}(s)}{\partial s} ds + \frac{\partial \mathrm{h}(\omega)}{\partial \omega} = 0,\omega > 0, \tag{0.2}$$

с односторонним краевым условием по $\omega : \mathrm{h}(0^{+}) = p_0$.

Обозначим условную функцию распределения $\lambda(t)$:

$$R(t,x;\tau,y) = \mathsf{P}\{\lambda(\tau) < y|\lambda(t) = x\}, t < \tau,$$

а также условную плотность распределения $\lambda(t)$:

$$r(t,x;\tau,y) = \frac{\partial R(t,x;\tau,y)}{\partial y}.$$

Условная плотность распределения $r(t,x;\tau,y)$ удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\frac{\partial r(t,x;\tau,y)}{\partial \tau} = \frac{b}{2}\frac{\partial^2 r(t,x;\tau,y)}{\partial y^2} - a\frac{\partial r(t,x;\tau,y)}{\partial y},$$

которое также называют уравнением Фоккера — Планка, а условная функция распределения $R(t,x;\tau,y)$ — обратному уравнению Колмогорова [6]. В [6] приведен вывод данных уравнений с помощью интегрального метода Колмогорова. В [8],[9] приводится вывод прямого уравнения Колмогорова (уравнения Фоккера – Планка) с применением аппроксимации диффузионного процесса ступенчатым полумарковским процессом с помощью Δt-метода. В [6],[9] приведена классификация границ диффузионного процесса, в частности: эластичных, поглощающих, отражающих и упругих.

Границы r_i называются эластичными [6], если они удовлетворяют условию

$$p_i f(t,r_i) + (-1)^i(1 - p_i)\frac{\partial f(t,r_i)}{\partial x} = 0,i = 1,2.$$

Действие эластичной границы состоит в следующем: если диффузионный процесс достигает границы r_i, то с вероятностью p_i он поглощается и далее не изменяется, а с вероятностью $1 - p_i$ отражается от границы. При $p_i = 0$ граница называется отражающей, а при $p_i = 1$ — поглощающей.

Границы r_i называются упругими [9] если они удовлетворяют условию

$$Cf(t,r_i) + \frac{\partial f(t,r_i)}{\partial x} = 0,i = 1,2, C = C(s_1,s_2), \tag{0.3}$$

где C — заданная константа, s_i — заданные вероятности. Действие упругой границы состоит в следующем: если диффузионный процесс достигает границы r_i, то с вероятностью s_i он отражается от границы, а с вероятностью $1 - s_i$ остается (временно) на границе.

В [10] приведен вывод нестационарного и стационарного уравнений типа Такача относительно характеристик незавершенной работы для СМО с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором с произвольным обслуживанием, дважды стохастическим входным потоком заявок со скачкообразной интенсивностью входного потока.

В [11] приведен вывод уравнений относительно $f(t,x),Q_l(t,x),q_l(x)$ с помощью Δt-метода для СМО, аналогичной рассматриваемой в данной работе, с диффузионной интенсивностью входного потока $\lambda(t)$ с нулевым коэффициентом сноса $a = 0$.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной работе приводится вывод уравнений для нестационарного $\mathrm{H}(\omega,t,x)$ и стационарного $\mathrm{h}(\omega,x)$ распределений незавершенной работы СМО с диффузионной интенсивностью входного потока с ненулевым коэффициентом сноса $a \neq 0$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ дифференциальный оператор уравнения Фоккера — Планка, или для краткости — дифференциальный оператор Фоккера — Планка:

$$\mathcal{A}\mathrm{H}(\omega,t,x) = \frac{b}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{H}(\omega,t,x)}{\partial x^2} - a\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x)}{\partial x},$$

$$\mathcal{A}\mathrm{h}(\omega,x) = \frac{b}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{h}(\omega,x)}{\partial x^2} - a\frac{\partial \mathrm{h}(\omega,x)}{\partial x},$$

одинаково действующий на нестационарное $\mathrm{H}(\omega,t,x)$ и стационарное $\mathrm{h}(\omega,x)$ совместные распределения незавершенной работы U и интенсивности входного потока λ.

Уравнения для нестационарного распределения $\mathrm{H}(\omega,t,x)$ приводятся в следующей теореме.

