УДК 517.984

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВОЗМУЩЕННОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ЗАДАЧИ ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ*

И. В. Курбатова

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.09.2019 г.

Аннотация. Рассматривается уравнение $u'(t)-Au-Bu=f$ с неограниченным оператором A. Предполагается, что невозмущенное уравнение $u'(t)-Au=f$ имеет единственное непрерывное и ограниченное на $\mathbb{R}$ решение u для любой непрерывной ограниченной функции f. Изучается задача о представлении решения при малых возмущениях B.

Ключевые слова: задача об ограниченных решениях, функция Грина, замкнутый оператор, возмущение.

REPRESENTATION OF PERTURBED GREEN'S FUNCTION OF THE BOUNDED SOLUTIONS PROBLEM

I. V. Kurbatova

Abstract. The equation $u'(t)-Au-Bu=f$ with an unbounded operator A is considered. It is assumed that the unperturbed equation $u'(t)-Au=f$ has a unique bounded on $\mathbb{R}$ continuous solution u for any bounded continuous function f. The problem of the representation of solutions for small perturbations B is investigated.

Keywords: bounded solutions problem, Green's function, closed operator, perturbation.

ВВЕДЕНИЕ

В виде операторного уравнения

$$u'(t)-Au(t)=f(t), \qquad t\in\mathbb{R},$$

с неограниченным коэффициентом A могут быть записаны многие уравнения с частными производными. Задачей об ограниченных решениях для такого уравнения называют задачу о нахождении решений $u\in C$ для $f\in C$, где C — пространство всех непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}$ функций. Известно [1], что условием существования единственного решения $u\in C$ для произвольной $f\in C$ является гиперболичность (экспоненциальная дихотомичность) полугруппы, порожденной оператором A. В этом случае оператор $f\mapsto x$, дающий решение, является интегральным; его ядро называют функцией Грина. В статье описывается (теорема 20) выражение функции Грина возмущенного уравнения $u'(t)-Au(t)-Bu(t)=f(t)$ через функцию Грина невозмущенного.

1. НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этом параграфе напоминаются некоторые сведения о неограниченных операторах [2], [3], [4], [5], [6].

* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 19-01-00732 А.

Пусть X и Y — банаховы пространства. Рассмотрим линейный оператор T, областью определения которого является линейное подпространство $D(T) \subseteq X$, а множеством значений — пространство Y. Символически это записывают так:

$$T : D(T) \subset X \to Y,$$

но говорят, что *T действует из X в Y с областью определения* $D(T)$. Такой оператор T часто называют *неограниченным*, поскольку допускается, чтобы его норма равнялась бесконечности. Множество всех линейных операторов, действующих из X в Y, но определенных не обязательно на всем X, обозначим через $\mathbf{L}(X,Y)$. Если $X = Y$, то будем использовать сокращение $\mathbf{L}(X)$.

Сумма двух неограниченных операторов (как и любых функций) определена на пересечении областей определения, а *произведение* — на тех векторах, для которых суперпозиция имеет смысл. *Обратным* к оператору $T : D(T) \subset X \to Y$ называют оператор $T^{-1} : Y \to D(T)$, удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{aligned} &T^{-1}Tx = x, \qquad && x \in D(T),\\ &TT^{-1}y = y, \qquad && y \in Y. \end{aligned}$$

Подразумевается, что T^{-1} определен на всем Y. Обычно T^{-1} рассматривают как действующий из Y в X, а не из Y в $D(T)$.

Введем на $X \times Y$ норму

$$\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|.$$

Очевидно, относительно этой нормы $X \times Y$ является банаховым пространством. *Графиком* оператора $T \in \mathbf{L}(X,Y)$ называют подмножество $\Gamma \subset X \times Y$, определяемое формулой

$$\Gamma = \Gamma(T) = \{\, (x,Tx) : x \in D(T) \,\}.$$

Очевидно, график образует подпространство. Оператор $T \in \mathbf{L}(X,Y)$ называют *замкнутым*, если его график замкнут. Множество всех замкнутых операторов $T \in \mathbf{L}(X,Y)$ обозначим символом $\mathbf{C}(X,Y)$. Символом $\mathbf{B}(X,Y)$ обозначим множество всех линейных ограниченных операторов $T : X \to Y$, определенных на всем X. Как обычно, $\mathbf{C}(X)$ и $\mathbf{B}(X)$ означают $\mathbf{C}(X,X)$ и $\mathbf{B}(X,X)$ соответственно.

