УДК 517.518.8+517.988.8

АСИМПТОТИКА КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ БЕРНШТЕЙНА, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПОСТРОЕНИИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВСПЛЕСКОВ ДОБЕШИ

М. Г. Зимина

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 26.11.2018 г.

Аннотация. В работе получены новые результаты об асимптотике корней полиномов Бернштейна, возникающих при построении модифицированных всплесков Добеши. Доказано, что все корни (за исключением 1) лежат вне некоторого овала Кассини. Для каждой степени полинома найдена лемниската, такая что расстояние от произвольного корня до кривой есть $O(1/p^3)$. Лемнискаты стягиваются к овалу Кассини. Корни нужны для нахождения масок дискретного всплеского преобразования, играющего большую роль в алгоритмах сжатия информации и распознавания образов.

Ключевые слова: всплеск, аппроксимация, Лемма Рисса, овал Кассини, полином Бернштейна.

ASYMPTOTICS OF THE ROOTS OF BERNSTEIN POLYNOMIALS ARISING IN THE CONSTRUCTION OF MODIFIED DAUBECHIES WAVELETS

M. G. Zimina

Abstract. In this article we obtain new results on the asymptotic behavior of the roots of Bernstein polynomials arising in the construction of modified Daubechies wavelets. It is proved that all roots (with the exception of 1) lie outside some Cassini oval. For each degree of the polynomial, a lemniscate is found such that the distance from an arbitrary root to the curve is $O(1/p^3)$. Lemniscate is contract to the Cassini oval. the Roots are needed to find masks for a discrete burst transform, which plays a large role in information compression and pattern recognition algorithms.

Keywords: wavelet, approximation, Riess lemma, oval Cassini, Bernstein polynomial.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучается асимптотика корней следующей последовательности полиномов Бернштейна:

$$B_{4p,2p}(x) := \sum_{l=0}^{2p} \binom{4p}{l} x^l (1-x)^{4p-l}. \tag{1.1}$$

Ясно, что эти полиномы поточечно сходятся к характеристической функции отрезка [0,1/2]. Подобные полиномы играют важную роль при построение сохраняющих локализованность с ростом гладкости всплесков с компактными носителями [1], [2].

Близкими вопросами занимается группа московских математиков, возглавляемых И. В. Тихоновым [3].

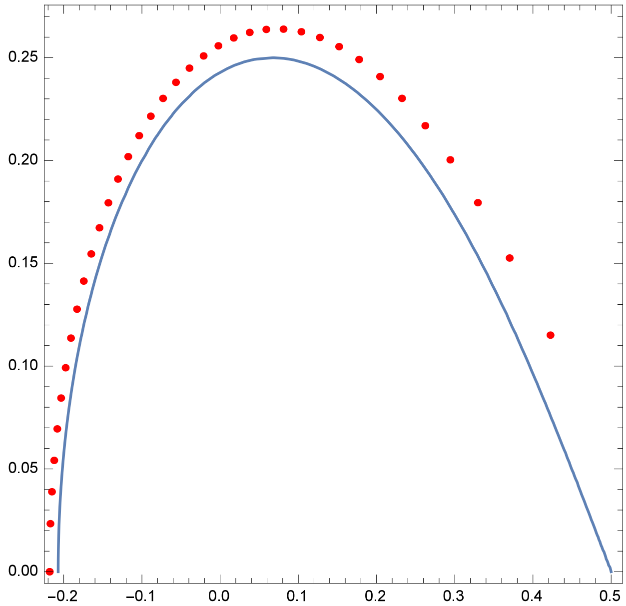

Рис. 1. *Овал Кассини и корни полинома Бернштейна при* $p = 37$.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Теорема 1. *Все корни полиномов Бернштейна (1.1) лежат вне овала Кассини*

$$|z||1-z| \geqslant 1/4. \tag{2.1}$$

Доказательство аналогично доказательству Теоремы 2.2 из [2]. В силу Следствия 3.1 из только, что упомянутой статьи:

$$\widetilde{B}_p(x) = B_{4p,2p}(x) = 1 - 2p\binom{4p}{2p}\int_0^1 (1-xs)^{(-4p-1)}(1-s)^{2p}\,ds\,x^{2p+1}(1-x)^{2p}.$$

Поэтому, если $\widetilde{B}_p(x) = 0$, то

$$\left|x^{-2p-1}(1-x)^{-2p}\right| = \left|(2p)\binom{4p}{2p}\int_0^1 (1-xs)^{(-4p-1)}(1-s)^{2p}\,ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant (2p)\binom{4p}{2p}\int_0^1 |1-xs|^{(-4p-1)}\,(1-s)^{2p}\,ds.$$

