

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОТОКОМ

Ю. И. Сапронов, О. В. Владимирова, М. И. Ковалева,
Д. В. Костин, С. Л. Царев

*Воронежский Государственный Университет,
Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина*

Поступила в редакцию 22.07.2018 г.

Аннотация. В статье рассмотрена модель автоматического распределения инвестиционного на основе обобщенного многомерного уравнения Навье-Стокса, определяющего поле скоростей многокомпонентного инвестиционного потока при условии прилипания изображающей точки на границе (обращения в ноль вектора скорости инвестиций). В случае стационарной модели предложена методика приближенного вычисления поля скоростей инвестиционного потока, основанная на построении приближенных стационарных решений методами Бубнова, Галеркина, Пуанкаре, Ляпунова и Шмидта. Представлены графические иллюстрации.

Ключевые слова: инвестиции, инновации, математическая модель инвестиционного потока, уравнение Бюргерса, уравнение Навье-Стокса, аппроксимация Бубнова-Галеркина, метод Пуанкаре, метод Ляпунова-Шмидта, главная линейная часть уравнения, собственные функции, спектральная задача.

MODEL OF HYDRODYNAMIC TYPE FOR THE INVESTMENT STREAM

Yu. I. Sapronov, O. V. Vladimirova, M. I. Kovaleva, D. V. Kostin, S. L. Tsarev

Abstract. In article the model of automatic distribution is considered investment on the basis of the generalized multidimensional equation Navier-Stokes defining a field of speeds of the multicomponent investment stream on condition of sticking of the representing point on to border (address to zero vector of speed of investments). In a case the technique of approximate calculation is offered stationary model fields of speeds of an investment stream, based on construction approximate stationary decisions by methods of Bubnov, Gallerkin, Puankare, Lyapunov and Schmidt. The graphic are presented illustrations.

Keywords: investments, innovations, mathematical model of investment stream, Byurgers equation, Navier-Stoks equation, Bubnov-Galerkin approximation, method Puankare-Lyapunov-Shmidt, spectral problem.

ВВЕДЕНИЕ

Противоречивое отношение специалистов по экономической динамике к математическим формализмам в практической экономике хорошо отражено в книге виднейшего специалиста А. Аузана [1], в которой утверждается, например, что изучение транзакционных издержек основано на теореме, которую сформулировал еще в середине XX века будущий нобелевский лауреат Рональд Коуз следующим образом: «независимо от того, как первоначально распределены активы, в итоге будет достигнуто оптимальное их распределение». Считается, что эта теорема отражает либеральное представление о функционировании рынка. В книге есть

еще утверждения типа «по правилам — даже по плохим правилам — жить лучше, чем без правил» или «в результате действия любого правила издержки одних людей становятся доходами других — просто потому, что правило так устроено», а также «если вы каждый раз готовы найти оригинальное решение, то вам алгоритм не нужен».

Тем не менее, широко известно, что формальные экономико-математические модели все-таки позволяют «автоматически управлять» отдельными элементами экономической динамики, принося при этом практическую пользу (см. [2]–[9]). Так, например, существует широко известное мнение, что поступление инвестиций в инновационный процесс и их распределение может складываться либо «произвольно-хаотично» — методом проб и ошибок, исходя из накопленного опыта, и т.д., либо, в противоположность этому, по правилам какой-нибудь математической модели, что в конечном итоге может дать ощутимую выгоду.

1. О НЕКОТОРЫХ КЛЮЧЕВЫХ АСПЕКТАХ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ

Важными показателями удачного моделирования являются такие факторы, как

- 1) сбалансированность инновационных мероприятий, отсутствие «перекосов», соблюдение допустимых пропорций между компонентами инновационной системы в целом;
- 2) регулярное и оптимальное использование инновационных заимствований;
- 3) недопустимость рискованных инвестиций.

Правомерность и актуальность такой точки зрения в условиях российской экономики подтверждается приведенными ниже тезисами, взятыми из [10] (в этой статье дан анализ внутренних и внешних проблем современной российской экономики). В ней указана необходимость перехода к новой модели экономического роста. В статье отмечено также, что в период после 2008 г. наблюдается качественно иной уровень нестабильности, резко снижающий возможности прогнозировать даже ближайшее будущее. И для сформированного глобального финансового рынка, способного почти мгновенно перемещать по миру огромные суммы денег, не создана адекватная ему система глобального регулирования.

Отмечено также, что в современных условиях требуется серьезная работа по улучшению инвестиционного климата. Помимо общих правил, здесь нужен набор очень конкретных действий (точечных мер) — по прозрачным и понятным всем «правилам игры».

Приведем ряд других высказываний из статьи [10].

1. Для достижения устойчивого экономического роста необходимо максимально задействовать труд и капитал, обеспечить повышение совокупной производительности этих факторов. Нужны инвестиции — частные и государственные, внутренние и внешние. Инвестиции в настоящее время должны стать драйвером экономического роста — более важным, чем рост потребления и экспортный спрос. На первом месте по важности стоят, конечно, внутренние частные инвестиции. Необходимо выработать меры, которые бы не только стимулировали сбережения, но и способствовали их трансформации в инвестиции. Проблема и в высокой степени неопределенности, хотя она может проявляться по-разному в разных странах и регионах. Для одних это технологическая размытость и непонимание бизнесом перспектив спроса. Для других — геополитическая неопределенность, отсутствие ясных приоритетов в деятельности национальных правительств. Свою роль играет и то, что принято у нас называть *недостатками предпринимательского климата* — слабая защита прав собственности, нестабильность «правил игры» и др.

2. Неприемлемо в текущих условиях очень жесткое регулирование экономики (по образцам советского планирования). Именно жесткость советской модели привела к ее краху в условиях современного (постиндустриального) общества. Есть и ряд других идей, внешне столь же простых, сколь и опасных: от перехода к мобилизационной экономике, национализации крупных компаний до тотальной распродажи всей государственной собственности.

Но простые решения очень сложны для исправления ситуации в будущем, когда «ошибки простоты» станут очевидны.

3. С одной стороны, необходимо обеспечить стабильность, а с другой — более четко регулировать ответственность разных уровней управления. Реформы требуют достаточно длительного времени. Можно даже сказать, что они должны продолжаться постоянно, поскольку никогда не уйдет с повестки дня задача повышения эффективности и модернизации. Способность экспортировать несырьевую продукцию должна стать одним из основных критериев при решении вопроса об оказании государственной поддержки тому или иному проекту, предприятию. На это должны быть нацелены созданные в последнее время институты поддержки экспорта. Вместе с тем следует отказаться от использования инструментов государственной поддержки при отсутствии внятных показателей эффективности и сроков вывода продукции на мировой конкурентоспособный уровень. Внешнеэкономические связи — путь к наращиванию эффективности через конкурентоспособность. Необходимо выработать и реализовать меры, балансирующие поддержку конкурентоспособности производителя и обеспечение конкуренции на внутреннем рынке. Только с их помощью можно выявить долгосрочные конкурентные преимущества и разработать эффективные адресные (согласующиеся с правилами ВТО) инструменты поддержки. Это и означает, по сути, «умное импортозамещение».

4. В среднесрочной перспективе потребуются решение более сложных задач институционального и структурного характера. Это, во-первых, концентрация мер государственной поддержки промышленности на стратегических секторах и производствах с долгосрочными конкурентными преимуществами. Во-вторых, осуществление за 3–5 лет рывка в производстве экспортоориентированной импортозамещающей продукции при активной поддержке процессов формирования собственных цепочек добавленной стоимости. В-третьих, существенное снижение энергоемкости российского ВВП. В-четвертых, разработка и внедрение долгосрочных моделей регулирования естественномонопольных секторов экономики, что повысит предсказуемость экономической политики и вызовет приток частных инвестиций. И в-пятых, развитие эффективных транспортнологистических связей как на внутренних, так и на международных маршрутах, что приведет к снижению издержек на перемещение товаров и факторов производства, к увеличению производительности труда и капитала, к концентрации экономической деятельности. Реализация структурных реформ требует также оздоровления предпринимательского климата и повышения качества государственного управления.

2. ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФОРМАЛИЗМОВ

2.1. О формализмах управления инновациями

Для получения представления о математическом формализме и его роли в управлении инновациями можно сослаться на примеры, описанные в [2]–[9]. Здесь мы ограничимся лишь высказываниями на близкую тему двух академиков РАН — В. И. Арнольда [2] и В. П. Маслова [3].

В брошюре В. И. Арнольда [2] дано убедительное и яркое обоснование важности применений математической теории мягких моделей ¹⁾ в экономике. Приведем лишь одну заключительную выдержку из этой работы: «К сожалению, и сейчас остаются актуальными слова классика математической экономики Парето: *Экономисты, не знающие математики, находятся в положении людей, желающих решить систему уравнений, не зная ни того, что она из себя представляет, ни того даже, что представляет из себя каждое входящее в нее единичное уравнение*. Выводы: планируемое во всех странах подавление фундаментальной науки и, в частности, математики (по американским данным на это им потребуется лет 10–15) принесет человечеству (и отдельным странам) вред, сравнимый со вредом, который

¹⁾ В этой брошюре изложен доклад В. И. Арнольда (1997 г.) на семинаре при Президентском совете РФ.

принесли западной цивилизации (и Испании) костры инквизиции. Математическое образование должно составлять неотъемлемую часть культурного багажа каждого школьника. Но оно не должно никоим образом сводиться к рецептурам (будь то таблица умножения или Windows). Основной целью математического образования должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира, умения, так хорошо описанного Витте в его характеристике «математики-философии» и так блестяще использованного им в вовсе не математической деятельности. Искусство составлять и исследовать мягкие математические модели является важнейшей составной частью этого умения».

В книге В. П. Маслова [3] дано обоснование «квантового продолжения» законов Ципфа-Мандельбротта и Парето для распределения капиталов и для определения зависимости объема продаж от цен на фондовом рынке, проведенное по аналогии с квантовым продолжением формулы Стефана-Больцмана в виде формулы Планка (в физике). На основе этого им было предложено математическое обоснование и уточнение эмпирических статистических закономерностей в экономике. Как пишет сам В. П. Маслов, важным результатом этой книги является разработка «капиталистической математики», отвечающей рыночной экономике (за этой математикой закрепилось название «тропическая математика»).

С точки зрения многих исследователей, одним из ключевых элементов создания устойчивой экономической динамики является создание механизмов *рождения* и *распространения* инноваций. По мнению ряда аналитиков, эти механизмы лежат в основе доминирования Западной цивилизации. Без интенсивного рождения инноваций Западный мир не смог бы обогнать Восток в лице Китая и Индии [11], а без бурного накопления капитала и инвестирования в распространение новых технологий Запад не смог бы обеспечить своего тотального превосходства. Таким образом, вопрос о механизмах рождения и распространения инноваций имеет цивилизационное значение [11]-[17].

Выяснение закономерностей рождения и распространения технологических инноваций позволяет объяснить многие экономические явления.

Известная модель Полтеровича-Хенкина [12]-[14] позволяет достаточно точно описывать эволюцию распределения предприятий по уровням технологической эффективности, но оставляет без ответа, например, вопрос о причине перехода предприятий к той или иной инновационной стратегии. Почему одни предприятия переходят к заимствованию более эффективной технологии, а другие — нет? Почему одни это делают быстрее, а другие — медленнее? Считается, что в модели Полтеровича-Хенкина нет соответствующих переменных, на основе которых можно было бы прояснить возникающие эффекты [15].

Специалисты считают, что механизм эволюции, заложенный в модель Полтеровича-Хенкина, слишком прост, а само уравнение относится к классу феноменологических моделей. Существующая аналогия между уравнением Полтеровича-Хенкина и уравнением Бюргерса [18] является чисто формальной, ибо турбулентный процесс, описываемый уравнением Бюргерса, совершенно не похож на процесс «перетекания» предприятий по разным технологиям, описываемый уравнением Полтеровича-Хенкина.

С другой стороны, модель Полтеровича-Хенкина показывает глубокую аналогию экономических процессов с физическими. Посредством этой модели можно описать волну распределения предприятий по технологическим уровням. Можно даже наблюдать эффект «бегущей волны», когда вдоль оси времени перемещается горб распределения. Считается, что подобное перемещение гребня волны равносильно ликвидации старых технологий и рождению новых. Все технологические уровни, которые остаются позади гребня волны «вдавливаются» в зону технологической дыры, тогда как технологии, лежащие впереди гребня, «поднимаются» из технологической сингулярности. Таким образом бегущая волна трактуется как математическое выражение технологического прогресса.

Считается, что модели рождения и распространения инноваций на основе эволюционно-

го уравнение Полтеровича-Хенкина до сих пор не нашло в научной литературе адекватной содержательной интерпретации. Тем не менее, принято считать, что это уравнение дает одну из самых удачных иллюстраций дискретно-волнового единства экономических процессов. Модель Полтеровича-Хенкина прошла эмпирическую проверку на базе металлургической отрасли. Но в целом считается, что нет убедительного доказательства прикладной состоятельности этой модели [15]–[17].

2.2. О технологической диффузии

В настоящее время общепризнано, что технологическая диффузия оказывает влияние на рост производительности предприятия, и поэтому в настоящее время она широко исследуется в научных работах по экономической динамике с использованием математического моделирования.

У руководителя каждого предприятия систематически возникает необходимость выбора способа и скорости финансирования инноваций, и его коррекции в сторону оптимального значения, с учетом достигнутой производительности. Поэтому ясно, что поиск формальных математических средств выбора такой коррекции является важным направлением как теоретических, так и практических исследований экономической динамики.

Известно, что понятие «диффузия инноваций» было введено и изучено французским социологом Габриэлем Тардом (1890), им же была предложена S -образная кривая (логистическая кривая) для характеристики инновационных процессов (1903). Эверетт Роджерс позже использовал эту кривую в своей модели: в 1962 году он опубликовал книгу о диффузии инноваций, в которой описал процесс внедрения инноваций среди отдельных лиц и организаций. Известно также, что логистическую кривую впервые ввел Пьер Ферхюльст при построении модели роста численности населения (1838). Если применить его модель к простейшему (имитационному) потоку инвестиций, то получим уравнение (Ферхюльста-Пирла) $\dot{N} = \mathcal{D} N(M - N)$, решением которого и является S -образная кривая (Р. Пирл — американский эколог, также использовавший это уравнение (1920)). Здесь $N(t)$ — число людей, принявших инновацию к моменту t , M — емкость рынка (это предельно допустимое число лиц, которые способны принять данную инновацию). Если предположить, что *объем инвестиций строго пропорционален числу сторонников инноваций*, то получим, что S -образная кривая отражает и динамику инвестиций. Она при этом дает следующие фазы распространения новых продуктов: медленный рост (вовлечение первых потребителей), затем резкий рост и, наконец, замедление роста (насыщение). Течение этого процесса, согласно Э. Роджерсу, зависит от основных инновационных свойств нового продукта, оцениваемые потребителями при принятии решения об использовании инновации. Хотя диффузия инноваций во многом непосредственно зависит от «обстановки в обществе», прямое математическое моделирование распространения инноваций также представляет интерес.

Понятие диффузии в естествознании связано с изучением влияния изменений параметров внешнего воздействия (температуры, электромагнитного поля, механического сжатия и пр.) на состояние физической системы (раствор, смесь, сплав и т.п.). Изменение значений параметров может привести к потере устойчивости исходной фазы и, как следствие (как отклик системы), к ее переходу в новую фазу (состояние с новыми структурными свойствами). Такой переход может сопровождаться спинодальным расслоением (распадом), выраженным в изменении локальных концентраций компонентов, в образовании сначала зернистой структуры, а затем кластеров и доменов новой фазы [19], [20]. В последнее время структурную перестройку физической среды часто объясняют на основе нелинейного диффузионного уравнения Кана-Хилларда [19]

$$\dot{u} = \Delta \operatorname{grad} V(u) := \mathcal{D} \Delta(u^3 - u - \gamma \Delta(u))$$

и ему подобных уравнений. Здесь $u = u(x)$ — относительная концентрация компонента веще-

ства, $x \in U \subset \mathbb{R}^m$, $1 \leq m \leq 3$, $\mathcal{D}$ — коэффициент диффузии,

$$V(u) := \mathcal{D} \int_U \left(\frac{(u^2 - 1)^2}{4} + \gamma \frac{|\nabla u|^2}{2} \right) dx$$

— интеграл энергии, U — область, занятая изучаемой средой.

