УДК 517.937

ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

Н. С. Ивлева

Южный федеральный университет,
Институт математики, механики и компьютерных наук

Поступила в редакцию 08.07.2017 г.

Аннотация. Для эволюционной системы дифференциальных уравнений в частных производных с быстро осциллирующими по времени младшими членами, среди которых имеются большие — пропорциональные частоте осцилляций, обоснован метод усреднения. Рассмотренная система обобщает известную систему уравнений, моделирующую конвекцию вязкой несжимаемой жидкости в приближении Обербека-Буссинеска, когда сосуд с подогреваемой жидкостью колеблется в любом направлении с большой частотой. Усложненную систему оказалось необходимым решать, используя две шкалы пространств, а именно: шкалу соболевских пространств трехмерных вектор-функций и соответствующую шкалу соленоидальных вектор-функций, причем эти шкалы имеют не только целые, но и дробные показатели.

Ключевые слова: обобщенная задача конвекции, быстро осциллирующие по времени слагаемые, метод усреднения для периодического по времени решения.

SUBSTANTIATION OF THE AVERAGING METHOD FOR THE GENERALIZED CONVECTION PROBLEM WITH LARGE HIGH FREQUENCY CONDITIONS

N. S. Ivleva

Abstract. The averaging method is justified for an evolutional system of partial differential equations with quickly oscillating in time junior terms, among which there are high proportional to the frequency of oscillations. The considered system generalizes a known thermal liquid convection equation system which is modelling the convection of viscous incompressible fluid in Oberdeck-Boussinesc approach when a vessel with a heated liquid vibrates with high frequency. It was necessary to solve the complicated system using two scales of spaces, namely: the scale of Sobolev spaces of three-dimensional vector-functions and the corresponding scale of solenoidal vector-functions, and these scales have not only integer but also fractional exponents.

Keywords: The generalized convecxtion problem, quickly oscillating in time terms, the averaging method for periodic in time solution.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1], [2] обоснована применимость метода усреднения [3] к задаче о тепловой конвекции жидкости в сосуде, подверженном вертикальным вибрациям с частотой $\omega >> 1$ (коротко: „к задаче конвекции"). К специфике этой задачи относится наличие в моделирующей ее системе (конкретнее, в уравнении Навье-Стокса для скорости жидкости v) высокочастотного слагаемого $ja\omega \cos \omega tT$, где j — единичный вектор, направленный против силы тяжести,

$a = const > 0, t$ — время, T — температура. В работах [4], [5] этот метод обоснован для задачи конвекции с высокочастотным слагаемым вида $\omega P(x, \sin \omega t, \cos \omega t)T$, где $P(x, t_1, t_2)$ — трехмерный вектор, компонентами которого являются полиномы от t_1, t_2, коэффициенты которых зависят от пространственной переменной x, причем среднее

$$\overline{P}(x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} P(x, \sin \tau, \cos \tau) d\tau = 0.$$