Теорема 1. *Нестационарное распределение* $\mathrm{H}(\omega,t,x)$ *незавершенной работы* $U(t)$ *удовлетворяет:*

1) *нестационарному интегро-дифференциальному уравнению типа Такача с дифференциальным оператором Фоккера — Планка:*

$$\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x)}{\partial t} = -x\mathrm{H}(\omega,t,x) + x\int_0^{\omega} B(\omega-s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x)}{\partial s}ds+$$
$$+\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x)}{\partial \omega} + \frac{b}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{H}(\omega,t,x)}{\partial^2 x} - a\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x)}{\partial x}, \omega > 0, x \in (\alpha,\beta), \tag{0.4}$$

2) *начальному условию:* $\mathrm{H}(\omega,0,x) = \xi(\omega,x)$, где $\xi(\omega,x)$ — заданная функция, $\int_\alpha^\beta \xi(\omega,x)dx$ — функция распределения,

3) *одностороннему краевому условию по* ω :

$$\mathrm{H}(0^+,t,x) = Q_0(t,x), \tag{0.5}$$

4) *краевым условиям по* x*:*

$$\frac{b}{2}\cdot\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,\alpha)}{\partial x} - a\mathrm{H}(\omega,t,\alpha) = 0, \tag{0.6}$$

$$\frac{b}{2}\cdot\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,\beta)}{\partial x} - a\mathrm{H}(\omega,t,\beta) = 0, \tag{0.7}$$

5) *условию нормировки:*

$$\mathrm{H}(\infty,t,x) = f(t,x). \tag{0.8}$$

Доказательство. Для вывода уравнения (0.4) воспользуемся динамикой Колмогорова вывода уравнения Такача [7] и уравнений относительно характеристик числа заявок в рассматриваемой СМО [11].

Рассмотрим полумарковский процесс $\lambda_{nм}(t)$, аппроксимирующий диффузионный процесс $\lambda(t)$. Дискретное пространство состояний $\lambda_{nм}(t)$ задается однородной марковской цепью $\lambda_n, n \geqslant 1$, со значениями на равномерной сетке: $\{\alpha = x_0 < x_1 < \cdots x_m = \beta, x_{i+1} - x_i = \Delta x = dx \neq 0{,}0 \leqslant i \leqslant m-1\}$.

Изменения процесса $\lambda_{nм}(t)$ происходят через интервалы времени Δt :

$$\Delta t = \Delta^2 x/b \tag{0.9}$$

в моменты времени $t_n, n \geqslant 1$, где $b > 0$ — коэффициент диффузии диффузионного процесса $\lambda(t)$. Полумарковский скачкообразный процесс $\lambda_{n\mathcal{M}}(t)$ доопределим в точках разрыва непрерывным справа. Однородная марковская цепь $\lambda_n = \lambda_{n\mathcal{M}}(t_n + 0^+)$, $n \geqslant 1$, представляет собой вложенную марковскую цепь с дискретным временем.

Вероятности переходов $p_{ij} = \mathsf{P}\{\lambda_{n+1} = x_j | \lambda_n = x_i\}$ однородной марковской цепи λ_n определим следующим образом:

$$p_{ij} = P\{\lambda_{n+1} = x_j | \lambda_n = x_i\} = \frac{1}{2} - p\Delta x, \; j = i - 1, \; 1 \leqslant i \leqslant m;$$

$$p_{ij} = \frac{1}{2} + p\Delta x, \; j = i + 1, \; 0 \leqslant i \leqslant m - 1;$$

$$p_{00} = \frac{1}{2} - p\Delta x; \quad p_{mm} = \frac{1}{2} + p\Delta x, p \neq 0.$$

В остальных случаях вероятности переходов p_{ij} равны нулю. На рис. 1 стрелками показаны переходы марковской цепи λ_n с ненулевыми вероятностями, вероятности переходов подписаны над и под стрелками.

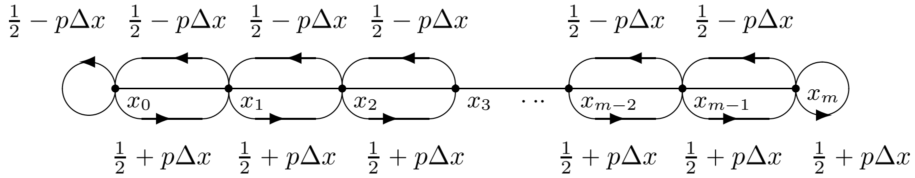

Рисунок 1. Вероятности переходов

В результате предельного перехода при $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, полумарковская цепь $\lambda_{n\mathcal{M}}(t)$ переходит в диффузионный процесс $\lambda(t)$ с ненулевым коэффициентом сноса $a \neq 0$ и коэффициентом диффузии $b > 0$ [8],[9].

Действительно, согласно определению диффузионный процесс это непрерывный марковский процесс с независимыми приращениями 2-го порядка (с ненулевым моментом приращения 2-го порядка и нулевыми моментами приращения старшего порядка) [6]. Вычисляя моменты приращения для полумарковской цепи $\lambda_{n\mathcal{M}}(t)$ [6], получим:

1) момент приращения 1-го порядка

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x|<\varepsilon} (y - x) \, F\,(t,x; t + \Delta t, y) \, dy =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \left(-\Delta x \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x \Big) + \Delta x \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x \Big) \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} 2p\Delta^2 x =$$

$$= 2p \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta^2 x}{\Delta t} = 2pb,$$

равен коэффициенту сноса диффузионного процесса $\lambda(t)$.

