УДК 517.9 + 621.67

К АНАЛИЗУ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В КОНИЧЕСКОМ 3D-ДИФФУЗОРЕ С ОСТРЫМ УГЛОМ РАСКРЫТИЯ

И. А. Гнеушев, М. И. Ковалева, Ю. И. Сапронов

Воронежский государственный университет,
Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина

Поступила в редакцию 05.02.2018 г.

Аннотация. Информация о динамических характеристиках жидкости в диффузорах необходима для решения задач оптимизации технических показателей проточных частей турбинных насосов, участвующих в перекачке нефти по магистральным трубопроводам. Описание таких характеристик можно получить на основе имеющихся аналитических выражений для решений модельных уравнений гидродинамики или их упрощенных вариантов, используемых в таких задачах. Получаемые из уравнения Навье-Стокса упрощенные (редуцированные) уравнения позволяют достаточно точно моделировать течения жидкости в конических областях. В данной статье использован подход, связанный с функциональной редукцией уравнения Навье-Стокса (в случае трехмерного диффузорного течения) к смешанной краевой задаче для ОДУ второго порядка с квадратичной степенной нелинейностью (посредством подстановки, аналогичной подстановке Гамеля в случае двумерного диффузора). При достаточно малых углах раскрытия (кругового) конуса получено асимптотическое приближение к решению редуцированного уравнения.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса; диффузорное течение; подстановка Гамеля; редуцированное уравнение; функционал энергии; асимптотическое приближение к решению.

THE ANALYSIS OF CURRENTS OF LIQUID IN CONIC 3D-DIFFUZORE WITH THE SHARP CONE SOLUTION CORNER

I. A. Gneushev, M. I. Kovaleva, Yu. I. Sapronov

Abstract. Information on dynamic characteristics of liquid in diffusers it is important for problems of optimization of technical characteristics flowing parts of the turbine pumps participating in pumping of oil on to the main pipelines. The description of such characteristics is possible to receive on the basis of the available analytical expressions for decisions the model equations of hydrodynamics or their simplified options, used in such tasks. Received from Navier-Stokes's equation the simplified (reduced) equation allow to model rather precisely currents of liquid in conic areas. In this article it is used the approach connected with a functional reduction of the equation of Navier-Stokes (in case of a three-dimensional diffuser current) to a regional task for the ODE (by means of the substitution similar to Hamel's substitution in a case 2D-diffuser). At enough small a solution corner (circular) cone asymptotic approach to the decision is received the reduced equation.

Keywords: Navier-Stokes's equation; diffuser current; Hamel's substitution; the reduced equation; functionality of energy;asymptotic approach to the decision.

1. ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ РЕДУКЦИЯ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА В КОНИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Рассмотрим трехмерное уравнение движения несжимаемой жидкости в прямоугольной системе координат

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)(\mathbf{v}) = \nu\ \Delta(\mathbf{v}) - \frac{1}{\rho}\ \mathrm{grad}\,(p)$$

(уравнение Навье-Стокса) совместно с уравнением неразрывности $\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0$, [1]-[3]. В сферических координатах r,θ,φ система скалярных уравнений Навье-Стокса примет следующий вид (см. [1]-[3]):

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial v_r}{\partial t} + (\mathbf{v},\widetilde{\nabla})v_r - \frac{{v_\theta}^2+{v_\varphi}^2}{r} = \\
= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\widetilde{\Delta}v_r - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial(v_\theta\sin(\theta))}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right], \\
\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + (\mathbf{v},\widetilde{\nabla})v_\theta + \frac{v_r v_\theta}{r} - \frac{{v_\varphi}^2\,\mathrm{ctg}(\theta)}{r} = \\
= -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left[\widetilde{\Delta}(v_\theta) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\theta} - \frac{v_\theta}{r^2\sin^2(\theta)} - \frac{2\cos(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right], \\
\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v},\widetilde{\nabla})v_\varphi + \frac{v_r v_\varphi}{r} + \frac{v_\theta v_\varphi\,\mathrm{ctg}(\theta)}{r} = \\
= -\frac{1}{\rho r\sin(\theta)}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \nu\left[\widetilde{\Delta}(v_\varphi) + \frac{2}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cos(\theta)}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi}{r^2\sin^2(\theta)}\right],
\end{array}\right\}$$

