УДК 517.9

РАНЖИРОВАННОЕ НЕРАВЕНСТВО ГЕЛЬДЕРА В АНИЗОТРОПНЫХ КЛАССАХ ЛЕБЕГА

А. И. Иноземцев

Липецкий государственный педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского

Поступила в редакцию 01.02.2018 г.

Аннотация. При исследовании линейных операторов с частными интегралами как правило возникает необходимость перестановки координат аргумента функции. В этой работе исследуется возможность ранжирования (расстановки по неубыванию или невозрастанию) мультииндекса $\mathbf{p}$ анизотропного функционального класса Лебега $L_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 < p_i < \infty$. Полученный результат найдет применение при исследовании действия линейных операторов с частными интегралами на функции определенные в анизотропном пространстве Лебега.

Ключевые слова: анизотропные лебеговы классы функций, уровень нормы, ранжирование уровня нормы.

HELDER RANKED INEQUALITY IN ANISOTROPIC CLASSES OF LEBEG

A. I. Inozemtsev

Abstract. In the study of linear operators with partial integrals, as a rule, it becomes necessary to rearrange the coordinates of the function argument. In this paper, we study the possibility of ranking (ranking by non-decreasing or non-increasing) multi-index $\mathbf{p}$ of the anisotropic Lebesgue functional class $L_{\mathbf{p}}$, $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $1 < p_i < \infty$. The obtained result will find application in studying the action of linear operators with partial integrals on functions defined in the anisotropic Lebesgue space.

Keywords: Anisatropic Lebesgue function classes, norm level, ranking of the norm level.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследования анизотропных пространств функций (т. е. речь идет о функциях с различными свойствами по разным переменным) было инициировано С. М. Никольским, его учениками и последователями в середине прошлого века (см. список литературы в книге [1]). Частные интегралы, по определению, применяются к функциям лишь по соответствующей части переменных области их определения, поэтому, вообще говоря, область определения частных интегралов состоит из классов функций с различными свойствами по переменным интегрирования и по переменным свободным от интегрирования.

При исследовании линейных операторов с частными интегралами, как правило, возникает необходимость *перестановки координат аргумента функции*. Именно с такой проблемой столкнулся В. И. Романовский при исследовании двусвязных цепей Маркова в 1936 г. (см. работы [2], [3]). Возникшая проблема потребовала введения оператора перестановки аргумента двумерной функции П. Одно из наиболее употребительных свойств введенного им оператора П — равенство его нормы единице в классе непрерывных функций (см. книгу [4]). Но в n–мерном лебеговом анизотропном[1)] пространстве функций это свойство не выполнено, что потребовало изменить подходы к исследованию интегральных операторов с частными интегралами в $\mathbb{R}_n$.

В этой работе исследуется более естественный подход изучения частных интегралов в $\mathbb{R}_n$, заключающийся в изменении порядка интегрирования в соответствии с ранжированием мультииндекса $\mathbf{p}$ в анизотропных классах Лебега, что принципиально отличается от подхода Романовского, заключающегося в перестановки координат функции.

Следуя [3, с. 9], ведем анизотропные лебеговы пространства функций, определенных на n-мерном параллелепипеде D. Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \ldots ,p_n)$. По определению

$$f{\in}L_{\mathbf{p}}(D) \iff \|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} < \infty,$$

где $D = (a_1,b_1) \times \ldots \times (a_n,b_n)$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$ и

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int\limits_{a_n}^{b_n} \left(\int\limits_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \ldots \left(\int\limits_{a_1}^{b_1} |f(t)|^{p_1}\, dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots dt_{n-1} \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n \right)^{\frac{1}{p_n}}, \qquad (1.1)$$

Ясно, что определенная таким образом норма, вообще говоря, меняется при одновременной перестановке порядка интегрирования и мультииндекса:
$(\ldots,t_i,\ldots,t_j,\ldots) \to (\ldots,t_j,\ldots,t_i,\ldots)$,
$(\ldots,p_i,\ldots,p_j,\ldots) \to (\ldots,p_j,\ldots,p_i,\ldots)$.
Вопрос о том, как согласованы получающиеся при этом анизотропные нормы лебеговых функций был поставлен профессором Л.Н.Ляховым. В данной работе решена частная задача — как меняется $L_{\mathbf{p}}$-норма при ранжировании мультииндекса $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_n)$ (по неубыванию или по невозрастанию).