Следовательно, $a = 2pb$ или

$$p = \frac{a}{2b}. \tag{0.10}$$

2) Момент приращения 2-го порядка

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{|y-x|<\varepsilon} (y - x)^2 \, F\,(t,x; t + \Delta t, y) \, dy =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left((-\Delta x)^2\Big(\frac{1}{2}-p\Delta x\Big)+(\Delta x)^2\Big(\frac{1}{2}+p\Delta x\Big)\right)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta^2 x}{\Delta t}=b,$$

равен коэффициенту диффузии диффузионного процесса $\lambda(t)$.

3) Момент приращения k-го порядка полумарковской цепи $\lambda_{п\mathcal{M}}(t)$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{|y-x|<\varepsilon}(y-x)^k\,F\,(t,x;t+\Delta t,y)\,dy=$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{b}{\Delta^2 x}\left((-\Delta x)^k\Big(\frac{1}{2}-p\Delta x\Big)+(\Delta x)^k\Big(\frac{1}{2}+p\Delta x\Big)\right)=0,k\geqslant 3,$$

равен моменту приращения k-го порядка диффузионного процесса $\lambda(t)$, $k\geqslant 3$.

Аппроксимация диффузионного процесса $\lambda(t)$ полумарковской цепью $\lambda_{п\mathcal{M}}(t)$ рассматривается также в работах [8],[9],[11]. В дальнейшем при выводе уравнений будем наблюдать следующие марковские процессы в моменты времени t_n : вложенную однородную марковскую цепь λ_n с дискретным временем, входной дважды стохастический пуассоновский поток заявок с диффузионной интенсивностью, незавершенную работу $U(t_n)$.

Рассмотрим вывод уравнения (0.4). Пусть $t=t_n$.

Так как $\lambda_{п\mathcal{M}}(t)$ аппроксимирует диффузионный процесс $\lambda(t)$, то в дальнейшем вместо интенсивности $\lambda(t)$ будем использовать полумарковский процесс $\lambda_{п\mathcal{M}}(t)$. Рассмотрим временной интервал $(t,t+\Delta t)$. Пусть в момент времени $t+\Delta t$ выполняется $\lambda_{п\mathcal{M}}(t+\Delta t)=x=x_i,1\leqslant i\leqslant m-1$, то есть выполняется $x\leqslant\lambda_{п\mathcal{M}}(t+\Delta t)<x+dx$, $x\in(\alpha,\beta)$.

Рассмотрим событие

$$A=\Big\{U(t+\Delta t)\leqslant\omega, x\leqslant\lambda_{п\mathcal{M}}(t+\Delta t)<x+dx\Big\} \tag{0.11}$$

и вероятность этого события $\mathsf{P}(A)=\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x)dx$. Найдем связь значения функции $\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x)$ с ее возможным значением в момент времени $t=t_n$, то есть рассмотрим попадание СМО в состояние A из всевозможных других состояний.

Изменение состояний СМО на промежутке времени $(t,t+\Delta t)$ возможно за счет изменения процесса $\lambda_{п\mathcal{M}}(t)$, появления и обслуживания заявок, изменения процесса $U(t)$.

Введем события $B_l,1\leqslant l\leqslant 3$, заключающиеся в том, что на промежутке времени $(t,t+\Delta t)$ процесс $\lambda_{п\mathcal{M}}(t)$ может изменить свое значение на значение x_i с указанного ниже значения:

1) $B_1=\Big\{$со значения $y_1=x_{i-1}\Big\}, \mathsf{P}(B_1)=1/2+p\Delta x$,

2) $B_2=\Big\{$со значения $y_2=x_{i+1}\Big\}, \mathsf{P}(B_2)=1/2-p\Delta x$,

3) $B_3=\Big\{$со значения $y_3=x_j\Big\}, 0\leqslant j\leqslant m, j\neq i-1, j\neq i+1, \mathsf{P}(B_3)=0$.

На промежутке времени $(t,t+\Delta t)$ может появиться следующее число заявок:

1) $C_1=\Big\{$не поступило ни одной заявки $\Big\}, \mathsf{P}(C_1|B_l)=1-y_l\Delta t+o(\Delta t)$,

2) $C_2=\Big\{$поступила одна заявка $\Big\}, \mathsf{P}(C_2|B_l)=y_l\Delta t+o(\Delta t)$,

3) $C_3=\Big\{$поступило более одной заявки $\Big\}, \mathsf{P}(C_3|B_l)=o(\Delta t)$,

где вероятности указаны для значений $l:1\leqslant l\leqslant 3$.

Рассмотрим на промежутке времени $(t,t+\Delta t)$ различные изменения процесса $U(t)$. Появление события A возможно в следующих случаях.