где

$$(\mathbf{v},\widetilde{\nabla}) = v_r\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\widetilde{\Delta}(f) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}.$$

Уравнение неразрывности, соответственно, запишется в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 v_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\left(\frac{\partial(\sin(\theta)v_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right) = 0.$$

После перехода к сферическим координатам r,θ,φ и наложения условия осевой симметрии на рассматриваемые течения в коническом диффузоре

$$\mathbf{v} \;:=\; (v_r,v_\theta,v_\varphi) \;=\; (v,0,0)$$

система уравнений Навье-Стокса упростится и предстанет в виде скалярного уравнения (см. [1]-[2])

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left[\widetilde{\Delta}(v) - \frac{2v}{r^2}\right]. \tag{1}$$

Из (1) получаем $\frac{\partial p}{\partial\theta} = 0,\quad \frac{\partial p}{\partial\varphi} = 0$ (p не зависит от φ и θ : $p = p(r)$). В случае стационарной задачи, после сокращения этого уравнения на общий множитель Q (Q — const), подстановки $v = \frac{Q\,u(\varphi,\theta)}{r}$ и отбрасывания общего множителя r^{-3}, получим уравнение

$$-\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \mathrm{ctg}(\theta)\frac{\partial u}{\partial\theta} + \sin^{-2}(\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right) - Q\,u^2 + 2\,\nu\,u + \frac{1}{Q}\frac{r^3}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

из которого следует $\frac{r^3}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = c$ (c — некоторая константа) и $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho c}{r^3}$. Следовательно, давление описывается формулой: $p = -\frac{\rho c}{2\,r^2} + c_1$. Если, далее, принять аналог подстановки Джеффри-Гамеля: $v = \frac{Q\,u(\theta)}{r}$ (означающей, в частности, независимость u от φ), получим, после умножения на ν^{-1}, уравнение

$$u'' + \mathrm{ctg}(\theta)\,u' - 2\,u + \mathcal{R}u^2 = C, \qquad \mathcal{R} \;=\; \frac{Q}{\nu}, \tag{2}$$

являющееся, до некоторой степени, аналогом уравнения Джеффри-Гамеля [1]-[4]. После добавления к (2) стандартных условий, связанных с течением в специальной области (круговом конусе $\Omega = \{(r,\theta,\varphi) : r > 0, \theta \leqslant \beta\}$, $0 < \beta < \pi$), учитывая при этом условие прилипания жидкости к границе области и осевую симметрию, получим граничное условие

$$u(\beta) = 0, \qquad u'(0) = 0. \tag{3}$$

Левая часть уравнения (2) является антиградиентом функционала энергии: $f(u) = -\mathrm{grad} V(u)$,

$$V(u) := \int\limits_0^\beta \sin(\theta)\left(\frac{(u')^2}{2} + u^2 - \frac{\mathcal{R}u^3}{3} + Cu\right) d\,\theta\,, \tag{4}$$

при граничном условии (3) и условии постоянства промасштабированной величины потока:

$$\int\limits_0^\beta \sin(\theta) u(\theta) d\,\theta \;=\; 1 - \cos(\beta)\,. \tag{5}$$

Таким образом, при исследовании краевой задачи (2)-(3) можно применять локальные и нелокальные версии вариационной схемы Ляпунова-Шмидта [5]-[8].