Близким, но более простым уравнением, также способным моделировать структурные превращения, является широко известное уравнение диффузии с квадратично-кубической нелинейностью:

$$\dot{w} = -\text{grad } V(w) := \Delta(w) + \lambda w - a w^2 - w^3,$$

где $w = w(x)$ — концентрация изучаемого компонента вещества (распределение инвестиции), $x \in U \subset \mathbb{R}^2$ (двумерная задача),

$$V(w) := \iint_U \left(\frac{|\nabla w|^2}{2} - \lambda \frac{w^2}{2} + a \frac{w^3}{3} + \frac{w^4}{4} \right) dx_1 dx_2$$

— интеграл энергии (действия), $U = [0,1] \times [0,1]$ — область, занятая изучаемой средой (в экономике — это область инвестирования, выраженная, например, показателями производительности). Стабильные (устойчивые) фазы соответствуют точкам минимума функционала энергии. Как правило, предполагается выполнение граничного условия Неймана

$$\left. \frac{\partial w}{\partial n} \right|_{\partial U} = 0,$$

где ∂U — граница области U , n — векторное поле нормалей к границе, и выполнено естественное ограничение (на количество компонента в целом)

$$\iint_U w(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = c = \text{const} > 0.$$

В случае инвестиций этот интеграл можно интерпретировать как запланированные издержки на закупку нового оборудования.

В случае моделирования одномерного (однокомпонентного) инвестиционного потока рассматриваются инновационные циклы, описываемые логистической кривой. При этом считается, что цикл инноваций начинается с кумулятивного накопления инновационного ресурса. Достижение некоторого критического уровня ресурса порождает переход к экспоненциальному росту инновационного процесса. При подходе к состоянию насыщения происходит замедление темпов роста, экспоненциальный участок траектории инновационного процесса заменяется логарифмическим. Жизненный цикл инноваций завершается и наступает стадия сворачивания производства.

В настоящей статье предложен прямой подход к описанию влияния технологической диффузии на распределение многокомпонентных инвестиций, основанный на обобщенной гидродинамической аналогии: поток инвестиций сравнивается с потоком многомерной жидкости, и при этом учитывается прямой обмен инновационными ресурсами.

3. МОДЕЛЬ ПОЛТЕРОВИЧА-ХЕНКИНА И ЕЕ НЕПРЕРЫВНЫЙ АНАЛОГ

Вернемся к работам [12]–[14], в которых построена дискретная модель взаимодействия между объемом внедренных инноваций (на заданном предприятии) и объемом предстоящего (необходимого) инвестирования инноваций, основанная на (модельном) уравнении

$$\dot{x}_n = (-\alpha + \beta(1 - x_n))(x_n - x_{n-1}) + \mu(x_{n+1} - x_n),$$

носящем в настоящее время название «уравнение Полтеровича-Хенкина». В этом уравнении x_n — объем необходимого инвестирования инноваций. Это уравнение можно переписать в виде

$$\dot{x}_n = \mu(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) - \gamma(x_n - x_{n-1}) + \beta(1 - x_n)(x_n - x_{n-1}), \quad \gamma = \alpha + \mu,$$

что позволяет воспринимать уравнение как разностную аппроксимацию «непрерывного» модельного уравнения

$$\dot{x} = \mu x'' - \gamma x' + \beta(1 - x)(x').$$

или

$$\dot{x} = \mu x'' - (\gamma - \beta + \beta x)x'.$$

Здесь $x = x(s, t)$ — скорость инвестирования, зависящая от инновационного внедрения s и времени t . Сделав замену $\gamma - \beta + \beta x = y$, получим, после отбрасывания общего множителя β и переноса конвективного члена $\beta y y'$ в левую часть, уравнение Бюргерса [18]

$$\dot{y} + y' y = \mu y'',$$

которое можно исследовать разнообразными методами, включая приближенные методы изучения посткритических структурных перестроек, изложенные в [21]-[26].

4. ПРИМЕНЕНИЕ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА К МОДЕЛИРОВАНИЮ ДИНАМИКИ ИНВЕСТИРОВАНИЯ ИННОВАЦИЙ

4.1. Повышение точности модели Бюргерса

Для повышения точности модели Бюргерса (как одномерного варианта классического уравнения Навье-Стокса) можно ввести дополнительное слагаемое $v(\lambda - \|v\|^2)$, учитывающее прямой (механический) обмен инновационными ресурсами (см. [2]). В результате получим более общее модельное уравнение в виде

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial x} v = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v(\lambda - v^2). \quad (4.1)$$

Анализ решений уравнения (4.1) базируется на вычислении собственных функций и собственных значений операторного пучка $A + \lambda I : E \rightarrow F$, $A = \frac{d^2}{dx^2}$ при краевых условиях Дирихле: $E = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u(1) = 0\}$, $F = C[0,1]$.

Собственные функции операторного пучка $A + \lambda I$ в пространстве E определяются формулой

$$e_k = \sqrt{2} \sin(\pi k x), \quad (4.2)$$

функция (4.2) отвечает собственному значению $\lambda = (\pi k)^2$.

Приближение Бубнова-Галеркина по n модам к решению уравнения (4.1) имеют следующий вид:

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^n \xi_k(t) e_k(x).$$

Поток инвестиций определяется дифференциальным уравнением $\dot{x} = v(x, t)$. Приведем примеры графиков скоростей инвестиционных поступлений в следующем (при $n = 3$):

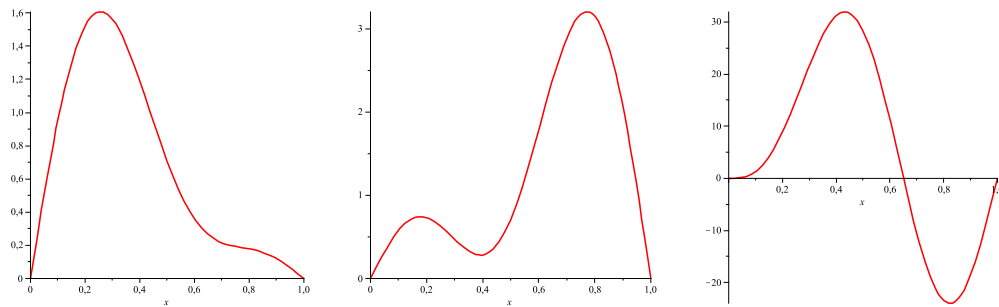


Рис. 1. Примеры графиков приближенно вычисленных функций скорости инвестиций (аппроксимации Галеркина по трем модам) при различных λ .

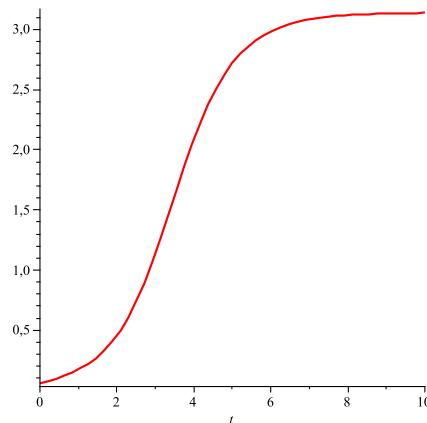


Рис. 2. Пример графика (S -образной) интегральной кривой для уравнения $\dot{x} = v(x, t)$, соответствующего первому из трех полей скоростей на рис. 1.