1. В систему за промежуток времени $(t,t+\Delta t)$ не поступило ни одной заявки, то есть незавершенная работа не совершала скачка. В этом случае $U(t+\Delta t)=U(t)-\Delta t$ и для условной вероятности состояния СМО имеем

$$\mathsf{P}\Big\{A|C_1B_l\Big\}=\mathsf{P}\Big\{U(t+\Delta t)\leqslant\omega, x\leqslant\lambda_{п\mathcal{M}}(t+\Delta t)<x+dx|C_1B_l\Big\}=$$

$$= \mathsf{P}\Big\{U(t) - \Delta t \leqslant \omega, x \leqslant \lambda_{n\text{м}}(t+\Delta t) < x + dx | B_l\Big\} =$$

$$= \mathsf{P}\Big\{U(t) \leqslant \omega + \Delta t, x \leqslant \lambda_{n\text{м}}(t+\Delta t) < x + dx | B_l\Big\} =$$

$$= \mathsf{P}\Big\{U(t) \leqslant \omega + \Delta t, y_l \leqslant \lambda_{n\text{м}}(t) < y_l + dx\Big\} =$$

$$= \mathrm{H}(\omega + \Delta t, t, y_l) dx, 1 \leqslant l \leqslant 3.$$

2. В систему за промежуток времени $(t,t+\Delta t)$ поступила одна заявка, то есть незавершенная работа совершила скачок на случайную величину η. В этом случае $U(t+\Delta t) = U(t)+\eta-\Delta t$ и для условной вероятности состояния СМО имеем

$$\mathsf{P}\Big\{A|C_2B_l\Big\} = \mathsf{P}\Big\{U(t+\Delta t) \leqslant \omega, x \leqslant \lambda_{n\text{м}}(t+\Delta t) < x + dx | C_2 B_l\Big\} =$$

$$= \mathsf{P}\Big\{U(t) + \eta - \Delta t \leqslant \omega, x \leqslant \lambda_{n\text{м}}(t+\Delta t) < x + dx | B_l\Big\} =$$

$$= \mathsf{P}\Big\{U(t) \leqslant \omega + \Delta t - \eta, y_l \leqslant \lambda_{n\text{м}}(t) < y_l + dx\Big\} =$$

$$= \int_{s=0}^{s=\omega+\Delta t} \mathsf{P}\{\eta \leqslant \omega + \Delta t - s\} \mathsf{P}\Big\{s < U(t) < s + ds, y_l \leqslant \lambda_{n\text{м}}(t) < y_l + dx\Big\} =$$

$$= \int_0^{\omega+\Delta t} B(\omega + \Delta t - s) \frac{\partial \mathrm{H}(s,t,y_l)}{\partial s} dx\, ds, 1 \leqslant l \leqslant 3.$$

Таким образом, по формуле полной вероятности получаем

$$\mathrm{H}(\omega, t+\Delta t, x_i) dx = \mathsf{P}(A) = \sum_{l=1}^{l=3} \sum_{r=1}^{r=3} \mathsf{P}(A|C_r B_l) \mathsf{P}(C_r B_l) =$$

$$= \sum_{l=1}^{l=3} \sum_{r=1}^{r=3} \mathsf{P}(A|C_r B_l) \mathsf{P}(C_r|B_l) \mathsf{P}(B_l) =$$

$$= \sum_{l=1}^{l=3} \sum_{r=1}^{r=3} \mathsf{P}(B_l) \mathsf{P}(C_r|B_l) \mathsf{P}(A|C_r B_l) =$$

$$= \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)\Big\{(1 - x_{i-1}\Delta t)\mathrm{H}(\omega + \Delta t, t, x_{i-1})dx +$$

$$+ x_{i-1}\Delta t \int_0^{\omega+\Delta t} B(\omega + \Delta t - s) \frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_{i-1})}{\partial s} dx\, ds\Big\} +$$

$$+ \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\Big\{(1 - x_{i+1}\Delta t)\mathrm{H}(\omega + \Delta t, t, x_{i+1})dx +$$

$$+ x_{i+1}\Delta t \int_0^{\omega+\Delta t} B(\omega + \Delta t - s) \frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_{i+1})}{\partial s} dx\, ds\Big\} + o(\Delta t).$$

Рассмотрим в последней формуле справа функцию $\mathrm{H}(\omega + \Delta t, t, y)$ аргументов ω,t,y, где $y = x_{i-1}$ или $y = x_{i+1}$. Сократив dx слева и справа, применив к функции $\mathrm{H}(\omega + \Delta t, t, y)$ формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано по переменной ω :

$$\mathrm{H}(\omega + \Delta t, t, y) = \mathrm{H}(\omega, t, y) + \frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,y)}{\partial \omega} \Delta t + o(\Delta t),$$