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВЕТВЕЙ РЕШЕНИЙ РЕДУЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ УГЛАХ РАСРЫТИЯ КОНУСА

Итак, если в специализированном уравнении Навье-Стокса (1) положить $v = \frac{Q\,u(\theta)}{r}$ (аналог подстановки Джеффри-Гамеля), то получим более простое уравнение (2), где $C = C(\beta)$, $\quad Q = Q(\beta) > 0$ — константы (при каждом фиксированном значении β), и при этом должно быть выполнено условие (5). Запишем величину потока в виде

$$Q(\beta) = \sigma\,\beta^2 + K(\beta^2)\,\beta^4\,, \qquad \sigma > 0\,, \tag{6}$$

где $K(\eta)$ — некоторая аналитическая функция. Условия прилипания жидкости к границе области и осевая симметрия дают выполнение краевых условий (3) с интегральным соотношением (5). Интеграл (5) является средним значением функции $u(\theta)$ (в скалярном произведении $\langle w_1,w_2\rangle \;:=\; \int\limits_0^\beta \sin(\theta)\, w_1(\theta)\; w_2(\theta)\, d\,\theta)$, которое для краткости будем в дальнейшем обозначать символом $[u]$, $[u] = \langle w\,,1\rangle$. Константа $C(\beta)$ в правой части уравнения (2) определяется через равенство средних от левой и правой частей этого соотношения:

$$[u'' + \mathrm{ctg}(\theta)\,u' - 2\,u + \mathcal{R}u^2] = C(\beta)\,(1 - \cos(\beta))\,. \tag{7}$$

Так как $[u'' + \mathrm{ctg}(\theta)\,u' - 2\,u] = \sin(\beta)u'(\beta) - 2\,Q$, то из (7) получим

$$C(\beta) = \frac{(\sin(\beta)\,u'(\beta) - 2\,Q + \mathcal{R}\,[u^2])}{(1 - \cos(\beta))} =$$

$$= 2\,\left(u''(0) + \sigma\,\left(\frac{u(0)^2}{\nu} - 2\right)\right) + O(\beta^2)\,. \tag{8}$$

Здесь учтено граничное условие в нуле, из которого следует соотношение $u'(\theta) = u''(0)\theta + o(\theta^2)$, и учтена четность функции $u(\theta)$, вытекающая из условия осевой симметрии поля скоростей в диффузоре.

Как было отмечено выше, левая часть уравнения (2) является антиградиентом функционала энергии (4), то есть соотношение (2) — уравнение Эйлера-Лагранжа для его экстремалей при условии (5). После замен $\theta \longmapsto \beta\,\widetilde{\theta}$, $w(\widetilde{\theta}) := u(\beta\,\widetilde{\theta})$, $w'(\widetilde{\theta}) := \beta\,u'(\beta\,\widetilde{\theta})$, $w''(\widetilde{\theta}) := \beta^2\,u''(\beta\,\widetilde{\theta})$ получим функционал энергии в виде

$$\widetilde{V}_\beta(w) := \int\limits_0^1 \frac{\sin(\beta\,\widetilde{\theta})}{\beta}\left(\frac{(w')^2}{2} + \beta^2\left(w^2 - \frac{\mathcal{R}w^3}{3}\right)\right) d\,\widetilde{\theta}\,. \tag{9}$$

Ему соответствует промасштабированное уравнение Эйлера-Лагранжа

$$w'' + \beta\ \mathrm{ctg}(\beta\,\widetilde{\theta})\,w' - \beta^2\left(2\,w - \mathcal{R}\,w^2\right)\ =\ D\ (=\ D_0 + O(\beta^2))\,. \tag{10}$$

Левая часть последнего уравнения является антиградиентом для $\widetilde{V}_\beta(w)$ — в промасштабированном скалярном произведении

$$\langle w_1,w_2\rangle_\beta\ :=\ \int\limits_0^1 \frac{\sin(\beta\,\widetilde{\theta})}{\beta} w_1(\widetilde{\theta})\ w_2(\widetilde{\theta})\,d\,\widetilde{\theta} \tag{11}$$

при условиях

$$w'(0) = 0\,, \qquad w(1) = 0\,, \qquad \int\limits_0^1 \frac{\sin(\beta\widetilde{\theta})}{\beta}\,w(\widetilde{\theta})\,d\,\widetilde{\theta}\ =\ \frac{1-\cos(\beta)}{\beta^2}\,. \tag{12}$$

В предельном случае $\beta = 0$ имеем

$$\widetilde{V}_0(w) := \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \widetilde{\theta}\,w'(\widetilde{\theta})^2\,d\,\widetilde{\theta} \tag{13}$$

— при условиях

$$w'(0) = 0\,, \quad w(1) = 0\,, \quad \int\limits_0^1 \widetilde{\theta}\,w(\widetilde{\theta})\,d\,\widetilde{\theta}\ =\ \frac{1}{2}\,. \tag{14}$$

Последнее соотношение в (14) выполнено в силу (12).