При $|x| \leqslant 1/2,\ s \in [0{,}1]\quad |1-xs| \geqslant 1-|x|s \geqslant \left(1-\frac{1}{2}s\right).$
Если $|x| > 1/2, Re(x) \leqslant 1/2$ и $s \in [0{,}1]$, то

$$|1-xs|^2 - \left(1-\frac{2p}{4p}s\right)^2 = s\left(\left(|x|^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)s + 2\left(\frac{1}{2}-Re(x)\right)\right) \geqslant 0.$$

Остаётся заметить, что в силу Теоремы 3.2 из [2] и (3)

$$(2p)\binom{4p}{2p}\int_0^1 \left(1-\frac{s}{2}\right)^{(-4p-1)}(1-s)^{2p}\,ds =$$

$$= 4p\binom{4p-1}{2p}\int_0^{\frac{1}{2}} s^{2p}\,(1-s)^{2p-1}\,ds2^{4p+1} \leqslant 2^{4p}.$$

Теорема 2. *Расстояние от корней полинома* $\widetilde{B}_p(x+iy)$*, находящихся в круге* $|x-1/2|<1/2$*, до кривой, задаваемой уравнением*

$$\left(\frac{2p}{2p+1}\binom{4p}{2p}x\right)^{\frac{1}{2p}}|x+i\,y|^{1+\frac{1}{2p}}|1-x-iy| = \left(\left((1-x)x-y^2\right)\right)^{\frac{1}{2p}}, \tag{2.2}$$

не превосходит $O(1/p^3)$.

Доказательство. Корни находятся на кривой, определяемой уравнением:

$$(2p)\binom{4p}{2p}\left|\int_0^1(1-xs)^{(-4p-1)}(1-s)^{2p}\,ds\right|\,|x|^{2p+1}|1-x|^{2p}=1.$$

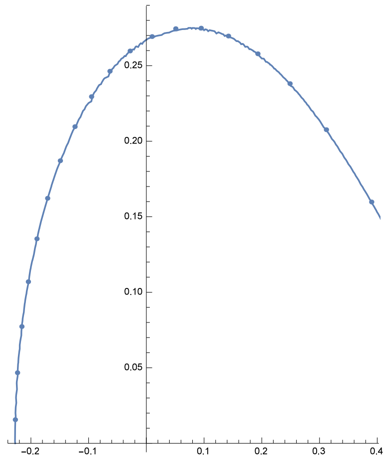

Рис. 2. *Корни и кривая*

Сделаем замену $x'=x/(1-x)$, $x=x'/(1+x')$, $1-x=1/(1+x')$:

$$(2p)\binom{4p}{2p}\left|\int_0^1(1-\frac{x}{1+x}s)^{(-4p-1)}(1-s)^{2p}\,ds\right|\left|\frac{x}{1+x}\right|^{2p+1}\left|\frac{1}{1+x}\right|^{2p}=$$

$$=(2p)\binom{4p}{2p}\left|\int_0^1(1+x-x\,s)^{-4p-1}(1-s)^{2p}\,ds\right|\,|x|^{2p+1}=1.$$

Пусть

$$AInt_{4p,2p}(x)=\left|\int_0^1(1+x-x\,s)^{(-4p-1)}(1-s)^2p\,ds\right|\,|x|^{2p+1}=$$

$$\left|\int_0^1\frac{(|x|s)^2p|x|}{(1+x\,s)^{(4p+1)}}\,ds\right|.$$

После замены $s'=|x|s$ имеем

$$AInt_{4p,2p}(x)=\left|\int_0^{|x|}\frac{(s)^2p}{(1+\frac{x}{|x|}\,s)^{(4p+1)}}\,ds\right|.$$

Пусть $x=r\,\exp{(i\,\varphi)}$ тогда

$$AInt_{4p,2p}(r,\varphi)=\left|\int_0^r\frac{(s)^2p}{(1+\exp{(i\,\varphi)}\,s)^{(4p+1)}}\,ds\right|=$$

$$= \left| \int_0^r \frac{(s)^2 p (1+\exp(-i\,\varphi)\,s)^{(4p+1)}}{((s+\cos(\varphi))^2+\sin^2(\varphi))^{(4p+1)/2}}\,ds \right| =$$

$$= \left| \int_0^r \frac{(s)^2 p (s+\exp(i\,\varphi))^{(4p+1)}}{((s+\cos(\varphi))^2+\sin^2(\varphi))^{(4p+1)/2}}\,ds \right|.$$

Заменяя s на $s' = s+\cos(\varphi)$, получаем

$$AInt_{4p,2p}(r,\varphi) = \left| \int_0^r \frac{(s-\cos(\varphi))^2 p (s+i\sin(\varphi))^{(4p+1)}}{(s^2+\sin^2(\varphi))^{(4p+1)/2}}\,ds \right|.$$