получим

$$\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x_i) = \Big(\frac{1}{2}+p\Delta x\Big)\Big\{(1-x_{i-1}\Delta t)\Big[\mathrm{H}(\omega,t,x_{i-1})+\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x_{i-1})}{\partial\omega}\Delta t\Big]+$$
$$+x_{i-1}\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_{i-1})}{\partial s}ds\Big\}+$$
$$+\Big(\frac{1}{2}-p\Delta x\Big)\Big\{(1-x_{i+1}\Delta t)\Big[\mathrm{H}(\omega,t,x_{i+1})+\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x_{i+1})}{\partial\omega}\Delta t\Big]+$$
$$+x_{i+1}\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_{i+1})}{\partial s}ds\Big\}+o(\Delta t).$$

Откуда после раскрытия скобок следует

$$\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x_i) = \frac{1}{2}\mathrm{H}(\omega,t,x_{i-1})-\frac{1}{2}x_{i-1}\Delta t\mathrm{H}(\omega,t,x_{i-1})$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x_{i-1})}{\partial\omega}\Delta t+p\Delta x H(\omega,t,x_{i-1})+$$
$$+\frac{1}{2}x_{i-1}\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_{i-1})}{\partial s}ds+$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{H}(\omega,t,x_{i+1})-\frac{1}{2}x_{i+1}\Delta t\mathrm{H}(\omega,t,x_{i+1})+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x_{i+1})}{\partial\omega}\Delta t-p\Delta x H(\omega,t,x_{i+1})+$$
$$+\frac{1}{2}x_{i+1}\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_{i+1})}{\partial s}ds+o(\Delta t). \qquad (0.12)$$

Отняв от левой и правой частей $\mathrm{H}(w,t,x_i)$, разделив обе части уравнения на Δt, получим разностное уравнение

$$\frac{\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x_i)-\mathrm{H}(\omega,t,x_i)}{\Delta t} = -\frac{1}{2}\Big[x_{i-1}\mathrm{H}(\omega,t,x_{i-1})+x_{i+1}\mathrm{H}(\omega,t,x_{i+1})\Big]+$$
$$+\frac{1}{2}\Big\{x_{i-1}\int_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_{i-1})}{\partial s}ds+$$
$$+x_{i+1}\int_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_{i+1})}{\partial s}ds\Big\}+$$
$$+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x_{i-1})}{\partial\omega}+\frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x_{i+1})}{\partial\omega}\Big)+$$
$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta^2 x}{\Delta t}\cdot\frac{\mathrm{H}(\omega,t,x_{i-1})-2\mathrm{H}(\omega,t,x_i)+\mathrm{H}(\omega,t,x_{i+1})}{\Delta^2 x}-$$
$$-2p\cdot\frac{\Delta^2 x}{\Delta t}\cdot\frac{\mathrm{H}(\omega,t,x_{i+1})-\mathrm{H}(\omega,t,x_{i-1})}{2\Delta x}+o(\Delta t). \qquad (0.13)$$

В результате предельного перехода при $\Delta t\to 0$, $\Delta x\to 0$, с учетом (0.9) и условия

$$\lim \Delta^2 x/\Delta t = b, \Delta x\to 0, \Delta t\to 0, \qquad (0.14)$$

получим из разностного уравнения (0.13) дифференциальное уравнение (0.4).

Для получения уравнения в граничной точке $x_0 = \alpha$ воспользуемся как показано выше формулой полной вероятности, из которой аналогично (0.12) вытекает

$$\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x_0) = \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\Big\{(1 - x_0\Delta t)\Big[\mathrm{H}(\omega,t,x_0) + \frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x_0)}{\partial \omega}\Delta t\Big] +$$

$$+ x_0\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t} B(\omega+\Delta t - s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_0)}{\partial s}ds\Big\} +$$

$$+ \Big(\frac{1}{2} - p\Delta x\Big)\Big\{(1 - x_1\Delta t)\Big[\mathrm{H}(\omega,t,x_1) + \frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x_1)}{\partial \omega}\Delta t\Big] +$$

$$+ x_1\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t} B(\omega+\Delta t - s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_1)}{\partial s}ds\Big\} + o(\Delta t),$$

откуда после раскрытия скобок получаем

$$\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x_0) = \frac{1}{2}\mathrm{H}(\omega,t,x_0) - p\Delta x\mathrm{H}(\omega,t,x_0) - \frac{1}{2}x_0\Delta t\mathrm{H}(\omega,t,x_0) +$$

$$+ x_0\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t} B(\omega+\Delta t - s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_0)}{\partial s}ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\mathrm{H}(\omega,t,x_1) - p\Delta x\mathrm{H}(\omega,t,x_1) - \frac{1}{2}x_1\Delta t\mathrm{H}(\omega,t,x_1) +$$

$$+ x_1\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t} B(\omega+\Delta t - s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_1)}{\partial s}ds + o(\Delta t). \tag{0.15}$$