4.2. Многомерное уравнение Навье-Стокса и его применение к моделированию динамики инвестирования инноваций

Как было отмечено выше, имеется прямой вывод аналога уравнения Бюргерса при моделировании инвестиционной динамики. Аналогичный вывод можно проделать в более общем случае — для фирмы, состоящей из нескольких предприятий. Такой подход позволяет поток инвестиций «уподобить потоку воды» и, таким образом, перенести на область экономической динамики, связанной с планированием инвестиций, методы многомерной гидродинамики [27] (на основе многомерного уравнения Навье-Стокса и его обобщений). Возможно, на этом пути можно обнаружить новые полезные правила в «организации динамики» инвестиций и инноваций.

Итак, пусть имеется фирма, состоящая из n предприятий, и пусть при этом $r(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t))^T$ — вектор инвестирования инноваций в этой фирме ($r_j(t)$ — затраты на инновации j -го предприятия вплоть до момента времени t), $v(t) = (v_1(t), \dots, v_n(t))^T$ — вектор скорости инвестирования ($v_j(t) = \dot{r}_j(t)$), а $s(t) = (s_1(t), \dots, s_n(t))^T \in \Omega$ — вектор внедренных инноваций к данному моменту времени (например, в процентах от планового показателя внедрения инноваций за весь контрольный период).

Будем предполагать, что выполнено следующее условие: *вектор скорости внедрения инноваций пропорционален вектору скорости инвестиций*:

$$\dot{s} = \beta v, \quad \beta = \text{const}.$$

При выполнении этого условия поток инвестирования инноваций «параллелен» потоку

внедренных инноваций, то есть рассчитав поток реализованных инвестиций, мы автоматически получаем и поток внедренных инноваций.

Для скорости инвестирования можно составить, по хорошо известным схемам [29], балансовое уравнение. Сначала заметим, что

$$\frac{dv}{dt} = \dot{v} + \frac{\partial v}{\partial r} \dot{r} = \dot{v} + \frac{\partial v}{\partial r} v$$

(здесь $\frac{\partial v}{\partial r} = \left(\frac{\partial v_j}{\partial r_k} \right)$ — матрица Якоби). Следовательно, уравнение динамики инвестирования инноваций можно записать в виде, аналогичном широко известному уравнению Навье-Стокса из динамики несжимаемой вязкой жидкости [28], [29]:

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial r} v = \mu \Delta(v) - \text{grad}(p), \quad (4.3)$$

где $v = v(r, t)$, $p = p(r, t)$ — функция влияния спроса и предложения на инновации (*инновационный потенциал*), $\Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial r_j^2}$ — n -мерный гармонический оператор. Слагаемое $\mu \Delta(v)$ в последнем уравнении отвечает за «*инновационную вязкость*» (вызванную диффузией инноваций), коэффициент μ характеризует величину «инновационной вязкости». Естественно предположить также, что выполнено условие неразрывности

$$\text{div}(v) = 0 \quad (4.4)$$

и граничное условие

$$(v, n)|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.5)$$

на границе области $\Omega := \{r = (r_1, \dots, r_n)^\top \mid 0 \leq r_j \leq R_j\}$, R_j — потолок инвестирования инноваций на j -ом предприятии, n — нормаль к примыкающей максимальной грани границы.

Ниже мы будем использовать более жесткое граничное условие — «условие прилипания» на границе):

$$v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.6)$$

Замечание 1. Для повышения точности модели потока инвестиций можно ввести в уравнение Навье-Стокса дополнительное слагаемое $v(\lambda - \|v\|^2)$, учитывающее прямой (механический) обмен инновационными ресурсами. В результате получим более общее модельное уравнение в виде

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial r} v = \mu \Delta(v) + v(\lambda - \|v\|^2) - \text{grad}(p), \quad (4.7)$$

4.3. Пример: случай фирмы из двух предприятий

Пусть

$$n = 2 \quad r = (r_1, r_2)^\top, \quad v(r, t) = (v_1(r, t), v_2(r, t))^\top, \quad s = (s_1, s_2)^\top,$$

$$\Omega := \{0 \leq r_1 \leq 1, 0 \leq r_2 \leq 1\}.$$

Рассмотрим случай стационарного уравнения: $\dot{v} \equiv 0$ вместе с требованием выполнения краевого условия Дирихле («условия прилипания» на границе).

Итак, обратимся к двумерному уравнению Навье-Стокса

$$\dot{v} + \frac{\partial v}{\partial r} v = \mu \Delta(v) - \text{grad}(p) \quad (4.8)$$

при краевом условии (4.6). Здесь Δ — двумерный гармонический оператор (лапласиан), $\frac{\partial v}{\partial r}$ — матрица Якоби вектора скорости $v = v(r_1, r_2, t)$ инновационного потока по компонентам r_1, r_2 ,

$p = p(r_1, r_2)$ — потенциал. Перейдем к другой форме уравнения (4.8), используя нижеуказанные равенства (непосредственно устанавливаемые проверкой):

$$\operatorname{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right) = \operatorname{grad} (\Delta \psi); \quad \operatorname{rot} \left(\frac{\partial v}{\partial r} v \right) = [\psi, \Delta(\psi)].$$

Здесь $\operatorname{rot}(v) := \frac{\partial v_2}{\partial r_1} - \frac{\partial v_1}{\partial r_2}$, $\psi(r_1, r_2, t)$ — вихревая функция, $[\psi, \varphi]$ — якобиан функций ψ, φ . Причем $\operatorname{div}(v) = 0$ (условие неразрывности в односвязной области) приводит к тому, что решение должно иметь вид:

$$v = \operatorname{sgrad}(\psi) := \left(\frac{\partial \psi}{\partial r_2}, -\frac{\partial \psi}{\partial r_1} \right)^\top. \quad (4.9)$$

Из краевого условия (4.6) для v в частности следует выполнение для функции ψ граничного условия

$$(\operatorname{grad}(\psi), \tau) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad (4.10)$$

где τ — касательный к $\partial\Omega$ вектор. Следовательно, $\psi \Big|_{\partial\Omega} = \operatorname{const}$. Положим

$$\psi \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.11)$$

(краевое условие Дирихле). Из условия (4.6) вытекает также соотношение

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.12)$$

(краевое условие Неймана). Пусть $u := \operatorname{rot}(v) = \Delta(\psi)$ и $\dot{u} = \operatorname{rot}(\dot{v}) = \Delta(\dot{\psi})$. Применив двумерный ротор к правой и левой частям уравнения (4.8), получим уравнение Гельмгольца (см. [28])

$$\Delta(\dot{\psi}) = [\Delta(\psi), \psi] + \mu \Delta^2(\psi)$$

и его стационарный вариант

$$[\Delta(\psi), \psi] + \mu \Delta^2(\psi) = 0. \quad (4.13)$$

Эти уравнения необходимо рассматривать при краевых условиях (4.11)-(4.12).

Замечание 2. В случае обобщенного уравнения (4.7) получим обобщенное стационарное уравнение Гельмгольца

$$\mu \Delta^2(\psi) + \lambda \Delta(\psi) + [\Delta(\psi), \psi] - \mathcal{B}^{(3)}(\psi) = 0, \quad (4.14)$$

где

$$\mathcal{B}^{(3)}(\psi) = \psi_{r_1}^2 \psi_{r_1 r_1} + \psi_{r_2}^2 \psi_{r_2 r_2} + 2 \psi_{r_1} \psi_{r_2} \psi_{r_1 r_2} = (H(\psi) \operatorname{grad}(\psi), \operatorname{grad}(\psi)),$$

$H(\psi) := (\psi_{r_j r_k})$ — матрица Гессе вихревой функции.

5. О ПОСТРОЕНИИ СТАЦИОНАРНЫХ РЕЖИМОВ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА-ШМИДТА И О ПЕРЕХОДАХ В УСТОЙЧИВЫЕ РЕЖИМЫ

Анализ обобщенного уравнения Гельмгольца можно осуществлять на основе инструментов функционального анализа, таких, как методы Бубнова-Галеркина (см. [21], [22], [27]),

Ляпунова-Шмидта, Каччиополи и др. (см.[21]-[23]). Об истоках применения методов функционального анализа в гидродинамике можно получить информацию из работ [30], [31].