Теперь перейдём от s к $s' = 1/s$:

$$AInt_{4p,2p}(r,\varphi) = \left| \int_{\frac{1}{r+\cos(\varphi)}}^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} \frac{(1-s\cos(\varphi))^2 p (1+i\sin(\varphi)\,s)^{(4p+1)} s^{4p-2p-1}}{(1+s^2\sin^2(\varphi))^{4p+1}}\,ds \right|.$$

Пусть

$$x_1(s) = \frac{1+i\sin(\varphi)\,s}{(1+s^2\sin^2(\varphi))^{1/2}} = \exp(\psi(s)),$$

где

$$\cos(\psi(s)) = \frac{1}{(1+s^2\sin^2(\varphi))^{1/2}}, \quad \sin(\psi(s)) = \frac{\sin(\varphi)\,s}{(1+s^2\sin^2(\varphi))^{1/2}}.$$

Тогда

$$AInt_{4p,2p}(r,\varphi) = \left| \int_{\frac{1}{r+\cos(\varphi)}}^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} \frac{(1-s\cos(\varphi))^L s^{4p-2p-1}}{(1+s^2\sin^2(\varphi))^{(4p+1)/2}}\,ds\cos(\psi(s)) + \right.$$

$$\left. + \, i \int_{\frac{1}{r+\cos(\varphi)}}^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} \frac{(1-s\cos(\varphi))^L s^{4p-2p-1}}{(1+s^2\sin^2(\varphi))^{(4p+1)/2}}\,ds\sin(\psi(s)) \right| =$$

$$\left(\left(\int_{\frac{1}{r+\cos(\varphi)}}^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} \frac{(1-s\cos(\varphi))^L s^{4p-2p-1}}{(1+s^2\sin^2(\varphi))^{(4p+1)/2}} \cos(\psi(s))\,ds \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{\frac{1}{r+\cos(\varphi)}}^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} \frac{(1-s\cos(\varphi))^L s^{4p-2p-1}}{(1+s^2\sin^2(\varphi))^{(4p+1)/2}} \sin(\psi(s))\,ds \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Исследуем $AInt_{4p,2p}(r,\varphi)$ при $\varphi \in [0,\pi/2]$:

$$AInt_{4p,2p}(r,\varphi) \leqslant IntA_{4p,2p}(r,\varphi) = \int_{\frac{1}{r+\cos(\varphi)}}^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} \frac{(1-s\cos(\varphi))^{2p} s^{2p-1}}{(1+s^2\sin^2(\varphi))^{(4p+1)/2}}\,ds.$$

Обозначим

$$IntA_p(r,\varphi) = IntA_{4p,2p}(r,\varphi) = \int_{\frac{1}{r+\cos(\varphi)}}^{\frac{1}{\cos(\varphi)}} \frac{(1-s\cos(\varphi))^{2p} s^{2p-1}}{(1+s^2\sin^2(\varphi))^{(4p+1)/2}}\,ds.$$

Корни полинома (с учетом замены) находятся близко к кривой

$$(2p)\binom{4p}{2p} IntA_p(r,\varphi) = 1 :$$

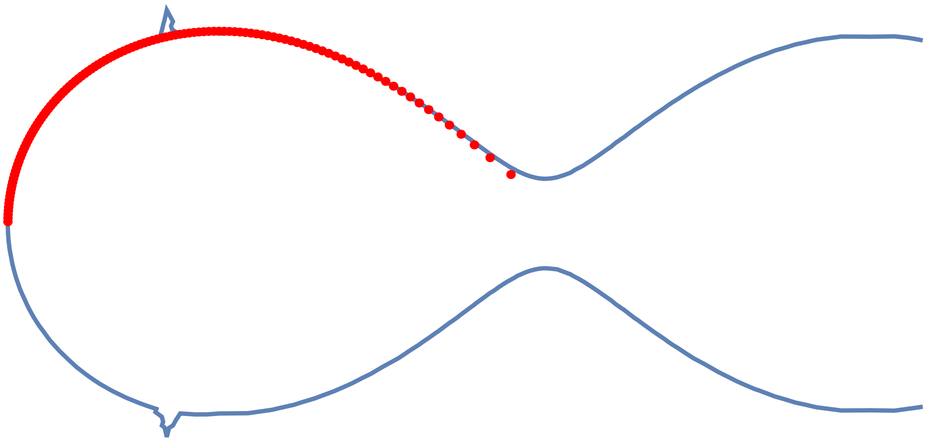

Рис. 3. *Кривая и корни,* $p = 84 - 89$.