Константа $D(\beta)$ в правой части уравнения (10) является неизвестной и определяется через равенство промасштабированных средних ($([w]_\beta := \langle w,1\rangle_\beta)$ левой и правой частей соотношения (10):

$$[w'' + \beta\ \mathrm{ctg}(\beta\,\widetilde{\theta})\,w' - \beta^2(2\,w - \mathcal{R}\,w^2)]_\beta = D(\beta)\,\frac{(1-\cos(\beta))}{\beta^2}\,. \tag{15}$$

Так как $[w'' + \beta\ \mathrm{ctg}(\beta\,\widetilde{\theta})\,w']_\beta = \frac{\sin(\beta)}{\beta}\,w'(\beta)$, то из (15) получим

$$D(\beta) = \frac{\beta^2}{(1-\cos(\beta))}\left(\frac{\sin(\beta)}{\beta}\,w'(\beta) + \beta^2\left(\left[\mathcal{R}\,w^2\right]_\beta - \frac{2\,Q}{\beta^2}\right)\right)\,.$$

Критическая точка предельного функционала (13) при условии (14) определяется уравнением

$$w'' + \frac{w'}{\widetilde{\theta}} = -2\,.$$

Следовательно, критической точкой функционала $\widetilde{V}_0$ является функция $w_0(\widetilde{\theta}) = 2\left(1-\widetilde{\theta}^2\right)$. В итоге мы получаем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* w_0 *— критическая точка функционала* $\widetilde{V}_0(w)$ *на аффинном подпространстве* $\Pi_0 := \{w\ :\ \int\limits_0^1 \widetilde{\theta}\,w\,d\widetilde{\theta} = \frac{1}{2}\}$. *Тогда для выходящей из* w_0 *ветви* w_β *критических точек функционала* $\widetilde{V}_\beta(w)$ *на подпространстве* $\Pi_\beta := \{w\ :\ \int\limits_0^1 \frac{\sin(\beta\widetilde{\theta})}{\beta}\,w\,d\widetilde{\theta} = +K(\beta^2)\,\beta^2\}$ *выполняется следующее асимптотическое представление*:

$$w_\beta = w_0 + o(\beta^2)\,, \qquad w_0(\widetilde{\theta}) = 2\left(1-\widetilde{\theta}^2\right)\,.$$

Доказательство вытекает из следующих несложно проверяемых соотношений: $\frac{\sin(\beta\widetilde{\theta})}{\beta} - \widetilde{\theta} = o(\beta^2)\,, \quad \int\limits_0^1 \frac{\sin(\beta\widetilde{\theta})}{\beta}\, w\, d\widetilde{\theta} - \int\limits_0^1 \widetilde{\theta}\, w\, d\widetilde{\theta} = o(\beta^2)\,, \quad \widetilde{V}_\beta(w) - \widetilde{V}_0(w) = o(\beta^2)\,.$

Замечание. Из сформулированной теоремы следует, что для решения уравнения (2) имеет место представление

$$u = 2\left(1 - \left(\frac{\theta}{\beta}\right)^2\right) + \beta^2\, h\left(\frac{\theta}{\beta}\,,\, \beta^2\right)\,, \quad \theta \leqslant \beta\,,$$

где $h(x,y)$ — некоторая аналитическая функция на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$. Асимптотические представления более высокого порядка можно получать непосредственно на основе уравнения (10).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидродинамика. ч. 2. / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — М. : Физматгиз, 1963. — 728 с.

2. Слезкин, Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. — М. : ГИТТЛ, 1955. — 520 с.

3. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — М. : Наука, 1986. — 736 с.