В данной работе метод усреднения обоснован для математически более сложной системы. Здесь дополнительно, по сравнению с [1], [2], [4], [5], в обоих эволюционных уравнениях присутствуют высокочастотные слагаемые вида $g_i(v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x}, x, \omega t), i = 1{,}2$, где $g_i(v, w, T, S, x, \tau)$ — 2π-периодические по τ вектор-функции, являющиеся полиномами произвольной степени относительно компонент переменных v, w, T, S с коэффициентами, зависящими от (x, τ). При доказательстве сформулированной ниже теоремы существенно используются результаты, методы и технические подходы работ [1], [4], [5]. Указанные выше усложнения системы, в частности, привели к необходимости, в отличие от [1], [2], [4], [5], использовать шкалу соболевских пространств трехмерных вектор-функций не только для целых, но и для дробных показателей, а также аналогичную шкалу соленоидальных вектор-функций.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с C^2-гладкой границей $\partial\Omega, \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, ω — большой параметр. В цилиндре $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу о $2\pi\omega^{-1}$-периодических по t решениях системы уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial v}{\partial t} + (v,\nabla)v = -\nabla q + \nu\Delta v + \omega \sum_{0<|k|\leqslant m} a_k(x) e^{ik\omega t} T + \\
+ g_1(v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x}, x, \omega t), \\
\frac{\partial T}{\partial t} + (v, \nabla T) = \chi \Delta T + g_2(v, \frac{\partial v}{\partial x}, T, \frac{\partial T}{\partial x}, x, \omega t), \\
divv = 0,\ v|_{\partial\Omega} = 0,\ T|_{\partial\Omega} = h.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $m \in \mathbb{N}$, ν, χ — положительные числа, неизвестные вектор-функции $q(x,t), T(x,t)$ — одномерные, а $v(x,t)$ — трехмерная. Далее, при $(v, w, T, S, x, \tau) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^9 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \overline{\Omega} \times \mathbb{R}$ вектор-функции $g_1(v, w, T, S, x, \tau)$, $g_2(v, w, T, S, x, \tau)$ и $h(x)$ вещественнозначны, $a_k(x) = \overline{a_{-k}(x)}, 0 < |k| \leqslant m$, где чертой над вектор-функцией обозначена операция комплексного сопряжения над каждой компонентой вектор-функции. Предположим, что $a_k \in C^1(\overline{\Omega}), 0 < |k| \leqslant m$, $g_1(v, w, T, S, x, \tau), g_2(v, w, T, S, x, \tau)$ — полиномы степени не выше $n_0 (\in \mathbb{N})$ относительно компонент переменных v, w, T, S с зависящими от (x, τ) коэффициентами, которые удовлетворяют условию Гельдера по x равномерно относительно x, τ. Кроме того, вектор-функции $g_1(v, w, T, S, x, \tau), g_2(v, w, T, S, x, \tau)$ $2\pi-$периодичны и непрерывны по τ, а $h \in C^2(\partial\Omega)$.

Пусть B — банахово пространство. Символом $C_0(B)$ обозначим пространство непрерывных ограниченных функций $u : \mathbb{R} \to B$ с обычной *sup*-нормой. Ниже таким же символом мы будем обозначать и пространство трехмерных вектор-функций с компонентами, принадлежащими $C_0(B)$.

Прежде чем сформулировать теорему, выведем формально усредненную задачу. Предварительно введем некоторые обозначения.

Пусть $q > 3$. Обозначим через J_q замыкание по норме L_q множества гладких соленоидальных ($divv = 0$) трехмерных вектор-функций, определенных в $\overline{\Omega}$ и равных нулю на границе $\partial\Omega$. Введем обозначение: $\overset{\circ}{J}{}^2_q$ — замыкание по норме W^2_q множества гладких соленоидальных трехмерных вектор-функций, которые определены в $\overline{\Omega}$ и обращаются в ноль на $\partial\Omega$. Символом Π обозначим известный проектор L_q на J_q, который при $q=2$ ортогонален (см., например, [6]). Пусть A_1 и A_2 — операторы, действующие в J_q и L_q соответственно по законам

$$A_1 u = -\nu\Pi\Delta u, u \in D(A_1) = \overset{\circ}{J}{}^{2}_{q}, A_2 T = -\chi\Delta T, T \in D(A_2) = \overset{\circ}{W}{}^{2}_{q},$$

а I_1 и I_2 — тождественные операторы в J_q и L_q соответственно. Здесь $D(A_1), D(A_2)$ — области определения операторов $A_1, A_2, \overset{\circ}{W}{}^{2}_{q}$ — замыкание по норме W_q^2 множества гладких в $\overline{\Omega}$ функций, которые обращаются в нуль на границе $\partial\Omega$.

Пусть $q > 12n_0$. Подействуем на первое уравнение (уравнение Навье-Стокса) задачи (2.1) проектором Π, а затем произведем замену переменных $Q = T - \Phi, u = v - N(\omega t)T - M_\omega(t)T$. Здесь $\Phi(x)$ — решение задачи Дирихле

$$\Delta\Phi = 0, \, \Phi|_{\partial\Omega} = h;$$

$$N(\tau)T = \sum_{0<|k|\leqslant m} (ik)^{-1} e^{ik\tau}\Pi a_k T;$$

$$M_\omega(t)T = \omega \sum_{0<|k|\leqslant m} (ik\omega I_1 - A_1)^{-1}\Pi a_k T e^{ik\omega t} - N(\omega t)T.$$