Предложение 1 (см., например, [5, предложение 99])**.** *Оператор $T \in \mathbf{L}(X,Y)$ замкнут тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \in D(T)$ из существования x и y таких, что $x_n \to x$ и $Tx_n \to y$ следует, что $x \in D(T)$ и $Tx = y$.*

Следствие 2. *Все операторы $T \in \mathbf{B}(X,Y)$ замкнуты.*

Следствие 3. *Пусть $T \in \mathbf{L}(X,Y)$ обратим, причем обратный* (*определен на всем Y и*) *ограничен. Тогда оператор T замкнут.*

Следствие 4. *Пусть $A \in \mathbf{C}(X,Y)$, а $B \in \mathbf{B}(X,Y)$. Тогда оператор $A + B$ замкнут.*

Предложение 5 (см., например, [5, предложение 103])**.** *Пусть оператор $T \in \mathbf{C}(X,Y)$ ограничен. Тогда его область определения замкнута.*

Если график оператора T не замкнут, но замыкание графика является графиком некоторого оператора, обозначаемого $\overline{T}$, то оператор T называют *замыкаемым*. Ясно, что $\overline{T}$ — наименьшее замкнутое расширение T. Его называют *замыканием* T.

Теорема 6 (см., например, [5, теорема 105]). *Пусть оператор $T \in \mathbf{L}(X,Y)$ замыкаем, плотно определен и имеет ограниченный левый обратный T_l^{-1}, причем образ $\operatorname{Im} T$ всюду плотен в Y. Тогда замыкание $\overline{T_l^{-1}}$ левого обратного T_l^{-1} является обратным к $\overline{T}$.*

Предложение 7 (см., например, [5, предложение 106]). *Для того чтобы подпространство $\Gamma \subset X \times Y$ было графиком некоторого оператора, необходимо и достаточно, чтобы из $(x,0) \in \Gamma$ следовало $x = 0$.*

Предложение 8. *Пусть $T \in \mathbf{C}(X,Y)$. Тогда относительно нормы*

$$\|x\|_{D(T)} = \|x\|_X + \|Tx\|_Y, \qquad x \in D(T), \tag{1.1}$$

линейное пространство $D(T)$ является банаховым.

Норму (1.1) называют *нормой графика*.

Теорема 9 (о замкнутом графике [2, теорема II.6.1]). *Если область определения замкнутого оператора совпадает со всем пространством, то он ограничен.*

Следствие 10. *Обратный к замкнутому оператору $A \in \mathbf{C}(X,Y)$ ограничен как действующий из Y в X.*

Символом $\mathbf{1}$ будем обозначать тождественный оператор.

Пусть $T \in \mathbf{L}(X)$. Множество всех $\lambda \in \mathbb{C}$ таких, что оператор $\lambda\mathbf{1} - T$ не имеет ограниченного обратного (определенного на всем X), называют *спектром* T и обозначают символом $\sigma(T)$. Дополнение $\rho(T) = \mathbb{C} \backslash \sigma(T)$ называют *резольвентным множеством* T. Наконец, функцию $R_\lambda = (\lambda\mathbf{1} - T)^{-1}$ называют *резольвентой* T; областью определения резольвенты является множество $\rho(T)$. Подчеркнем, что по определению $R_\lambda \in \mathbf{B}(X)$.

Следующее предложение показывает, что понятие спектра содержательно только для замкнутых операторов.