Опишем в кратком виде редуцирующую процедуру Ляпунова-Шмидта в случае обобщенного стационарного уравнения Гельмгольца. Сначала необходимо представить уравнение (4.13) (с граничными условиями Дирихле-Неймана (4.11)-(4.12)) в виде операторного уравнения

$$f(\psi) := \mu \Delta^2(\psi) + \lambda \Delta(\psi) + [\Delta(\psi), \psi] - \mathcal{B}^{(3)}(\psi) = 0, \quad \psi \in E, \quad (5.1)$$

где $f: E \rightarrow F$, E — пространство функций $\psi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ класса H^4 , удовлетворяющих краевым условиям (4.11)-(4.12), а F — пространство функций $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ класса $H = L_2(\Omega)$, где $\Omega = [0,1] \times [0,1]$. Здесь H^4 — замыкание по норме $\|w\|_4$ множества тригонометрических векторных полей вида $\sum_{p+q=1}^m \xi_{p,q} e_{p,q}$, $p, q \geq 0$, $e_{p,q}(x_1, x_2)$ — нормированная собственная функция оператора Δ^2 (при краевых условиях Дирихле-Неймана).

Собственная функция $e_{p,q}$ отвечает некоторому собственному значению $\lambda_{p,q}$, совокупность функций $\{e_{p,q}\}$ является ортонормированной системой векторов в $L_2(\Omega)$. Для тригонометрического полинома w норма $\|w\|_4$ определена следующим соотношением:

$$\|w\|_4^2 := \iint_{\Omega} w \Delta^4(w) dx_1 dx_2 = \iint_{\Omega} (\Delta^2(w))^2 dx_1 dx_2.$$

Скалярное произведение в H будем обозначать $\langle \cdot, \cdot \rangle$: $\langle \psi, \varphi \rangle = \iint_{\Omega} \psi \varphi dx_1 dx_2$. Оператор $A := \Delta^2$ является положительным и диагонализируемым.

Итак, пусть $e_{p,q}$ — набор ортонормированных (в H_0) собственных функций оператора Δ^2 , соответствующих собственным значениям $\lambda_{p,q}$. При этом $e_{p,q} \perp e_{r,l} \quad \forall k, j, l, r, (p, q) \neq (l, r)$. Перенумеруем затем собственные функции и отвечающие им собственные значения в порядке неубывания собственных значений и представим уравнение (5.1) в виде

$$w + A^{-1} \left(\frac{1}{\mu} \left(\lambda \Delta(w) + [\Delta(w), w] - \mathcal{B}^{(3)}(w) \right) \right) = 0, \quad (5.2)$$

следуя процедуре ортогонального разложения пространства в сумму подпространств:

$$E = N \oplus E^{\infty-n}, \quad F = N \oplus F^{\infty-n},$$

$$N = \text{Lin}(e_1, \dots, e_n), \quad E^{\infty-n} = N^{\perp} \cap E, \quad F^{\infty-n} = N^{\perp} \cap F.$$

При этом имеем

$$A(N) \subset N, \quad A(E^{\infty-n}) \subset F^{\infty-n}.$$

Разложим далее уравнение (5.2) в систему, состоящую из двух уравнений

$$\begin{cases} u + A_1^{-1} P U(u + v) = 0, \\ v + A_2^{-1} (Q U(u + v)) = 0, \end{cases} \quad (5.3)$$

где $A_1 := A|_N$, $A_2 := A|_{N^{\perp} \cap E}$, $N := \text{Lin}(e_1, \dots, e_n)$, $w = u + v$, $u = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k$, $v = \sum_{k=n+1}^{\infty} \xi_k e_k$, $\xi_k = \langle x, e_j \rangle$, $\alpha_k = \langle c, e_k \rangle$, P и Q — ортопроекторы на N и $N^{\perp}$,

$$U(w) := \frac{1}{\mu} \left(\lambda \Delta(w) + [\Delta(w), w] - \mathcal{B}^{(3)}(w) \right).$$

Обратимся также к разложению отображению $f(w)$ в виде (5.3):

$$f(w) = f^{(n)}(w) + f^{(\infty-n)}(w),$$

где

$$f^{(n)}(w) \in N, \quad f^{(\infty-n)}(w) \in F^{\infty-n}.$$

Предположим, что

$$\frac{\partial f^{(\infty-n)}}{\partial v}(0) : E^{\infty-n} \longrightarrow F^{\infty-n}$$

является изоморфизмом (это условие выполняется, если $\lambda \mu^{-1}$ не превосходит собственное значение λ_{n+1}).

Тогда согласно теореме о неявном отображении, существует выражение $v = \Phi(u)$ (для u из некоторой достаточно малой окрестности нуля $\mathcal{O}$ в N), удовлетворяющее соотношению

$$f^{(\infty-n)}(u + \Phi(u)) = 0, \quad \forall u \in \mathcal{O},$$

При этом отображение $\Phi : \mathcal{O} \rightarrow E^{\infty-n}$ является гладким. Для отыскания решения уравнения $f(w) = 0$ в окрестности нуля достаточно найти решение уравнения

$$f^{(n)}(u + \Phi(u)) = 0. \quad (5.4)$$

Отображение $\tau : \mathcal{O} \rightarrow N$, такое что

$$\tau(u) = f^{(n)}(u + \Phi(u))$$

называется *ключевым*. Все топологические и аналитические свойства исходного уравнения и его решений наследуются ключевым уравнением и его решениями. Связь между решениями ключевого и исходного уравнений осуществляется *связывающей формулой*

$$w = u + \Phi(u). \quad (5.5)$$

Уравнение (5.4) также называется *ключевым*. Если положить $\Phi(u) \equiv 0$ (то есть рассмотреть нулевое приближение к связывающей формуле), то получим галеркинскую аппроксимацию отображения f :

$$g(\xi) := f^{(n)}\left(\sum_{k=1}^n \xi_k e_k\right) = 0. \quad (5.6)$$

Известно, что один из базовых принципов исследования решений начально краевых задач для параболических и более общих уравнений основан на том, что уравнение

$$\frac{dv}{dt} + Av = f(t, v), \quad 0 \leq t \leq \alpha, \quad v(0) = v_0,$$

где $f(t, x)$ при каждом $t \in [0, \alpha]$ — нелинейный оператор (при условии, что оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $T(t)$), сводится к интегральному уравнению (метод Дюамеля)

$$v(t) = T(t)v_0 + \int_0^t T(t-s)f(s, v(s))ds$$

(см. [32], с. 469-472).

На основе данного интегрального уравнения можно осуществлять переход инвестиционной динамической системы из произвольного (начального) состояния в устойчивый стационарный режим.

6. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ПУЧКА $\Delta^4 + \lambda \Delta^2$ ПРИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЯХ ДИРИХЛЕ-НЕЙМАНА

6.1. Случай одномерной модели

Построим собственные функции и собственные значения операторного пучка $A + \lambda B : E \rightarrow F$, где $A = \frac{d^4}{dx^4}$, $B = \frac{d^2}{dx^2}$, при краевых условиях Дирихле и Неймана. Пусть $E = \{u \in C^4[0,1] : u(0) = u(1) = u'(0) = u'(1) = 0\}$, $F = C[0,1]$.

Собственные функции операторного пучка $A + \lambda B$ в пространстве E определяются формулой

$$u_k(x) = 1 - \cos(2kx), \quad (6.1)$$

функция (4.2) отвечает собственному значению $\lambda = 4(\pi k)^2$.

Эти же номера будем присваивать отвечающих им нормированным собственным функциям

$$e_k := \frac{u_k}{\nu_k}, \quad \nu_k := \|u_k\|_{H_0}.$$

6.2. Случай двумерной модели

В случае двумерной модели необходимо использовать собственные функции операторного пучка $\mu \Delta^4 + \lambda \Delta^2$, или, что эквивалентно, пучка $\Delta^4 + \tilde{\lambda} \Delta^2$ ($\tilde{\lambda} := \frac{\lambda}{\mu}$):

$$e_{p,q}(x_1, x_2) := e_p(x_1) e_q(x_2),$$

где $e_1(x), e_2(x), \dots, e_n(x), \dots$ — набор всех ортонормированных собственных функций рассмотренного выше одномерного операторного пучка $A + \tilde{\lambda} B$ (пронумерованный в порядке возрастания соответствующих собственных значений).