2. ПЕРЕСТАНОВКА ПЕРЕМЕННЫХ ИНТЕГРИРОВАНИЯ, ВЫЗВАННОЕ РАНЖИРОВАНИЕМ ПО НЕУБЫВАНИЮ НЕКОТОРЫХ КООРДИНАТ МУЛЬТИИНДЕКСА p

Будем исходить из следующего неравенства, вытекающего из обобщенного неравенства Минковского: если $\varphi(t,\tau)$ измеримая на евклидовом множестве $D_t \times D_\tau$ функция и $0 \leqslant p_2 \leqslant p_1 \leqslant \infty$, то (см. [3], стр. 23, неравенство (11)):

$$\left[\int\limits_{D_t} \left(\int\limits_{D_\tau} |\varphi(t,\tau)|^{p_2}\, d\tau \right)^{\frac{p_1}{p_2}} dt \right]^{\frac{1}{p_1}} \leqslant \left[\int\limits_{D_t} \left(\int\limits_{D_\tau} |\varphi(t,\tau)|^{p_1}\, dt \right)^{\frac{p_2}{p_1}} d\tau \right]^{\frac{1}{p_2}}, \qquad (2.1)$$

Отметим что в рамках условий $1 \leqslant p_2 \leqslant p_1 \leqslant \infty$ (более жестких чем в (2.1)) это неравенство можно записать в виде

$$\|\varphi\|_{L_{(p_2,p_1)}(D_t \times D_\tau)} \leqslant \|\varphi\|_{L_{(p_1,p_2)}(D_\tau \times D_t)},$$

что лишь подчеркивает, что произвольное перестановка переменных в $L_{\mathbf{p}}$—нормах невозможна.

Рассмотрим ранжирование некоторых компонентов мультииндекса $\mathbf{p}$ и соответствующих перестановок переменных интегрирования, допуская, что координаты аргумента функции

[1)] *Анизотропными.* называют функции, обладающие разными свойствами в разных направлениях. Но эта нрма не меняется лишь в случае равенства $p_i = p_j$.

неизменны , расположены в произвольном порядке, как и соответствующие этим переменным компоненты мультииндекса $\mathbf{p}$.

Пусть $D_i = (a_i,b_i) \in \mathbb{R}_1$ и $D = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n \in \mathbb{R}_n$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$ и пусть мультииндекс $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ состоит из действительных чисел p_i, $1 < p_i < \infty$. Предположим, что $f = f(t) \in L_{\mathbf{p}}(D)$. Введем обозначения

$$f_0 = f$$

$$f_1 = \left(\int\limits_{D_1} |f|^{p_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\int\limits_{D_1} |f_0|^{p_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

$$f_2 = \left(\int\limits_{D_2} \left(\int\limits_{D_1} |f|^{p_1}\, dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}} = \left(\int\limits_{D_2} f_1^{p_2}\, dt_2\right)^{\frac{1}{p_2}}$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$f_i = \left(\int\limits_{D_i} \ldots \left(\int\limits_{D_1} |f|^{p_1}\, dt_1\right)^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots\, dt_i\right)^{\frac{1}{p_i}} = \left(\int\limits_{D_i} f_{i-1}^{p_i}\, dt_i\right)^{\frac{1}{p_i}}$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$f_n = \|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int\limits_{D_n} f_{n-1}^{p_n}\, dt_n\right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Выражение f_i будем называть *i-ым уровнем анизотропной $L_{\mathbf{p}}$-нормы функции f*. Таким образом

f_0 — нулевой уровень (совпадает с функцией),

$f_1 = \left(\int\limits_{D_1} |f|^{p_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}} = \left(\int\limits_{D_1} |f_0|^{p_1}\, dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}}$ — первый уровень,