В результате указанной замены задача (2.1) перейдет в систему вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + A_1 u = f_1(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, \omega t) + \varphi_{\omega,1}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, t), \\ &\frac{\partial Q}{\partial t} + A_2 Q = f_2(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, \omega t) + \varphi_{\omega,2}(u, \frac{\partial u}{\partial x}, Q, \frac{\partial Q}{\partial x}, x, t), \\ &u|_{\partial\Omega} = 0, T|_{\partial\Omega} = h. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Прежде чем выписать выражения $f_i, \varphi_{\omega,i}, i = 1{,}2$, обозначим $w = \frac{\partial u}{\partial x}, S = \frac{\partial Q}{\partial x}$ и определим на множестве непрерывных 2π-периодических по τ вектор-функций $s(..., \tau)$ операцию усреднения:

$$< s(..., \tau) >= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s(..., \tau) d\tau.$$

Фигурирующие в (2.2) вектор-функции f_i и $\varphi_{\omega,i}, i = 1{,}2$, заданы равенствами

$$f_1(u, w, Q, S, x, \tau) = F_1(u, w, Q, S, x) - \Pi(N(\tau)T, \nabla)u - \Pi(u, \nabla)N(\tau)T -$$

$$-\sum_{\substack{0<|k|,|s|\leqslant m, \\ k+s\neq 0}} (ks)^{-1} e^{i(k+s)\tau}\left[(\Pi a_k T, \nabla)\Pi a_s T - \Pi a_k(\Pi a_s T, \nabla T)\right] - N(\tau)\left[\chi\Delta Q - (u, \nabla T)\right] +$$

$$+K_1(u, w, Q, S, x, \tau) - < K_1(u, w, Q, S, x, \tau) > ,$$

$$F_1(u, w, Q, S, x) = -\Pi(u, \nabla)u + \Pi\sum_{0<|k|\leqslant m} k^{-2}(\Pi a_k T, \nabla)\Pi a_{-k} T -$$

$$-\sum_{0<|k|\leqslant m} k^{-2}\Pi a_k(\Pi a_{-k} T, \nabla T) + < K_1(u, w, Q, S, x, \tau) > ,$$

где $K_1(u, w, Q, S, x, \tau) = \Pi g_1(u + N(\tau)T, w + \frac{\partial(N(\tau)T)}{\partial x}, Q + \Phi, S + \frac{\partial\Phi}{\partial x}, x, \tau) -$
$- N(\tau)g_2(u + N(\tau)T, w + \dfrac{\partial(N(\tau)T)}{\partial x}, Q + \Phi, S + \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}, x, \tau),$

$$\varphi_{\omega,1}(u, w, Q, S, x, t) = -\Pi(M_\omega(t)T, \nabla)u - \Pi(u, \nabla)M_\omega(t)T - \Pi(M_\omega(t)T, \nabla)M_\omega(t)T -$$

$$-\Pi(N(\omega t)T,\nabla)M_\omega(t)T-\Pi(M_\omega(t)T,\nabla)N(\omega t)T-$$

$$-M_\omega(t)\left[\chi\Delta Q-(u,\nabla T)+g_2(v,\frac{\partial v}{\partial x},T,\frac{\partial T}{\partial x},x,\omega t)\right]-$$

$$-N(\omega t)\left(g_2(v,\frac{\partial v}{\partial x},T,\frac{\partial T}{\partial x},x,\omega t)-g_2(u+N(\omega t)T,w+\frac{\partial(N(\omega t)T)}{\partial x},T,\frac{\partial T}{\partial x},x,\omega t)\right)+$$

$$+M_\omega(t)(M_\omega(t)T,\nabla T)+M_\omega(t)(N(\omega t)T,\nabla T)+N(\omega t)(M_\omega(t)T,\nabla T)+$$

$$+K_1(u+M_\omega(t)T,w+\frac{\partial(M_\omega(t)T)}{\partial x},Q,S,x,\omega t)-K_1(u,w,Q,S,x,\omega t),$$

$$f_2(u,w,Q,S,x,\tau)=F_2(u,w,Q,S,x)-(N(\tau)T,\nabla T)+$$

$$+K_2(u,w,Q,S,x,\tau)-<K_2(u,w,Q,S,x,\tau)>,$$

$$F_2(u,w,Q,S,x)=-(u,\nabla T)+<K_2(u,w,Q,S,x,\tau)>,$$

где $K_2(u,w,Q,S,x,\tau)=g_2(u+N(\tau)T,w+\frac{\partial(N(\tau)T)}{\partial x},Q+\Phi,S+\frac{\partial\Phi}{\partial x},x,\tau)$,

$$\varphi_{\omega,2}(u,w,Q,S,x,t)=-(M_\omega(t)T,\nabla T)+$$

$$+K_2(u+M_\omega(t)T,w+\frac{\partial(M_\omega(t)T)}{\partial x},Q,S,x,\omega t)-K_2(u,w,Q,S,x,\omega t)$$

при $v=u+N(\omega t)T+M_\omega(t)T, T=Q+\Phi$.