Пусть $g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)$ — набор собственных функций пучка двумерных операторов, пронумерованный в порядке неубывания соответствующих собственных значений (без пропусков собственных векторов).

Для получения необходимых приближенных данных можно обратиться к общей (m -мерной) аппроксимации Галеркина — системе уравнений

$$f_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = f_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \dots, f_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = 0$$

в которой (см. [21])

$$f_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) := \langle f(u), g_k \rangle, \quad \xi_j = \langle x, g_j \rangle.$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в $L_2[\Omega]$, $u := \xi_1 g_1 + \xi_2 g_2 + \dots \xi_m g_m$. Мы ограничимся рассмотрением лишь аппроксимаций Галеркина по первой моде, первым трем модам и первым шести модам. Эти аппроксимации могут дать неплохую вычислительную точность вследствие высокой интенсивности роста собственных значений операторного пучка из главной части модельного уравнения.

В результате компьютерных вычислений были получены приближения к стационарной вихревой функции $\psi(x, y)$ со следующими линиями уровней (при различных значениях параметра вязкости) (рис. 3–5).

На рисунках 3–5 можно наблюдать присутствие равновесных фазовых точек.

6.3. Замечания к многомерной модели

В случае многомерного уравнения (4.7) имеем обобщенное стационарное уравнение Гельмгольца в виде

$$\mu \Delta^2(\psi) + \lambda \Delta(\psi) + \mathcal{B}^{(2)}(\psi) - \mathcal{B}^{(3)}(\psi) = 0, \quad (6.2)$$

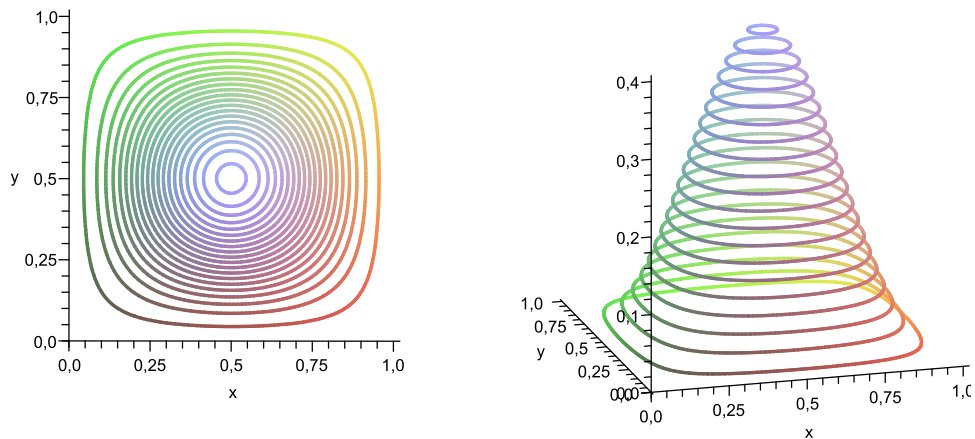


Рис. 3. Линии уровней и график приближенно вычисленной стационарной вихревой функции в случае аппроксимаций Галеркина по одной моде.

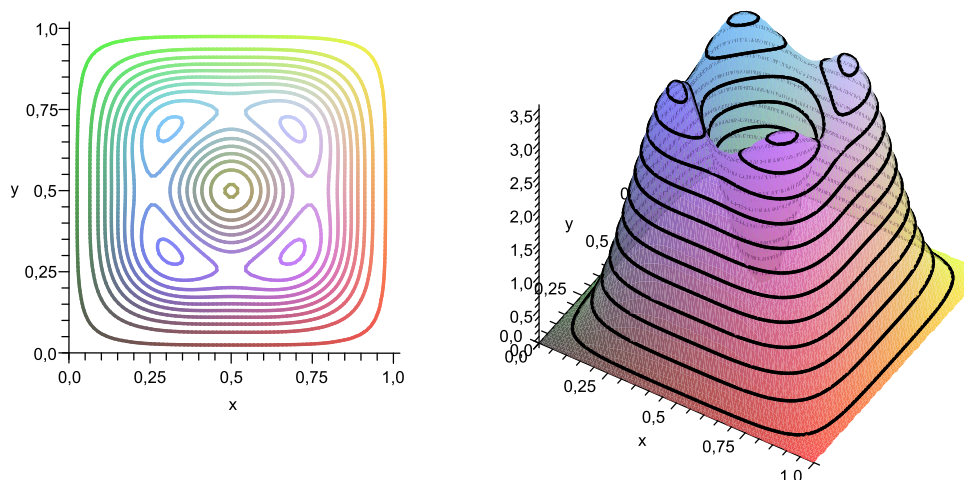


Рис. 4. Линии уровней и график приближенно вычисленной стационарной вихревой функции в случаях аппроксимаций Галеркина по трем модам.

где $\mathcal{B}^{(2)}(\psi)$ и $\mathcal{B}^{(3)}(\psi)$ — квадратичный и кубический операторы. При $n = 3$ оператор $\mathcal{B}^{(2)}$ указан в [28], а оператор $\mathcal{B}^{(3)}$ имеет несколько более сложную структуру по сравнению с двумерным случаем. В многомерном случае переход к аналогу уравнения Гельмгольца можно представить как замену операторного уравнения

$$f(v) = \text{grad } p, \quad f(v) := \mu \Delta(v) - \frac{\partial v}{\partial r} v + v (\lambda - \|v\|^2),$$

на уравнение

$$\hat{f}(\psi) = 0, \quad \hat{f}(\psi) := d^*(f(d^*(\psi))),$$

где $d^* := * \cdot d$ — оператор из $\mathcal{D}_1^2$ в $\mathcal{D}_{n-2}^1$ и из $\mathcal{D}_{n-2}^2$ в $\mathcal{D}_1^1$, $\mathcal{D}_q^r$ — пространство дифференциальных q -форм на $\mathbb{R}^n$:

$$\omega := \sum_{k_1, \dots, k_q} \omega_{k_1, \dots, k_q}(x) dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_q}, \quad \omega_{k_1, \dots, k_q}(x) \in C^r(\mathbb{R}^n), \quad k_1 < k_2 < \dots < k_q.$$

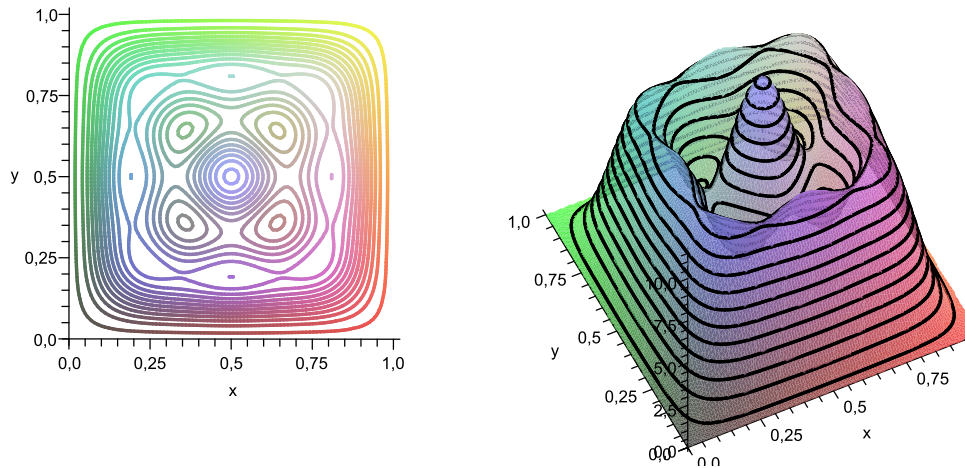


Рис. 5. Линии уровней и график приближенно вычисленной стационарной вихревой функции в случаях аппроксимаций Галеркина по шести модам.