С учетом $x_1 = x_0 + \Delta x$ рассмотрим в (0.15) функции $\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x)$, $\mathrm{H}(\omega,t,x+\Delta x)$ аргументов ω,t,x, $x = x_0$. Применив в (0.15) формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано к функции $\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x)$ по переменной t :

$$\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x) = \mathrm{H}(\omega,t,x) + \mathrm{H}'_t(\omega,t,x)\Delta t + o(\Delta t),$$

к функции $\mathrm{H}(\omega,t,x_1) = \mathrm{H}(\omega,t,x+\Delta x)$ по переменной x :

$$\mathrm{H}(\omega,t,x+\Delta x) = \mathrm{H}(\omega,t,x) + \mathrm{H}'_x(\omega,t,x)\Delta x + o(\Delta x),$$

приведя подобные $\mathrm{H}(\omega,t,x_0)$ слева и справа, разделив полученное уравнение на Δx, в результате предельного перехода при $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$, с учетом условий (0.9) и (0.14), получим из (0.15)

$$0 = \frac{1}{2}\mathrm{H}'_x(\omega,t,x_0) - 2p\mathrm{H}(\omega,t,x_0),$$

откуда с учетом (0.10) следует краевое уравнение (0.6).

Для получения уравнения в граничной точке $x_m = \beta$ воспользуемся как показано выше формулой полной вероятности, из которой аналогично (0.12) следует

$$\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x_m) = \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)\Big\{(1 - x_{m-1}\Delta t)\Big[\mathrm{H}(\omega,t,x_{m-1}) +$$

$$+ \frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x_{m-1})}{\partial \omega}\Delta t\Big] +$$

$$+ x_{m-1}\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t} B(\omega+\Delta t - s)\frac{\partial \mathrm{H}(s,t,x_{m-1})}{\partial s}ds\Big\} +$$

$$+ \Big(\frac{1}{2} + p\Delta x\Big)\Big\{(1 - x_m\Delta t)\Big[\mathrm{H}(\omega,t,x_m) + \frac{\partial \mathrm{H}(\omega,t,x_m)}{\partial \omega}\Delta t\Big] +$$

$$+x_m\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial\mathrm{H}(s,t,x_m)}{\partial s}ds\Big\}+o(\Delta t),$$

откуда получаем

$$\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x_m)=\frac{1}{2}\mathrm{H}(\omega,t,x_{m-1})+p\Delta x\mathrm{H}(\omega,t,x_{m-1})-\frac{1}{2}x_{m-1}\Delta t\mathrm{H}(\omega,t,x_{m-1})+$$

$$+x_{m-1}\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial\mathrm{H}(s,t,x_{m-1})}{\partial s}ds+$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{H}(\omega,t,x_m)+p\Delta x\mathrm{H}(\omega,t,x_m)-\frac{1}{2}x_m\Delta t\mathrm{H}(\omega,t,x_m)+$$

$$+x_m\Delta t\int_0^{\omega+\Delta t}B(\omega+\Delta t-s)\frac{\partial\mathrm{H}(s,t,x_m)}{\partial s}ds+o(\Delta t). \quad (0.16)$$

С учетом $x_{m-1}=x_m-\Delta x$ рассмотрим в (0.16) функции $\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x)$, $\mathrm{H}(\omega,t,x-\Delta x)$ аргументов $\omega,t,x,\ x=x_m$. Применив в (0.16) формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано к функции $\mathrm{H}(\omega,t+\Delta t,x)$ по переменной t, к функции $\mathrm{H}(\omega,t,x-\Delta x)$ по переменной x :

$$\mathrm{H}(\omega,t,x-\Delta x)=\mathrm{H}(\omega,t,x)-\mathrm{H}'_x(\omega,t,x)\Delta x+o(\Delta x),$$

приведя подобные $\mathrm{H}(\omega,t,x_m)$ слева и справа, разделив полученное уравнение на Δx, в результате предельного перехода при $\Delta t\to 0$, $\Delta x\to 0$, с учетом условий (0.9) и (0.14), получим из (0.16)

$$0=-\frac{1}{2}\mathrm{H}'_x(\omega,t,x_m)+2p\mathrm{H}(\omega,t,x_m),$$

откуда с учетом (0.10) следует краевое уравнение (0.7).

Вывод краевого условия (0.5) и начального условия показан выше.

Покажем выполнение условия нормировки (0.8) :

$$\mathrm{H}(\infty,t,x)dx=\mathsf{P}\{U(t)\leqslant\infty,x\leqslant\lambda(t)<x+dx\}=$$

$$=\mathsf{P}\{x\leqslant\lambda(t)<x+dx\}=f(t,x)dx,$$

откуда следует (0.8).

Теорема 1 доказана.

Согласно (0.3) границы диффузионного процесса α,β являются упругими.

Заметим, что уравнение (0.4) отличается от нестационарного интегро-дифференциального уравнения Такача (0.1) наличием слагаемого с дифференциальным оператором $\mathcal{A}\mathrm{H}(\omega,t,x)$. Поэтому уравнение (0.4) является нестационарным уравнением типа Такача с дифференциальным оператором Фоккера — Планка.