Предложение 11 (см., например, [5, предложение 110]). *Если резольвентное множество оператора $T \in \mathbf{L}(X)$ не пусто, то оператор T замкнут.*

Теорема 12. *Пусть X и Y — банаховы пространства, а $A \in \mathbf{C}(X,Y)$, $B \in \mathbf{B}(X,Y)$, причем A обратим. Если*

$$\|B\|_{X \to Y} \cdot \|A^{-1}\|_{Y \to X} < 1,$$

то оператор $A - B$ также обратим. При этом

$$(A - B)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}BA^{-1} + A^{-1}BA^{-1}BA^{-1} + \dots . \tag{1.2}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд (1.2). Он состоит из ограниченных операторов, действующих из Y в X, и в силу оценки

$$\|B\| \cdot \|A^{-1}\| < 1,$$

абсолютно сходится. Обозначим его сумму через C. Подчеркнем, что образ C содержится в $D(A)$. Проверим, что C совпадает с обратным к $A - B$. Для $x \in D(A)$ имеем

$$\begin{aligned} C(A - B)x &= \big(\mathbf{1} + A^{-1}B + A^{-1}BA^{-1}B + \dots\big)A^{-1}(Ax - Bx) = \\ &= \big(\mathbf{1} + A^{-1}B + A^{-1}BA^{-1}B + \dots\big)(\mathbf{1} - A^{-1}B)x = \\ &= (x - A^{-1}Bx) + (A^{-1}Bx - A^{-1}BA^{-1}Bx) + \\ &\quad + (A^{-1}BA^{-1}Bx - A^{-1}BA^{-1}BA^{-1}Bx) + \dots = x. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что $(A-B)C=\mathbf{1}$: для $y\in Y$ имеем

$$\begin{aligned}(A-B)Cy &= (A-B)A^{-1}\big(\mathbf{1}+BA^{-1}+BA^{-1}BA^{-1}+\dots\big)y=\\ &=(\mathbf{1}-BA^{-1})\big(\mathbf{1}+BA^{-1}+BA^{-1}BA^{-1}+\dots\big)y=\\ &=(y-BA^{-1})y+(BA^{-1}-BA^{-1}BA^{-1})y+\\ &\quad+(BA^{-1}BA^{-1}-BA^{-1}BA^{-1}BA^{-1})y+\dots=y. \quad \square\end{aligned}$$

2. ЗАДАЧА ОБ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЯХ

Пусть X — банахово пространство. Символом $C=C(\mathbb{R},X)$ обозначим банахово пространство, состоящее из всех непрерывных ограниченных функций $u:\mathbb{R}\to X$ с нормой

$$\|x\|=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|x(t)\|.$$

Полугруппой (класса C_0) называют [2, с. 321], [6, § 10.6], [7, с. 36] отображение $T:[0,\infty)\to\mathbf{B}(X)$, обладающее свойствами

(a) $T(t+s)=T(t)T(s)$ для всех $t,s\geqslant 0$,

(b) $T(0)=\mathbf{1}$,

(c) для любого $x\in X$ функция $x\mapsto T(t)x$, $t\geqslant 0$, непрерывна по норме.

Полугруппу называют [8, с. 28, § 2.1.4] *гиперболической*, если спектр $T(t)$ не пересекает единичную окружность $\{\,\lambda\in\mathbb{C}:\ |\lambda|=1\,\}$ хотя бы при одном (равносильный вариант — при всех) $t>0$.

Предложение 13 ([8, с. 29, лемма 2.15])**.** *Полугруппа T является гиперболической тогда и только тогда, когда существует разложение пространства $X=X_s\oplus X_u$ в прямую сумму замкнутых подпространств X_s и X_u, инвариантных относительно $T(t)$, $t\geqslant 0$, такое, что сужения*

$$T_s(t)=T(t)\big|_{X_s},\qquad T_u(t)=T(t)\big|_{X_u}$$

обладают следующими свойствами:

(s) *существуют такие $N<\infty$ и $\nu>0$, что*

$$\big\|T_s(t)\big\|\leqslant Ne^{-\nu(t-\tau)}\big\|T_s(\tau)\big\|,\qquad t\geqslant\tau\geqslant 0.$$

(u) *операторы $T_u(t):X_u\to X_u$, $t\geqslant 0$, обратимы и существуют такие $N<\infty$ и $\nu>0$, что*

$$\big\|[T_u(\tau)]^{-1}\big\|\leqslant Ne^{-\nu(\tau-t)}\big\|[T_u(t)]^{-1}\big\|,\qquad \tau\geqslant t\geqslant 0.$$

Условимся обозначать операторы $[T_u(-t)]^{-1}:X_u\to X_u$ при $t\leqslant 0$ символом $T_u(t)$. Проекторы, порожденные разложением $X=X_s\oplus X_u$, будем в дальнейшем обозначать P_s и P_u.