4. Акуленко, Л. Д. Бифуркация многомодовых течений в плоском диффузоре / Л. Д. Акуленко, С. А. Кумакшев // ПММ. — 2008. — Т. 72, вып. 3. — С. 421–441.

5. Даринский, Б. М. Бифуркации экстремалей фредгольмовых функционалов / Б. М. Даринский, Ю. И. Сапронов, С. Л. Царев // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2004. — Т. 12. — С. 3–140.

6. Сапронов, Ю. И. Моделирование диффузорных течений жидкости посредством редуцированных уравнений / Ю. И. Сапронов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. — 2014. — Т. 7, вып. 2. — С. 74–86.

7. Моделирование течений жидкости посредством редуцированных уравнений / Ю. И. Сапронов, А. П. Карпова, В. В. Конев, А. С. Коротких // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 167–188.

8. Коротких, А. С. Бифуркации стационарных решений уравнения «реакция-диффузия» и переход концентраций в стабильное состояние / А. С. Коротких // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 1. — С. 115–127.

REFERENCES

1. Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. Teoretical hydrodynamics, part 2. [Kochin N.E., Kibel I.A., Roze N.V. Teoreticheskaya gidrodinamika ch. 2]. 1963, 728 p.

2. Slezkin N.A. Dinamiks of a viscous incompressible fluid. [Slezkin N.A. Dinamika vyazkoyj neszhimaemoyj zhidkosti]. Moscow, 1955, 520 p.

3. Landau L.D., Lifshits E.M. Teoretical physics. V. VI. [Landau L.D., Lifshits E.M. Teoreticheskaya fizika. T. VI]. Moscow, 1986, 736 p.

4. Akulenko L.D., Kumakshev S.A. Bifurcation of multimode currents in the flat diffuser. [Akulenko L.D., Kumakshev S.A. Bifurkaciya mnogomodovyx techeniyj v ploskom diffuzore]. *PMM — PMM*, 2008, vol. 72, iss. 3, pp. 421–441.

5. Darinsky B.M., Sapronov Yu.I., Tsaryov S.L. Bifurcations of extremals of Fredholm functionals. [Darinsky B.M., Sapronov Yu.I., Tsaryov S.L. Bifurkacii ekstremaleyj fredgol'movyx funkcionalov]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2004, vol. 12, pp. 3–140.

6. Sapronov Yu.I. Modeling of diffuser currents of liquid by means of the reduced equations. [Sapronov, Yu.I. Modelirovanie diffuzornyx techeniyj zhidkosti posredstvom reducirovannyx uravneniyj]. *Vestnik YuUrGU. Ser. Matem. modelirovanie i programmirovanie — YuUrGU Bulletin. Series: Matem. modeling and programming*, 2014, vol. 7, iss. 2, pp. 74–86.

7. Sapronov Yu.I., Karpova A.P., Konev V.V., Korotkikh A.S. Short Ampere-second. Modeling currents of liquid by means of the reduced equations. [Sapronov Yu.I., Karpova A.P., Konev V.V., Korotkikh A.S. Modelirovanie techeniyj zhidkosti posredstvom reducirovannyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 167—188.

8. Korotkih A.S. Bifurcations of stationary solutions of the equation «reaktion-diffusion» and transition of concentration to the stable state. [Korotkix, A.C. Bifurkacii stacionarnyx resheniyj uravneniya «reakciya-diffuziya» i perexod koncentraciyj v stabil'noe sostoyanie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 1, pp. 115–127.

Гнеушев И. А., аспирант кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Российская Федерация
E-mail: wtn70@yandex.ru

Gneushev I. A., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: wtn70@yandex.ru

Ковалева М. И., Военно-воздушная академия им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина, г. Воронеж, Российская Федерация

Kovaleva M. I., Air force Academy named after Prof. N. E. Zhukovsky and Yu. A. Gagarin, Voronezh, Russian Federation

Сапронов Ю. И., профессор кафедры математического моделирования, Воронежский государственный университет г. Воронеж, Российская Федерация
Тел.: yusapr@mail.ru

Sapronov Yu. I., Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
Tel.: yusapr@mail.ru