Теорема 2. *Если в СМО существует стационарный режим, то стационарное распределение* $\mathrm{h}(\omega,x)$ *незавершенной работы* U *удовлетворяет:*

1) *стационарному интегро-дифференциальному уравнению типа Такача с дифференциальным оператором Фоккера — Планка:*

$$-x\mathrm{h}(\omega,x)+x\int_0^{\omega}B(\omega-s)\frac{\partial\mathrm{h}(s,x)}{\partial s}ds+\frac{\partial\mathrm{h}(\omega,x)}{\partial\omega}+$$

$$+\frac{b}{2}\frac{\partial^2\mathrm{h}(\omega,x)}{\partial^2 x}-a\frac{\partial\mathrm{h}(\omega,x)}{\partial x}=0,\omega>0,x\in(\alpha,\beta), \quad (0.17)$$

2) *одностороннему краевому условию по* ω :

$$\mathrm{h}(0^+,x)=q_0(x), \quad (0.18)$$

3) *краевым условиям по x:*

$$\mathrm{h}'_x(\omega,\alpha) = 0, \tag{0.19}$$

$$\mathrm{h}'_x(\omega,\beta) = 0, \tag{0.20}$$

4) *условию нормировки:*

$$\mathrm{h}(\infty,x) = f(x). \tag{0.21}$$

Доказательство. При начальных условиях $P_k(0) = p_k, k \geqslant 0$, СМО сразу находится в стационарном режиме в любой момент времени $t \geqslant 0$. Формулы (0.17), (0.19), (0.20) следуют из формул (0.4), (0.6), (0.7), так как в стационарном режиме $\mathrm{H}'_t(\omega,t,x) = 0$, а нестационарное распределение $\mathrm{H}(\omega,t,x)$ заменяется на стационарное распределение $\mathrm{h}(\omega,x)$.

При произвольном начальном распределении второй способ получения уравнения (0.17) заключается в предельном переходе в уравнении (0.4) при $t \to \infty$. В этом случае $\mathrm{h}(\omega,x) = \lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{H}(\omega,t,x)$, $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{H}'_t(\omega,t,x) = 0$. Указанные пределы существуют, так как согласно условию теоремы в СМО существует стационарный режим. Вывод краевого условия (0.18) показан выше.

Покажем выполнение условия нормировки (0.21) :

$$\mathrm{h}(\infty,x)dx = \mathsf{P}\{U \leqslant \infty, x \leqslant \lambda < x + dx\} = \mathsf{P}\{x \leqslant \lambda < x + dx\} = f(x)dx,$$

откуда следует (0.21). *Теорема 2 доказана.*

Заметим, что уравнение (0.17) отличается от стационарного интегро-дифференциального уравнения Такача (0.2) наличием слагаемого с дифференциальным оператором $\mathcal{A}\mathrm{h}(\omega,x)$. Поэтому уравнение (0.17) является стационарным уравнением типа Такача с дифференциальным оператором Фоккера — Планка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматривается СМО с бесконечным накопителем, одним обслуживающим прибором с произвольным распределением времени обслуживания. На вход СМО поступает дважды стохастический пуассоновский поток заявок, интенсивность которого представляет собой диффузионный процесс с ненулевым коэффициентом сноса, ненулевым коэффициентом диффузии и упругими границами. Для рассматриваемой СМО получены нестационарное и стационарное уравнения типа Такача для характеристик незавершенной работы в СМО с применением динамики Колмогорова и с использованием аппроксимации диффузионного процесса полумарковским процессом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейнрок, Л. Коммуникационные сети. Стохастические потоки и задержки сообщений / Л. Клейнрок. — М. : Наука, 1970.

2. Клейнрок, Л. Вычислительные системы с очередями / Л. Клейнрок. — М. : Мир, 1979.

3. Исследование моделей систем массового обслуживания в информационных сетях / Н. И. Головко, В. О. Каретник, В. Е. Танин, И. И. Сафонюк // Сиб. журн. индустр. математики. — 2008. — Т. 2, № 34. — С. 50–64.

4. Тарасов, В. Н. Непрерывные диффузионные модели массового обслуживания и методик расчета их характеристик / В. Н. Тарасов, Н. Ф. Бахарева // Вестник ОГУ. — 2002. — № 2. — С. 199–203.

5. Dhakad, M. R. Diffusion Process for an G/G/m/N Queue with Priority / M. R. Dhakad // Intern. J. of Engin. Science and Computing. — 2016. — V. 6, № 7. — P. 8218–8423.

6. Баруча-Рид, А. Т. Элементы теории марковских процессов и их приложения / А. Т. Баруча-Рид. — М. : Наука, 1969.

7. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок. — М. : Машиностроение, 1979.

8. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — М. : Наука, 1988.

9. Бекман, И. Н. Математика диффузии / И. Н. Бекман. — М. : ОнтоПринт, 2016.

10. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с бесконечным накопителем и скачкообразной интенсивностью входного потока / О. В. Бондрова, Д. С. Крылова, Н. И. Головко, Т. А. Жук // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 4. — С. 89–100.

11. Прокопьева, Д. Б. Вывод уравнений для систем массового обслуживания с диффузионной интенсивностью входного потока и нулевым коэффициентом сноса / Д. Б. Прокопьева, Т. А. Жук, Н. И. Головко // Известия КГТУ. — 2017. — № 46. — С. 184–193.

REFERENCES

1. Kleinrock L. Communication Nets. Stochastic Message Flow and Delay. [Kleyjnrok L. Kommunikacionnye seti. Stoxasticheskie potoki i zaderzhki soobshheniyj]. Moscow, 1970.

2. Kleinrock L. Queueing Systems. [Kleyjnrok L. Vychislitel'nye sistemy s ocheredyami]. Moscow, 1979.

3. Golovko N.I., Karetnik V.O., Tanin V.E., Safonyuk I.I. Research of queueing systems models in information networks. [Golovko N.I., Karetnik V.O., Tanin V.E., Safonyuk I.I. Issledovanie modeleyj sistem massovogo obsluzhivaniya v informacionnyx setyax]. *Sib. zhurn. industr. matematiki — J. Appl. Ind. Math*, 2008, vol. 2, no. 34, pp. 50–64.

4. Tarasov V.N., Bakhareva N.F. Continuous diffusion models of Queuing and methods of calculation of their characteristics. [Tarasov V.N., Bakhareva N.F. Nepreryvnye diffuzionnye modeli massovogo obsluzhivaniya i metodik rascheta ix xarakteristik]. *Vestnik OGU — Vestnik OGU*, 2002, no. 2, pp. 199–203.

5. Dhakad M.R. Diffusion Process for an G/G/m/N Queue with Priority. Intern. J. of Engin. Science and Computing, 2016, vol. 6, no. 7, pp. 8218–8423.

6. Bharucha-Reid A.T. Elements of the Theory of Markov Processes and Their Applications. [Barucha-Rid, A.T. Elementy teorii markovskix processov i ix prilozheniya]. Moscow, 1969.

7. Kleinrock L. Queueing systems. [Kleyjnrok L. Teoriya massovogo obsluzhivaniya]. Moscow, 1979.

8. Gnedenko B.V. Course of probability theory. [Gnedenko B.V. Kurs teorii veroyatnosteyj]. Moscow, 1988.

9. Beckman I.N. Mathematics of diffusion. [Bekman I.N. Matematika diffuzii]. Moscow, 2016.

10. Bondrova O.V., Krylova D.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Derivation of equations for queueing systems with infinite storage and an abrupt intensity of the input stream. [Bondrova O.V., Krylova D.S., Golovko N.I., Zhuk T.A. Vyvod uravneniyj dlya sistem massovogo obsluzhivaniya s beskonechnym nakopitelem i skachkoobraznoyj intensivnost'yu vxodnogo potoka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 4, pp. 89–100.

11. Prokopieva D.B., Zhuk T.A., Golovko N.I. Derivation of equations for queueing systems with the diffusion intensity of the input stream and zero ratio of drift. [Prokopieva D.B., Zhuk T.A., Golovko N.I. Vyvod uravneniyj dlya sistem massovogo obsluzhivaniya s diffuzionnoyj intensivnost'yu vxodnogo potoka i nulevym koefficientom snosa]. *Izvestiya KGTU — Izvestiya KGTU*, 2017, no. 46, pp. 184–193.

Фролова Евгения Сергеевна, старший преподаватель кафедры высшей математики, Морской государственный университет им. адм. Г. И. Невельского, Владивосток, Россия
Тел.: eu.frolova@yandex.ru

Frolova Evgeniya Sergeevna, senior lecturer, Maritime State University named after admiral G. I. Nevelskoy, Vladivostok, Russia
Tel.: eu.frolova@yandex.ru

Жук Татьяна Алексеевна, доцент кафедры высшей математики, Дальневосточный государственный технический рыбохозяйственный университет, Владивосток, Россия
Тел.: Tatyana_zhukdv@mail.ru

Zhuk Tatyana Alekseevna, associate Professor of higher mathematics, Far Eastern state technical fisheries University, Vladivostok, Russia
Tel.: Tatyana_zhukdv@mail.ru

Головко Николай Иванович, доктор технических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и анализа, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, Россия
Тел.: golovko.ni@dvfu.ru

Golovko Nikolay Ivanovich, doctor of engineering, Professor of algebra, geometry and analysis Department, Far Eastern federal University, Vladivostok, Russia
Tel.: golovko.ni@dvfu.ru