Оценим функцию

$$f_p(s) = \frac{s^{2p-1}(1 - s\cos(\varphi))^p}{\left(s^2 \sin^2(\varphi) + 1\right)^{\frac{4p+1}{2}}}$$

на отрезке $[\frac{1}{r+\cos(\varphi)}, \frac{1}{\cos(\varphi)}]$.

Производная этой функции равна

$$s^{2p-2}\left(s^2\sin^2(\varphi)+1\right)^{-2p-\frac{3}{2}}(1-s\cos(\varphi))^{p-1}\times$$
$$(s^3\left((p+2)\sin^2(\varphi)\cos(\varphi)\right) -$$
$$(s^2\left(2(p+1)\sin^2(\varphi)\right) + s(\cos(\varphi) - 3p\cos(\varphi)) + 2p - 1)).$$

Первые три сомножителя в производной положительны при $s \in [0, \frac{1}{\cos(\varphi)}]$ и $\varphi \in [0, \pi/2]$. Корень четвертого сомножителя, который может попасть в отрезок $[\frac{1}{r+\cos(\varphi)}, \frac{1}{\cos(\varphi)}]$, выражается следующим образом:

$$\mathrm{s}_0(p,\varphi) =$$
$$\frac{1}{6(p+2)\cos(\varphi)}\left(\sqrt{2}\csc(\varphi)\sqrt{(p(5p+7)-10)\cos(2\varphi)+p(13p+23)-2}\right.$$
$$\left.\left(\sqrt{3}\sin\left(\tfrac{1}{3}\alpha(p,\varphi)\right) - \cos\left(\tfrac{1}{3}\alpha(p,\varphi)\right)\right) + 4(p+1)\right),$$

где

$$\alpha(p,\varphi) =$$
$$\arccos\left(\frac{\sin(\varphi)(-(p+4)(p(16p+29)-14)\cos(2\varphi)+p(p(16p+3)-6)+88)}{\sqrt{2}\sqrt{((p(5p+7)-10)\cos(2\varphi)+p(13p+23)-2)^3}}\right).$$

Исследовать это выражение сложно. При $p \to \infty$ получаем

$$\widetilde{s_0}(r,\varphi) = \frac{2}{3\cos(\varphi)} - \frac{2\sqrt{2}\sqrt{5\cos(2\varphi)+13}\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha(\varphi)\right)}{3\sin(2\varphi)},$$

где $\alpha(\varphi) = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{16\sqrt{2}\sin^3(\varphi)}{\sqrt{(5\cos(2\varphi)+13)^3}}\right)$. Учитывая эти рассуждения, получаем приближенное значение для $IntA_p(r,\varphi)$:

$$\frac{2px\binom{4p}{2p}|x+iy|^{2p+1}|1-x-iy|^{2p}}{(2p+1)\left((1-x)x-y^2\right)},$$

где $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$. Подставляя это выражение в уравнение и возвращаясь к исходной переменной, получаем искомое уравнение для кривой. Оценить расстояние от корня до кривой не представляет труда.

Выражаю благодарность моему научному руководителю Игорю Яковлевичу Новикову за постановку задачи и помощь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков, И. Я. Асимптотика корней полиномов Бернштейна, используемых в построении модифицированных всплесков Добеши / И. Я. Новиков // Матем. заметки. — 2002. — Т. 71, № 2. — С. 239–253.

2. Новиков, И. Я. Теория всплесков / И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина. — М. : Физматлит, 2005.

3. Тихонов, И. В. Как выглядят аттракторы нулей для классических полиномов Бернштейна / И. В. Тихонов, В. Б. Шерстюков, Д. Г. Цветкович // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2017. — № 2. — С. 59–73.

REFERENCES

1. Novikov I.Ya. The asymptotics of the roots of Bernstein polynomials used in the construction of modified Daubechies wavelets. [Novikov I.Ya. Asimptotika korneyj polinomov Bernshteyjna, ispol'zuemyx v postroenii modificirovannyx vspleskov Dobeshi]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2002, vol. 71, no. 2, pp. 239–253.

2. Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Scopina M.A. Wavelet theory. [Novikov I.Ya., Protasov V.Yu., Scopina M.A. Teoriya vspleskov]. Moscow, 2005.

3. Tikhonov I.V., Sherstukov V.B., Tsvetkovich D.G. How the attractors of zeros look like for classical Bernstein polynomials. [Tikhonov I.V., Sherstukov V.B., Tsvetkovich D.G. Kak vyglyadyat attraktory nuleyj dlya klassicheskix polinomov Bernshteyjna]. *Differencial'nye uravneniya i processy upravleniya — Differential equations and control processes*, 2017, no. 2, pp. 59–73.

Зимина М. Г., аспирант математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия

Zimina M. G., graduate student of the Faculty of Mathematics Voronezh State University, Voronezh, Russia