Пусть задача

$$\begin{array}{l}\frac{\partial y}{\partial t}=\nu\Pi\Delta y+F_1(y,\frac{\partial y}{\partial x},P,\frac{\partial P}{\partial x},x),\ \frac{\partial P}{\partial t}=\chi\Delta P+F_2(y,\frac{\partial y}{\partial x},P,\frac{\partial P}{\partial x},x),\\ y|_{\partial\Omega}=0,\ P|_{\partial\Omega}=0,\end{array}\tag{2.3}$$

которую будем называть усредненной, имеет стационарное решение $(\overset{\circ}{v},\overset{\circ}{\tau})\in\overset{\circ}{J}{}^2_q\times\overset{\circ}{W}{}^2_q$. С целью линеаризации в этой точке вектор-функций $\gamma_1\equiv<K_1(u,w,Q,S,x,\tau)>$ и $\gamma_2\equiv<K_2(u,w,Q,S,x,\tau)>$ выделим линейные части соответствующих разностей:

$\gamma_1(u,w,Q,S,x)-\gamma_1(\overset{\circ}{v},\frac{\partial\overset{\circ}{v}}{\partial x},\overset{\circ}{\tau},\frac{\partial\overset{\circ}{\tau}}{\partial x},x)=$

$=L_{1u}(x)(u-\overset{\circ}{v})+L_{1w}(x)(w-\frac{\partial\overset{\circ}{v}}{\partial x})+L_{1Q}(x)(Q-\overset{\circ}{\tau})+L_{1S}(x)(S-\frac{\partial\overset{\circ}{\tau}}{\partial x})+...,$

$\gamma_2(u,w,Q,S,x)-\gamma_2(\overset{\circ}{v},\frac{\partial\overset{\circ}{v}}{\partial x},\overset{\circ}{\tau},\frac{\partial\overset{\circ}{\tau}}{\partial x},x)=$

$=L_{2u}(x)(u-\overset{\circ}{v})+L_{2w}(x)(w-\frac{\partial\overset{\circ}{v}}{\partial x})+L_{2Q}(x)(Q-\overset{\circ}{\tau})+L_{2S}(x)(S-\frac{\partial\overset{\circ}{\tau}}{\partial x})+...$

Рассмотрим в пространстве $J_q\times L_q$ оператор A с областью определения $D(A)=\overset{\circ}{J}{}^2_q\times\overset{\circ}{W}{}^2_q$, который действует по закону

$$A\begin{pmatrix}u\\Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1u-B_1u-C_1Q-L_{1u}u-L_{1w}\frac{\partial u}{\partial x}-L_{1Q}Q-L_{1S}\frac{\partial Q}{\partial x}\\ A_2Q-B_2Q-C_2u-L_{2u}u-L_{2w}\frac{\partial u}{\partial x}-L_{2Q}Q-L_{2S}\frac{\partial Q}{\partial x}\end{pmatrix},$$

где

$$B_1u=-\Pi(\overset{\circ}{v},\nabla)u-\Pi(u,\nabla)\overset{\circ}{v},$$

$$C_1Q=\Pi\sum_{0<|k|\leqslant m}k^{-2}\Big[(\Pi a_k\overset{\circ}{\tau}{}',\nabla)\Pi a_{-k}Q+$$

$$+(\Pi a_kQ,\nabla)\Pi a_{-k}\overset{\circ}{\tau}{}'-a_k(\Pi a_{-k}\overset{\circ}{\tau}{}',\nabla Q)-a_k(\Pi a_{-k}Q,\nabla\overset{\circ}{\tau}{}')\Big],$$

$$B_2Q=-(\overset{\circ}{u},\nabla Q),C_2u=-(u,\nabla\overset{\circ}{\tau}{}'),\overset{\circ}{\tau}{}'=\overset{\circ}{\tau}+\Phi.$$