и т.д.,

$f_i = \left(\int\limits_{D_i} f_{i-1}^{p_i} dt_i\right)^{\frac{1}{p_i}}$ — i-ый уровень,

и, наконец,

$f_n = \left(\int\limits_{D_n} f_{n-1}^{p_n}\, dt_1\right)^{\frac{1}{p_n}}$ —n-ый уровень, равный полной $L_{\mathbf{p}}$-норме функции f.

Как видим, в этих обозначениях любой i-ый уровень просто выражается через $(i-1)$-ый уровень полной нормы. Этим мы воспользуемся для доказательства следующего утверждения.

Лемма. (о частичном ранжировании $L_{\mathbf{p}}$-нормы). *Предположим, что* $p_m = \max\{p_i, p_{i+1}, \ldots, p_{m-1}, p_m\}$. *Тогда для любого* $1 \leqslant i < m$ *выполняется неравенство*

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = f_n \leqslant \left\{\int\limits_{D_n} \ldots \left[\int\limits_{D_i} \left(\int\limits_{D_m} f_{i-1}^{p_m}\, dt_m\right)^{\frac{p_i}{p_m}} dt_i\right]^{\frac{p_{i+1}}{p_i}} \ldots\, dt_n\right\}^{\frac{1}{p_n}}. \tag{2.2}$$

в этом принципиальное отличие от подхода Романовского, предполагающего перестановку координат аргумента функции.

Другими словами — любой из уровней полной нормы может определятся наибольшей степенью p_m в наборе чисел $(p_i,p_{i+1},\ldots,p_m)$ при этом исходная $L_{\mathbf{p}}$-норма функции окажется не больше частично ранжированной нормы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для любого $m<n$ можем написать полную $L_{\mathbf{p}}$-норму [1] функции f в виде

$$f_n=\left\{\int\limits_{D_n}\ldots\left[\int\limits_{D_m}\left(\int\limits_{D_{m-1}} f_{m-2}^{p_{m-1}}\,dt_{m-1}\right)^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{p_{m+1}}{p_m}}\ldots\,dt_n\right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

Отметим, что здесь наименьшее $m=2$ при этом правая часть неравенство (2.2) будет иметь внутренним интегралом выражение

$$f_1=\left(\int\limits_{D_1}|f_0|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}}=\left(\int\limits_{D_1}|f|^{p_1}\,dt_1\right)^{\frac{1}{p_1}},$$

являющееся первым уровнем полной нормы; но тогда неравенство (2.2) окажется равенством, которое заведомо справедливо и, поэтому, далее считаем, что $m>2$.

По предположению $1<p_{m-1}\leqslant p_m<\infty$. Воспользуемся неравенством (2.1) для соседних уровней $m-1$ и m. В результате получим

$$\left[\int\limits_{D_m}\left(\int\limits_{D_{m-1}} f_{m-2}^{p_{m-1}}\,dt_{m-1}\right)^{\frac{p_m}{p_{m-1}}}dt_m\right]^{\frac{p_{m+1}}{p_m}}\leqslant$$

$$\leqslant\left[\int\limits_{D_{m-1}}\left(\int\limits_{D_m} f_{m-2}^{p_m}\,dt_m\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}dt_{m-1}\right]^{\frac{p_{m+1}}{p_{m-1}}}.$$

Тогда

$$f_n\leqslant\left\{\int\limits_{D_n}\ldots\left[\int\limits_{D_{m-1}}\left(\int\limits_{D_m} f_{m-2}^{p_m}\,dt_m\right)^{\frac{p_{m-1}}{p_m}}dt_{m-1}\right]^{\frac{p_{m+1}}{p_{m-1}}}\ldots\,dt_n\right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