Инфинитезимальным генератором полугруппы $T(\cdot)$ называют [2, с. 327], [6, § 10.3], оператор

$$Ax=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{(T(\varepsilon)-\mathbf{1})x}{\varepsilon},$$

областью определения $D(A)$ которого является множество всех тех $x\in X$, для которых этот предел существует.

Предложение 14 ([6, теорема 10.3.1], [2, с. 328 и 333]). *Инфинитезимальнй генератор (полугруппы класса C_0) является замкнутым, его область определения плотна в X.*

Предложение 15 ([2, с. 330]). *Пусть $x \in D(A)$. Тогда $T(t)x \in D(A)$ и*

$$T(t)Ax = AT(t)x = \lim_{\varepsilon \to \pm 0} \frac{(T(t+\varepsilon) - T(t))x}{\varepsilon}$$

Предложение 16 ([4, с. 158, теорема 6.1]). *Пусть A — инфинитезимальный генератор полугруппы $T(\cdot)$, $f \in C(\mathbb{R},X)$, а $u : \mathbb{R} \to D(A)$ — решение дифференциального уравнения*

$$u'(t) = Au(t) + f(t).$$

Тогда для любых $s \leqslant t$

$$u(t) = T(t-s)u(s) + \int_s^t T(t-\tau)f(\tau)\,d\tau. \tag{2.1}$$

Определим [9], [10], [1] дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - A.$$

Его областью определения $D(\mathcal{L})$ будем считать множество всех функций $u \in C$, для которых существует такая функция $f \in C$, что при всех $s \leqslant t$ выполняется равенство (2.1). При этом положим $\mathcal{L}u = f$.

Предложение 17 ([1, следствие 3.5]). *Оператор $\mathcal{L}$ замкнут.*

Предложение 18 ([1, теорема 3.3]). *Если полугруппа T является гиперболической, то порожденный ею дифференциальный оператор $\mathcal{L}$ является обратимым, т.е. для любого свободного члена $f \in C$ существует единственное $u \in C$, удовлетворяющее соотношению $\mathcal{L}u = f$.*

При этом

$$\big(\mathcal{L}^{-1}f\big)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(t-\tau)f(\tau)\,d\tau,$$

где

$$\mathcal{G}(t) = \begin{cases} T_s(t)P_s & \text{при } t \geqslant 0, \\ -T_u(t)P_u & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Функцию $\mathcal{G}$ будем называть *функцией Грина* задачи об ограниченных решениях уравнения $\mathcal{L}u = f$.

3. ВОЗМУЩЕНИЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ ПОЛУГРУППЫ

Предложение 19 (см., например, [11, теорема 4.4.11(g)]). *Пусть $\mathcal{G}_1 \in L_1\big(\mathbb{R},\mathbf{B}(X)\big)$ и $\mathcal{G}_\infty \in L_\infty\big(\mathbb{R},\mathbf{B}(X)\big)$. Тогда свертка*

$$\big(\mathcal{G}_1 * \mathcal{G}_\infty\big)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_1(t-s)\mathcal{G}_\infty(s)\,ds$$

является непрерывной функцией и справедлива оценка

$$\big\|\big(\mathcal{G}_1 * \mathcal{G}_\infty\big)(t)\big\| \leqslant \|\mathcal{G}_1\|_{L_1} \cdot \|\mathcal{G}_\infty\|_{L_\infty}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Теорема 20. *Пусть $A \in \mathbf{C}(X)$ — инфинитезимальный генератор гиперболической полугруппы T, а $\mathcal{G}_A$ — функция Грина задачи об ограниченных решениях уравнения $\mathcal{L}u = f$. И пусть оператор $B \in \mathbf{B}(X)$ удовлетворяет условию*

$$\|B\| \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{G}_A(t)\| \, dt < 1. \tag{3.1}$$

Тогда для любого свободного члена $f \in C$ существует единственное решение $u \in C$ уравнения

$$(\mathcal{L} - B)u = f, \tag{3.2}$$

причем это решение представимо в виде

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}_{A+B}(t-\tau) f(\tau) \, d\tau,$$

где $\mathcal{G}_{A+B}$ допускает представление в виде равномерно сходящегося ряда