В системе (2.2) заменим u на $u+\overset{\circ}{v}$, а Q на $Q+\overset{\circ}{\tau}$ и перепишем ее в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} + Az = f(z,x,t,\omega), \tag{2.4}$$

где $z=(u,Q)$,

$$f(z,x,t,\omega) = (f_1(u+\overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u+\overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q+\overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q+\overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, \omega t) - F_1(\overset{\circ}{v}, \frac{\partial\overset{\circ}{v}}{\partial x}, \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial\overset{\circ}{\tau}}{\partial x}, x) -$$

$$-B_1u - C_1Q - L_{1u}u - L_{1w}\frac{\partial u}{\partial x} - L_{1Q}Q - L_{1S}\frac{\partial Q}{\partial x} +$$

$$+\varphi_{\omega,1}(u+\overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u+\overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q+\overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q+\overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, t), f_2(u+\overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u+\overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q+\overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q+\overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, \omega t) -$$

$$-F_2(\overset{\circ}{v}, \frac{\partial\overset{\circ}{v}}{\partial x}, \overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial\overset{\circ}{\tau}}{\partial x}, x) - B_2Q - C_2u - L_{2u}u - L_{2w}\frac{\partial u}{\partial x} - L_{2Q}Q - L_{2S}\frac{\partial Q}{\partial x} +$$

$$+\varphi_{\omega,2}(u+\overset{\circ}{v}, \frac{\partial(u+\overset{\circ}{v})}{\partial x}, Q+\overset{\circ}{\tau}, \frac{\partial(Q+\overset{\circ}{\tau})}{\partial x}, x, t)).$$

Легко видеть, что вектор-функция f является $2\pi\omega^{-1}$-периодической по t.

Отнесем к $W_q^l(\mathbb{R}^3), q>1, l>0$, функции y, которые заданы в $\mathbb{R}^3$ и имеют обобщенные производные порядка $[l]$ (целая часть l) и

$$\|y\|_{W_q^l(\mathbb{R}^3)} = \|y\|_{W_q^{[l]}(\mathbb{R}^3)} + \sup_{\substack{h\in\mathbb{R}^3 \\ 0<|h|<1/2}} |h|^{[l]-l} \sum_{|r|=[l]} \|D^r y(x+h) - D^r y(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^3)} < \infty,$$

где $r=(r_1,r_2,r_3)$ — целочисленный мультииндекс, $|r| = \sum r_i, r_i \geqslant 0$; $D^r y = \frac{\partial^{|r|} y}{\partial x_1{}^{r_1} \partial x_2^{r_2} \partial x_3{}^{r_3}}, W_q^0 = L_q$. Обозначим через $W_q^l(\Omega)$ (коротко: W_q^l) пространство функций y, которые заданы в Ω и допускают продолжение до функций $\overline{y}$ из $W_q^l(\mathbb{R}^3)$, с нормой [1]

$$\|y\|_{W_q^l(\Omega)} = \inf\{\|\overline{y}\|_{W_q^l(\mathbb{R}^3)} : \overline{y}|_\Omega = y\}.$$

Пусть $q>3$. Введем обозначение: $\widehat{W}_q^l(\Omega)$ (коротко: $\widehat{W}_q^l$) — замыкание по норме W_q^l гладких соленоидальных вектор-функций, равных нулю на $\partial\Omega$.

Теорема 1. *Пусть $q > 12n_0$, усредненная задача (2.3) имеет стационарное решение $(\overset{\circ}{v}, \overset{\circ}{\tau})$ и спектр Λ оператора A не содержит нуля. Тогда существуют такие положительные числа $\delta_0 > 1/2$, r_0 и ω_0, что при $1/2 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_0, 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1 - 12n_0/q$ справедливы следующие утверждения.*
1. Для $\omega > \omega_0$ система (2.1) имеет в шаре

$$\left\| T - (\overset{\circ}{\tau} + \Phi) \right\|_{C_0(W_q^{2\delta_0})} +$$

$$+ \left\| v - \left(\overset{\circ}{v} + \sum_{0<|k|\leqslant m} (ik)^{-1} e^{ik\omega t} \Pi a_k (\overset{\circ}{\tau} + \Phi) \right) \right\|_{C_0(\widehat{W}_q^1)} < r_0$$