Как видим, мы поменяли порядок интегрирования по переменным t_{m-1}, t_m в выражении полной нормы f_n. При этом интегрирование по t_m оказалось на уровень ниже т.е. на $(m-1)$-ом уровне. А т.к. $p_m=\max\{p_i,p_{i+1},\ldots,p_{m-1},p_m\}$, то данный процесс последовательной попарной перестановки порядка интегрирования в выражении полной нормы f_n можно продолжить до любого уровня $i<m$, если только известно, что $p_i\leqslant p_m$. При этом интеграл по переменной t_m окажется на месте i-го интеграла (по переменной t_i):

$$f_n\leqslant\left\{\int\limits_{D_n}\ldots\left[\int\limits_{D_i}\left(\int\limits_{D_m} f_{i-1}^{p_m}\,dt_m\right)^{\frac{p_i}{p_m}}dt_i\right]^{\frac{p_{i+1}}{p_i}}\ldots\,dt_n\right\}^{\frac{1}{p_n}}.$$

Таким образом получено неравенство (2.2).

Доказательство закончено.

Теорема 1. (о полном ранжировании $L_{\mathbf{p}}$-нормы) *Пусть функция $f = f(t_1, t_2, \ldots, t_n) \in L_{\mathbf{p}}(D)$ и $D = (a_1,b_1) \times \ldots \times (a_n,b_n)$ — конечный параллелепипед в $\mathbb{R}_n$. И пусть $\mathbf{p}^* = (p_{\alpha_1}, \ldots, p_{\alpha_n})$ — мультииндекс, полученный ранжированием мультииндекса $\mathbf{p}$: $p_{\alpha_i} \geqslant p_{\alpha_{i+1}}$. Тогда*

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left\{ \int\limits_{D_n} \left(\int\limits_{D_{n-1}} \ldots \left(\int\limits_{D_1} |f|^{p_1}\, dt_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \ldots dt_{n-1} \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dt_n \right\}^{\frac{1}{p_n}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int\limits_{D_{\alpha_n}} \left(\int\limits_{D_{\alpha_{n-1}}} \ldots \left(\int\limits_{D_{\alpha_1}} |f|^{p_{\alpha_1}}\, dt_{\alpha_1} \right)^{\frac{p_{\alpha_2}}{p_{\alpha_1}}} \ldots dt_{\alpha_{n-1}} \right)^{\frac{p_{\alpha_n}}{p_{\alpha_{n-1}}}} dt_{\alpha_n} \right\}^{\frac{1}{p_{\alpha_n}}},$$

где $D^* = (a_{\alpha_1},b_{\alpha_1}) \times \ldots \times (a_{\alpha_n},b_{\alpha_n})$. Т.е.

$$\|f\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} \leqslant \|f\|_{L_{\mathbf{p}^*}(D^*)}\,. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p_{\alpha_1} = \max\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Тогда из леммы о частичном ранжировании $L_{\mathbf{p}}(D)$-нормы вытекает неравенство (2), где интеграл по t_{α_1} оказывается первым уровнем $L_{\mathbf{p}}(D)$-нормы функции f. Аналогичное действие производим с интегралами над первым уровнем f_{α_1} полной $L_{\mathbf{p}}(D)$-нормы. Получим неравенство, где первые два уровня $L_{\mathbf{p}}(D)$-нормы занимают интегралы по t_{α_1} и t_{α_2}. Продолжая это действие, в конечном итоге получим неравенство (3).

Доказательство закончено.