Здесь d — оператор дифференцирования форм [33]:

$$\sum_{k_1, \dots, k_q} \omega_{k_1, \dots, k_q}(x) dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_q} \mapsto \sum_{k_1, \dots, k_q} \left(\sum_j \frac{\partial \omega_{k_1, \dots, k_q}(x)}{\partial x_j} dx_j \right) \wedge dx_{k_1} \wedge \dots \wedge dx_{k_q},$$

$*$ — оператор перехода от формы ω к двойственной форме:

$$\omega^* := \sum_{r_1, \dots, r_{n-q}} \sigma(r_1, \dots, r_{n-q}) \omega_{r_1, \dots, r_{n-q}} dx_{r_1} \wedge \dots \wedge dx_{r_{n-q}}$$

$$\omega_{r_1, \dots, r_{n-q}} := \omega_{k_1, \dots, k_q}, \quad \{r_1, \dots, r_{n-q}\} := \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k_1, \dots, k_q\},$$

$\sigma(k_1, \dots, k_q) := \det(e_{k_1}, \dots, e_{k_q}, e_{r_1}, \dots, e_{r_{n-q}})$ — определитель матрицы, составленной из единичных столбцов, в столбце e_k k -ая компонента равна единице, а остальные равны нулю.

Обобщенное уравнение Гнльмгольца в форме (6.2) можно получить на основе несложно проверяемого соотношения

$$(d^*)^2(\omega) = \sum_{k=1}^n \left(-\Delta(v_k) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\operatorname{div}(v)) \right) dx_k, \quad (6.3)$$

где $\omega := \sum_{q=1}^n v_q dx_q$, $v = (v_1, \dots, v_n)^\top$ — вектор скорости потока инвестиций.

При $n = 3$ оператор d^* является классическим ротором, а при $n > 3$ — его многомерным аналогом.

Более подробному описанию многомерного случая будет посвящена отдельная публикация.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Институциональная экономика: Новая институциональная экономическая теория / А. Аузан и др. — М. : ИНФРА-М, 2011. — 266 с.
2. Арнольд, В. И. «Жёсткие» и «мягкие» математические модели / В. И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2008. — 32 с.
3. Маслов, В. П. Квантовая экономика / В. П. Маслов. — М. : Наука, 2006. — 92 с.

4. Митягин, Б. С. Заметки по математической экономике / Б. С. Митягин // Успехи математических наук. — 1972. — Т. 27, вып. 3. — С. 3–19.
5. Занг, В. Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / В. Б. Занг. — М. : Мир, 1999. — 335 с.
6. Пу, Е. Нелинейная экономическая динамика / Е. Пу // Ижевск : Издательский дом "Удмуртский университет", 2000. — 200 с.
7. Замков, О. О. Математические методы в экономике / О. О. Замков, А. В. Толстомятенко, Ю. Н. Черемных. — М., 1998. — 368 с.
8. Воркуев, Б. Л. Модели макро- и микроэкономики / Б. Л. Воркуев. — М. : ТЕИС, 1999. — 235 с.
9. Колемаев, В. А. Математическая экономика / В. А. Колемаев. — М. : ЮНИТИ, 1998. — 240 с.
10. Медведев, Д. А. Социально-экономическое развитие России: обретение новой динамики / Д. А. Медведев // Вопросы экономики. — 2016. — № 10. — С. 5–30.
11. Гельман, Л. М. Модели инновационных процессов (обзор зарубежной литературы) / Л. М. Гельман, М. И. Левин // Экономика и математические методы. — 1989. — № 6.
12. Полтерович, В. М. Эволюционная модель взаимодействия процессов создания и заимствования технологий / В. М. Полтерович, Г. М. Хенкин // Экономика и математические методы. — 1988. — № 6.
13. Моделирование динамики распределения предприятий отрасли по уровням эффективности (на примере черной металлургии) / Л. М. Гельман, М. И. Левин, В. М. Полтерович, В. А. Спивак // Экономика и математические методы. — 1993. — Т. 29, № 3.
14. Полтерович, В. М. Гипотеза об инновационной паузе и стратегия модернизации / В. М. Полтерович // Вопросы экономики. — 2009. — № 6.
15. Балацкий, Е. В. Моделирование процессов межсекторальной конкуренции / Е. В. Балацкий // Общество и экономика. — 2008. — № 5.
16. Балацкий, Е. В. Технологическая диффузия и инвестиционные решения / Е. В. Балацкий // Журнал Новой экономической ассоциации. — 2012. № 3(15).
17. Ташлицкая, Я. М. Моделирование процесса распространения технологий / Я. М. Ташлицкая, А. А. Шананин. — М. : Вычислительный центр РАН, 2000.
18. Burgers, J. M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence / J. M. Burgers. — Advances in Applied Mechanics, 1948.
19. Cahn, J. W. Free energy of a nonuniform system I. Interfacial free energy / J. W. Cahn, J. E. Hilliard // J. Chem. Phys. — 1958. — V. 28. — P. 258–267.
20. Скрипов, В. П. Спинодальный распад (Фазовый переход с участием неустойчивых состояний) / В. П. Скрипов, А. В. Скрипов // УФН. — 1979. — Т. 123, вып. 2. — С. 193–231.
21. Приближенное решение операторных уравнений / М. А. Красносельский и др. — М. : Наука, 1969. — 456 с.
22. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука. 1975. — 512 с.
23. Борисович, Ю. Г. Нелинейные фредгольмовы отображения и теория Лере-Шаудера / Ю. Г. Борисович, В. Г. Звягин, Ю. И. Сапронов // Успехи матем. наук. — 1977. — Т. 32, вып. 4. — С. 3–54.
24. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–134.
25. Костин, Д. В. Функциональный анализ и многомодовые прогибы упругих систем / Д. В. Костин, Ю. И. Сапронов. — Воронеж : ИПЦ ВГУ, 2012. — 207 с.

26. К моделированию структурной перестройки посредством нелинейного уравнения диффузии / А. С. Коротких, Д. В. Костин, Т. И. Костина, Ю. И. Сапронов // Насосы. Турбины. Системы. — 2015. — № 1 (14). — С. 81–85.
27. Арнольд, В. И. Топологические методы в гидродинамике / В. И. Арнольд, Б. А. Хесин. — М. : МЦНМО. 2007. — 392 с.
28. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидродинамика, ч. 2 / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — М. : Физматгиз, 1963. — 728 с.
29. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука. 1986. — 736 с.
30. Крейн, С. Г. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве и их приложение в гидромеханике / С. Г. Крейн // Усп. матем. наук. — 1957. — Т. 12, вып. 1(73). — С. 208–211.
31. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуи Кан. — М. : Наука, 1989. — 416 с.
32. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский. — М. : Наука, 1966. — 499 с.
33. Годбийон, К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика / К. Годбийон. — М. : Мир. 1973. — 188 с.