единственное $2\pi\omega^{-1}$-периодическое по t решение (v_ω, T_ω), причем

$$\lim_{r_0\to 0, \omega\to\infty} \left(\left\| T_\omega - (\overset{\circ}{\tau} + \Phi) \right\|_{C_0(W_q^{2\delta_0})} + \right.$$

$$+\left\| v_\omega - \left(\overset{\circ}{v} + \sum_{0<|k|\leqslant m} (ik)^{-1} e^{ik\omega t} \Pi a_k (\overset{\circ}{\tau} + \Phi) \right) \right\|_{C_0(\widehat{W}_q^1)} \Bigg) = 0.$$

2. Если спектр Λ лежит в правой полуплоскости и не имеет точек на мнимой оси, то указанное решение при $\omega > \omega_0$ устойчиво $(\widehat{W}_q^{2\delta_2} \times W_q^{2\varepsilon_2}, \widehat{W}_q^{2\delta_1} \times W_q^{2\varepsilon_1})$.
3. Если у спектра Λ нет точек на мнимой оси и есть хотя бы одна точка в левой полуплоскости, то при $\omega > \omega_0$ решение (v_ω, T_ω) неустойчиво $(\widehat{W}_q^{2\delta_2} \times W_q^{2\varepsilon_2}, \widehat{W}_q^{2\delta_1} \times W_q^{2\varepsilon_1})$.

Доказательство теоремы мы опускаем. Отметим лишь одно вспомогательное утверждение о взаимном непрерывном вложении пространств областей определения дробных степеней операторов A_1, A_2 к пространствам $\widehat{W}_q^{2l}$ и $\overline{W}_q^{2l}, q > 3, l \in [0,1]$ ($\overline{W}_q^{2l}$ — замыкание по норме W_q^{2l} гладких функций, равных нулю на $\partial\Omega$):

Утверждение. *Пусть $r > 3$. Тогда пространство $\overline{W}_r^{2l_2}$, определенное выше, непрерывно вложено в $B_{r,2}^{l_1}$, пространство $B_{r,2}^{l_2}$ — в $\overline{W}_r^{2l_1}$; $\widehat{W}_r^{2l_2}$ — в $B_{r,1}^{l_1}, B_{r,1}^{l_2}$ — в $\widehat{W}_r^{2l_1}, 0 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant 1$.*

Это утверждение является прямым следствием лемм 4.1 и 4.2, а также интерполяционной теоремы [1].

Действительно, согласно леммам 4.1 и 4.2, семейства $\widehat{W}_q^{2l}$ и $\overline{W}_q^{2l}, q > 3, l \in [0,1]$, являются аппроксимационными и слабо моментными шкалами ($\widehat{W}_q^0 = J_q, \widehat{W}_q^2 = \overset{\circ}{J}{}_q^2, \overline{W}_q^0 = L_q, \overline{W}_q^2 = \overset{\circ}{W}{}_q^2$), а пространства $B_{q,1}^l$ и $B_{q,2}^l, q > 3, l \in [0,1]$, являются аппроксимационно-моментными шкалами ($B_{q,1}^0 = J_q, B_{q,1}^1 = \overset{\circ}{J}{}_q^2, B_{q,2}^0 = L_q, B_{q,2}^1 = \overset{\circ}{W}{}_q^2$).

Осталось применить интерполяционную теорему [1], используя тождественный оператор $I_1 : J_q \to J_q (I_2 : L_q \to L_q)$ в качестве оператора вложения и учтя, что сначала, например, пространства
$B_{q,1}^{l_1}(B_{q,2}^{l_1})$ аппроксимационно разделяют пространства J_q и $\overset{\circ}{J}{}_q^2$ (L_q и $\overset{\circ}{W}{}_q^2$), а пространства $\widehat{W}_q^{2l_3}(\overline{W}_q^{2l_3})$ слабо моментно разделяют пространства J_q и $\overset{\circ}{J}{}_q^2$ (L_q и $\overset{\circ}{W}{}_q^2$) (а значит, пространства $\widehat{W}_q^{2l_2}(\overline{W}_q^{2l_2})$ моментно разделяют пространства J_q и $\overset{\circ}{J}{}_q^2$ (L_q и $\overset{\circ}{W}{}_q^2$)), $0 \leqslant l_1 < l_2 < l_3 \leqslant 1$, а затем, наоборот, что пространства $\widehat{W}_q^{2l_1}(\overline{W}_q^{2l_1})$ аппроксимационно разделяют пространства J_q и $\overset{\circ}{J}{}_q^2$ (L_q и $\overset{\circ}{W}{}_q^2$), а $B_{q,1}^{l_3}(B_{q,2}^{l_3})$ моментно разделяют J_q и $\overset{\circ}{J}{}_q^2$ (L_q и $\overset{\circ}{W}{}_q^2$).