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{A+B}(t) = \mathcal{G}_A(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_A(t-t_1) B \mathcal{G}_A(t_1) \, dt_1 + \ldots \\ \ldots + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_A(t-t_1) B \mathcal{G}_A(t_1 - t_2) B \ldots B \mathcal{G}_A(t_k) \times \\ \times \, dt_k \ldots dt_2 \, dt_1 + \ldots . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Доказательство. Рассмотрим операторы $\mathcal{L} : C^1 \subset C \to C$ и $\mathcal{B} : C \to C$, определенные по формулам

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{L}u\big)(t) &= u'(t) - Au(t), \\ \big(\mathcal{B}u\big)(t) &= Bu(t). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\|\mathcal{L}\|_{C \to C} \leqslant \|\mathcal{G}_A\|_{L_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{G}_A(t)\| \, dt.$$

Поэтому в силу условия теоремы

$$\|\mathcal{B}\|_{C \to C} \cdot \|\mathcal{L}^{-1}\|_{C \to C} < 1.$$

Таким образом, в силу теоремы 12

$$(\mathcal{L} - \mathcal{B})^{-1} = \mathcal{L}^{-1} + \mathcal{L}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{L}^{-1} + \mathcal{L}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{L}^{-1} + \ldots .$$

Следовательно, решение уравнения (3.2) представимо в виде

$$u = \mathcal{L}^{-1}f + \mathcal{L}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{L}^{-1}f + \mathcal{L}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{L}^{-1}\mathcal{B}\mathcal{L}^{-1}f + \ldots .$$

Или подробнее

$$\begin{aligned} u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_A(s) f(t-s) \, ds + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_A(s-t_1) B \mathcal{G}_A(t_1) f(t-s) \, dt_1 \, ds + \ldots \\ \ldots + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_A(s-t_1) B \mathcal{G}_A(t_1-t_2) B \ldots B \mathcal{G}_A(t_k) f(t-s) \times \\ \times \, dt_k \ldots dt_2 \, dt_1 \, ds + \ldots . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Эти интегралы представляют собой кратные свертки. Для ядра отдельного слагаемого имеем

$$\Big\| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_A(\cdot - t_1) B \mathcal{G}_A(t_1 - t_2) B \dots B \mathcal{G}_A(t_k) \times \\ \times\, dt_k \dots dt_2\, dt_1 \Big\|_{L_1} \leqslant \| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \|\mathcal{G}_A(\cdot - t_1)\| \cdot \|B\| \times \\ \times \|\mathcal{G}_A(t_1 - t_2)\| \cdot \|B\| \dots \|B\| \cdot \|\mathcal{G}_A(t_k)\| \times \\ \times\, dt_k \dots dt_2\, dt_1 \leqslant \|\mathcal{G}_A\|_{L_1}^{k+1} \|B\|^k.$$

Таким образом, ядра образуют функциональный ряд (3.3), L_1-нормы которых мажорируются суммой сходящегося геометрического ряда. Следовательно, этот ряд сходится по норме L_1 и, значит [12, гл. IV, § 3.3, предложение 6], почти всюду. Поэтому интегралы по s в формуле (3.4) можно объединить в один:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\mathcal{G}_A(s) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_A(s - t_1) B \mathcal{G}_A(t_1)\, dt_1 + \dots \\ \dots + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{G}_A(s - t_1) B \mathcal{G}_A(t_1 - t_2) B \dots B \mathcal{G}_A(t_k) \times \\ \times\, dt_k \dots dt_2\, dt_1 + \dots \Big) f(t - s)\, ds.$$

Согласно предложению 13 функция Грина $\mathcal{G}$ принадлежит как классу $L_1\big(\mathbb{R}, \mathbf{B}(X)\big)$, так и классу $L_\infty\big(\mathbb{R}, \mathbf{B}(X)\big)$. Поэтому в силу предложения 19 свертка $n \geqslant 2$ штук функций Грина является непрерывной функцией и ее значение в каждой точке не превосходит произведения $n-1$ штук L_1-норм сомножителей и одной L_∞-нормы. Следовательно, благодаря оценке (3.1) все слагаемые ряда (3.3) кроме первого являются непрерывными функциями и ряд сходится равномерно. Таким образом, сумму ряда (3.3) в каждой точке кроме $t = 0$ можно понимать буквально. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baskakov, A. G. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces / A. G. Baskakov, I. A. Krishtal // Mediterr. J. Math. — 2016. — V. 13, № 5. — P. 2443–2462.