REFERENCES

1. Auzan A. et. al. Institutional economy: The new institutional economic theory. [Auzan A. i dr. Institucional'naya ekonomika: Novaya institucional'naya ekonomicheskaya teoriya]. Moscow, 2011, 266 p.
2. Arnold V.I. «Rigid» and «soft» mathematical models. [Arnol'd V.I. «Zhyostkie» i «myagkie» matematicheskie modeli]. Moscow, 2008, 32 p.
3. Maslov V.P. Quantum economy. [Maslov V.P. Kvantovaya ekonomika]. Moscow, 2006, 92 p.
4. Mityagin B.S. Notes on mathematical economy. [Mityagin B.S. Zametki po matematicheskoy ekonomike]. *Usperi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1972, vol. 27, iss. 3, pp. 3–19.
5. Zang V.B. Sinergeticheskaya economy. Time and changes in the nonlinear economic theory. [Zang V.B. Sinergeticheskaya ekonomika. Vremya i peremeny v nelineyjoy ekonomicheskoy teorii]. Moscow, 1999, 335 p.
6. Pu E. Nonlinear economic dynamics. [Pu E. Nelineyjnaya ekonomicheskaya dinamika]. Izhevsk, 2000, 200 p.
7. Zamkov O.O., Tolstopyatenko A.V., Cheremnykh Yu.N. Mathematical methods in economy. [Zamkov O.O., Tolstopyatenko A.V., Cheremnykh Yu.N. Matematicheskie metody v ekonomike]. Moscow, 1998, 368 p.
8. Vorkuyev B.L. Models macro- and microeconomics. [Vorkuev B.L. Modeli makro- i mikroekonomiki]. Moscow, 1999, 235 p.
9. Kolemeyev V.A. Matematicheskaya economy. [Kolemaev V.A. Matematicheskaya ekonomika]. Moscow, 1998, 240 p.
10. Medvedev D.A. Social and economic development of Russia: finding new dynamics. [Medvedev D.A. Social'no-ekonomicheskoe razvitie Rossii: obretnenie novoyj dinamiki]. *Voprosy ekonomiki — Economy Questions*, 2016, no. 10, pp. 5–30.
11. Gelman L.M., Levin M.I. Models of innovative processes (review foreign literature). [Gelman L.M., Levin M.I. Modeli innovacionnyx processov (obzor zarubezhnoy literatury)]. *Ekonomika i matematicheskie metody — Economy and mathematical methods*, 1989, no. 6.
12. Polterovich V.M., Henkin G.M. Evolutionary model of interaction of processes creations and loans of technologies. [Polterovich V.M., Henkin G.M. Evolyucionnaya model' vzaimodeystviya

processov sozdaniya i zaimstvovaniya texnologiy]. *Ekonomika i matematicheskie metody — Economy and mathematical methods*, 1988, no. 6.

13. Gelman L.M. et. al. Modeling of dynamics of distribution of the enterprises branches on efficiency levels (on the example of ferrous metallurgy). [Gelman L.M. i dr. Modelirovanie dinamiki raspredeleniya predpriyatij otrasli po urovnjam effektivnosti (na primere chernoy metallurgii)]. *Ekonomika i matematicheskie metody — Economy and mathematical methods*, 1993, vol. 29, no. 3.

14. Polterovich V.M. Gipotez about an innovative pause and strategy modernizations. [Polterovich V.M. Gipoteza ob innovacionnoy pauze i strategiya modernizacii]. *Voprosy ekonomiki — Questions of economy*, 2009, no. 6.

15. Balatsky E.V. Modeling of processes of the intersectoral competition. [Balackiy E.V. Modelirovanie processov mezhsektoral'noy konkurencii]. *Obshchestvo i ekonomika — Society and economy*, 2008, no. 5.

16. Balatsky E.V. Tekhnologicheskaya diffusion and investment decisions. [Balackiy E.V. Tekhnologicheskaya diffuziya i investicionnye resheniya]. *Zhurnal Novoy ekonomicheskoy associacii — Magazine of New economic association*, 2012. no. 3(15).

17. Tashlitskaya Ya.M., Shananin A.A. Modelling of process of distribution of technologies. [Tashlitskaya Ya.M., Shananin A.A. Modelirovanie processa rasprostraneniya texnologiy]. Moscow, 2000.

18. Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, 1948.

19. Cahn J.W., Hilliard J.E. Free energy of a nonuniform system I. Interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, 1958, vol. 28, pp. 258–267.

20. Skripov V.P., Skripov A.V. Spinodalny disintegration (Phase transition with participation unstable states). [Skripov V.P., Skripov A.V. Spinodal'nyy raspad (Fazovyy perexod s uchastiem neustoychivyx sostoyaniy)]. *Uspehi fizicheskix nauk — Physics-Uspekhi*, 1979, vol. 123, iss. 2, pp. 193–231.

21. Krasnoselsky M.A. et. al. Approximate solution of the operator equations. [Krasnoselsky M.A. i dr. Priblizhennoe reshenie operatornykh uravneniy]. Moscow, 1969, 456 p.

22. Krasnoselsky M.A., Zabreyko P.P. Geometrical methods of the nonlinear analysis. [Krasnoselsky M.A., Zabreyko P.P. Geometricheskie metody nelineynogo analiza]. Moscow, 1975, 512 p.

23. Borisovich Yu.G. et. al. Nonlinear Fredholm displays and theory Leray-Schauder. [Borisovich Yu.G. Nelineynye fredgol'movy otobrazheniya i teoriya Lere-Shaudera]. *Uspehi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1977, vol. 32, iss. 4, pp. 3–54.

24. Darinsky B.M., Saponov Yu.I., Tsaryov S.L. Bifurcations of extremals of Fredholm functionalities. [Darinsky B.M., Saponov Yu.I., Tsaryov S.L. Bifurkacii ekstremaley fredgol'movykh funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 12, pp. 3–134.

25. Kostin D.V., Saponov Yu.I. Functional analysis and multimode deflections of elastic systems. [Kostin D.V., Saponov Yu.I. Funkcional'nyy analiz i mnogomodovye progiby uprugix sistem]. Voronezh, 2012, 207 p.

26. Korotkix A. S., Kostin D.V., Kostina T.I., Saponov Yu.I. To modeling of restructuring by means of nonlinear equation of diffusion. [Korotkix A. S., Kostin D.V., Kostina T.I., Saponov Yu.I. K modelirovaniyu strukturnoy perestroyki posredstvom nelineynogo uravneniya diffuzii]. *Nasosy. Turbiny. Sistemy — Pumps. Turbines. Systems*, 2015, no. 1 (14), pp. 81–85.

27. Arnold V.I., Hesin B.A. Topological methods in hydrodynamics. [Arnold V.I., Hesin B.A. Topologicheskije metody v gidrodinamike]. Moscow, 2007, 392 p.

28. Kochin N.E., Kibel I.A., Roza N.V. Teoreticheskaya of the hydrodynamics engineer, part 2. [Kochin N.E., Kibel I.A., Roza N.V. Teoreticheskaya gidrodinamika, ch. 2]. Moscow, 1963, 728 p.

29. Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya of the physicist. T. VI. Gidrodinamika. [Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. T. VI. Gidrodinamika]. Moscow, 1986, 736 p.

30. Krein S.G. The differential equations in banakhovy space and them the appendix in a hydromechanics. [Krein S.G. Differentsial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve i ix prilozhenie v gidromexanike]. *Usperi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1957, vol. 12, iss. 1(73), pp. 208–211.

31. Kopachevsky N.D., Krein S.G., Ngo Zuy Kan Operator methods in linear hydrodynamics: Evolutionary and spectral tasks. [Kopachevsky N.D., Krein S.G., Ngo Zuy Kan Operatorynye metody v lineynoy gidrodinamike: Evolyucionnye i spektral'nye zadachi]. Moscow, 1989, 416 p.

32. Krasnoselsky M.A. et. al. Integrated operators in spaces summable functions. [Krasnoselsky M.A. i dr. Integral'nye operatory v prostranstvax summiruemykh funkciy]. Moscow, 1966, 499 p.

33. Godbiyon K. Differential geometry and analytical mechanics. [Godbiyon K. Differentsial'naya geometriya i analiticheskaya mekhanika]. Moscow, 1973, 188 p.

Сапронов Ю. И., профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: yusapr@mail.ru

Sapronov Yu.I., Voronezh State University, professor, Voronezh, Russian Federation
E-mail: yusapr@mail.ru

Владимирова О. В., магистр кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация

Vladimirova O. V., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

Ковалева М. И., доцент кафедры математики, Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация
Тел.: marinkov@mail.ru

Kovaleva M. I., Military educational scientific center of the Air Force «Military and air academy of a name of professor N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin»
Tel.: marinkov@mail.ru

Костин Д. В., доктор ф.-м. наук, доцент кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
Тел.: yusapr@mail.ru

Kostin D. V., Voronezh State University, associate professor, Voronezh, Russian Federation
Tel.: yusapr@mail.ru

Царев С. Л., кафедра математического моделирования, доцент, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
Тел.: p-tzareff@yandex.ru

Tsarev S. L., Voronezh State University, associate professor, Voronezh, Russian Federation
Tel.: p-tzareff@yandex.ru