Отметим, что в теореме мы используем пространства $W_q^{2\delta_0}(W_q^{2\varepsilon_1}, W_q^{2\varepsilon_2})$, отличные от пространств $\overline{W}_q^{2\delta_0}(\overline{W}_q^{2\varepsilon_1}, \overline{W}_q^{2\varepsilon_2})$, которым обязательно принадлежит функция T_ω, являющаяся частью решения нашей задачи (v_ω, T_ω). Нормы у этих пространств совпадают. Здесь можно использовать тот факт, что множество $\overline{W}_q^{2\delta_0}$ является всюду плотным в $W_q^{2\delta_0}$, а значит, можно построить последовательность функций $T_n \in \overline{W}_q^{2\delta_0}$, сходящихся по норме $W_q^{2\delta_0}$ к функции T из теоремы при $n \to \infty$, и работать с этими приближениями, переходя потом к пределу при $n \to \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Симоненко, И. Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции в поле быстро осциллирующих сил и для других параболических уравнений / И. Б. Симоненко // Матем. сб. — 1972. — № 2(87). — С. 236–253.

2. Зеньковская, С. М. О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции / С. М. Зеньковская, И. Б. Симоненко // Изв. АН СССР, МЖГ. — 1966. — № 5. — С. 51–55.

3. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Наука, 1974.

4. Левенштам, В. Б. Обоснование метода усреднения для задачи конвекции при высокочастотных вибрациях / В. Б. Левенштам // Сиб. мат. журн. — 1993. — № 2(34). — С. 92–109.

5. Левенштам, В. Б. Метод усреднения в задаче конвекции при высокочастотных наклонных вибрациях / В. Б. Левенштам // Сиб. мат. журн. — 1996. — № 5(37). — С. 1103–1116.

6. Юдович, В. И. Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости / В. И. Юдович. — Ростов-на-Дону : Изд-во РГУ, 1984. — 192 с.

REFERENCES

1. Simonenko I.B. A justification of the averaging method for a problem of convection in a field of rapidly oscillating forces and for other parabolic equations. [Simonenko I.B. Obosnovanie metoda usredneniya dlya zadachi konvekcii v pole bystro oscilliruyushhix sil i dlya drugix parabolicheskix uravneniyj]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1972, vol. 87, № 2, pp. 236–253.

2. Zenkovskaya S.M., Simonenko I.B. About the influence of high frequency vibration on the appearance of convection. [Zenkovskaya S.M., Simonenko I.B. O vliyanii vibracii vysokoyj chastoty na vozniknovenie konvekcii]. *Izv. AN SSSR, MZhG — The news of AS USSR, Mech. of fluid and gas*, 1966, no. 5, pp. 51–55.

3. Bogolubov N.N., Mitropolskiy Y.A. Asymptotic methods in the theory of non-linear oscillations. [Bogolubov N.N., Mitropolskiy Y.A. Asimptoticheskie metody v teorii nelineyjnyx kolebaniyj]. Moscow, 1974.

4. Levenshtam V.B. Justification of averaging method for convection problems in high-frequency vibrations. [Levenshtam V.B. Obosnovanie metoda usredneniya dlya zadachi konvekcii pri vysokochastotnyx vibraciyax]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1993, vol. 34, № 2, pp. 92–109.

5. Levenshtam V.B. Averaging method in the convection problem for high-frequency inclined vibrations. [Levenshtam V.B. Metod usredneniya v zadache konvekcii pri vysokochastotnyx naklonnyx vibraciyax]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 1996, vol. 37, no. 5, pp. 1103–1116.

6. Yudovich V.I. Linearization method in hydrodynamic stability theory. [Yudovich V.I. Metod linearizacii v gidrodinamicheskoyj teorii ustoyjchivosti]. Rostov-on-Don, 1984, 192 p.

Ивлева Н. С., Южный федеральный университет, Институт математики, механики и компьютерных наук, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: ivleva.n.s@yandex.ru

Ivleva N. S., Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: ivleva.n.s@yandex.ru