3. НЕРАВЕНСТВО ГЕЛЬДЕРА ДЛЯ РАНЖИРОВАННОЙ $L_{\mathbf{p}}(D)$-НОРМЫ

Теорема 2. *Пусть $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_n)$, $p_i > 1$ и $\mathbf{q}$ сопряженный мультииндекс. И пусть $\varphi \in L_{\mathbf{p}}(D)$ и $\psi \in L_{\mathbf{q}}$. Тогда*

$$\int\limits_D |\varphi(t)\ \psi(t)|\ dt \leqslant \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}^*}(D^*)}\ \|\psi\|_{L_{\mathbf{q}^*}(D^*)}\,, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{p}^*$ — мультииндекс, ранжированный по невозрастанию, а $\mathbf{q}^*$ — мультииндекс, ранжированный по неубыванию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно

$$\int\limits_D |\varphi(t)\ \psi(t)|\ dt = \int\limits_{D^*} |\varphi(t)\ \psi(t)|\ dt\,.$$

Здесь переменные интегрирования в правой части равенства расставлены в соответствии с ранжированием мультииндекса $\mathbf{p}$. Теперь неравенство (3) вытекает из неравенства Гельдера для анизотропных норм:

$$\int\limits_{D^*} |\varphi(t)\ \psi(t)|\ dt \leqslant \|\varphi\|_{L_{\mathbf{p}^*}(D^*)}\ \|\psi\|_{L_{\mathbf{q}^*}(D^*)}\,,$$

При этом, в связи с выполнением условия сопряжения параметров мультииндексов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ и сопряжения мультииндексов $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$, получаем два неравенства

$$\frac{1}{p_i} - \frac{1}{p_{\alpha_i}} \geqslant 0\,, \quad \frac{1}{q_i} - \frac{1}{q_{\alpha_i}} \leqslant 0\,,$$

из которых следует, что мультииндексы $\mathbf{p}^*$ и $\mathbf{q}^*$ получены ранжированием мультииндексов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ в противоположных смыслах.

Доказательство закончено.

В заключении автор благодарит профессора Л. Н. Ляхова за постановку исследуемой в этой работе задачи и консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бессов, О. В. Интегральные представления функций и теоремы вложения / О. В. Бессов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. — М. : Наука, 1975. — 478 с.

2. Romanovskij, V. Sur une class d'équations intégrales linéaires / V. Romanovskij // Acta Math. — 1932. — V. 59. — P. 99–208.

3. Романовский, В. И. Избранные труды. Т. 2: Теория вероятностей, статистика и анализ/ В. И. Романовский. — Ташкент : Наука, 1964. — 390 с.

4. Калитвин, А. С. Интегральные уравнения типа Романовского с частными интегралами / А. С. Калитвин. — Липецк : ЛГПУ, 2007. — 195 с.

REFERENCES

1. Besov O.V., Il'in V.P., Nikolskiy S.M. Integral representations of functions and embedding theorems. [Besov O.V., Il'in V.P., Nikolskiy S.M. Integral'nye predstavleniya funkciyj i teoremy vlozheniya]. Moscow, 1975, 478 p.

2. Romanovskij V. Sur une class d'équations intégrales linéaires. Acta Math, 1932, vol. 59, pp. 99–208.

3. Romanovsky V.I. Selected Works. V. 2: Probability Theory, Statistics, and Analysis. [Romanovskiyj V.I. Izbrannye trudy. T. 2: Teoriya veroyatnosteyj, statistika i analiz]. Tashkent, 1964, 390 p.

4. Kalitvin A.S. Romanovsky type integral equations with partial integrals. [Kalitvin A.S. Integral'nye uravneniya tipa Romanovskogo s chastnymi integralami]. Lipeck, 2007, 195 p.

Иноземцев А. И., Липецкий государственных педагогический университет имени П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия
Тел.: inozemcev.a.i@gmail.com

Inozemtsev A. I., Lipetsk State Pedagogical University named after P. P. Semenov-Tyan-Shansky, Lipetsk, Russia
Tel.: inozemcev.a.i@gmail.com