2. Иосида, К. Функциональный анализ / К. Иосида. — М. : Мир, 1967. — 624 с.

3. Като, Т. Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. — М. : Мир, 1972. — 740 с.

4. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

5. Курбатов, В. Г. Основы спектральной теории / В. Г. Курбатов, И. В. Курбатова. — Воронеж : Научная книга, 2015. — 122 с.

6. Хилле, Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М. : ИЛ, 1962. — 829 с.

7. Engel, K.-J. One-parameter semigroups for linear evolution equations / K.-J. Engel, R. Nagel. — New York : Springer-Verlag, 2000. — V. 194 of Graduate Texts in Mathematics. — xxii+586 p.

8. Chicone, C. Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations / C. Chicone, Y. Latushkin. — Providence, RI : American Mathematical Society, 1999. — V. 70 of Mathematical Surveys and Monographs. — x+361 p.

9. Баскаков, А. Г. Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов / А. Г. Баскаков // Функц. анализ и его прил. — 1996. — Т. 30, № 3. — С. 1–11.

10. Левитан, Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. — М. : МГУ, 1978. — 205 с.

11. Kurbatov, V. G. Functional differential operators and equations / V. G. Kurbatov. — Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1999. — V. 473 of Mathematics and its Applications. — xx+433 p.

12. Бурбаки, Н. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах / Н. Бурбаки. — М. : Наука, 1977. — 600 с.

REFERENCES

1. Baskakov A.G., Krishtal I.A. Spectral analysis of abstract parabolic operators in homogeneous function spaces. Mediterr. J. Math., 2016., vol. 13, no. 5, pp. 2443–2462.

2. Yosida K. Functional analysis. [Iosida K. Funkcional'nyyj analiz]. Moscow, 1967, 624 p.

3. Kato T. Perturbation theory for linear operators. [Kato T. Teoriya vozmushheniyj lineyjnyx operatorov]. Moscow, 1972, 740 p.

4. Krein S.G. Linear differential equations in Banach space. [Kreyjn S.G. Lineyjnye differencial'nye uravneniya v banaxovom prostranstve]. Moscow, 1967, 464 p.

5. Kurbatov V.G., Kurbatova V.I. The foundation of spectral theory. [Kurbatov V.G., Kurbatova V.I. Osnovy spektral'noyj teorii]. Voronezh, 2015, 122 p.

6. Hille E., Phillips, R.S. Functional analysis and semi-groups. [Xille E., Fillips R. Funkcional'nyyj analiz i polugruppy]. Moscow,, 1962, 829 p.

7. E. , K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. New York: Springer-Verlag, 2000. vol. 194 of Graduate Texts in Mathematics, xxii+586 p

8. Chicone C., Latushkin Y. Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations. Providence, RI: American Mathematical Society, 1999. vol. 70 of Mathematical Surveys and Monographs, x+361 p.

9. Baskakov A.G. Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators. [Baskakov A.G. Polugruppy raznostnyx operatorov v spektral'nom analize lineyjnyx differencial'nyx operatorov]. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozheniya — Functional analysis and its applications*, 1996, vol. 30, no. 3, pp. 1–11.

10. Levitan B.M., Zhikov V.V. Almost periodic functions and differential equations. [Levitan B.M., Zhikov V.V. Pochti-periodicheskie funkcii i differencial'nye uravneniya]. Moscow, 1978, 205 p.

11. Kurbatov V.G. Functional differential operators and equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1999. vol. 473 of Mathematics and its Applications, xx+433 p.

12. Bourbaki N. Integration. I. Chapters 1–6. [Burbaki N. Mery na lokal'no kompaktnyx prostranstvax. Prodolzhenie mery. Integrirovanie mer. Mery na otdelimyx prostranstvax]. Moscow, 1977, 600 p.

Курбатова И. В., кандидат физико-математических наук, доцент, ПММ, кафедра программного обеспечения и администрирования информационных систем, Воронеж, Россия
E-mail: irakurbatova@gmail.com

Kurbatova I. V., Department of Software Development and Information Systems Administration Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: irakurbatova@gmail.com