УДК 517.928.7

ОБОСНОВАНИЕ ПРИНЦИПА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ОДУ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Д. Бигириндавйи, В. Б. Левенштам

Южный федеральный университет

Поступила в редакцию 11.01.2019 г.

Аннотация. Для нормальных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими слагаемыми и краевыми условиями обоснован метод усреднения Крылова-Боголюбова. Соответствующие краевые условия описаны в общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений и представляют собой обобщение условий периодичности решения.

Ключевые слова: краевая задача, метод усреднения, нормальная система.

JUSTIFICATION OF THE AVERAGING PRINCIPLE FOR A SYSTEM OF RAPIDLY OSCILLATING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH BOUNDARY CONDITIONS

D. Bigirindavyi, V. B. Levenshtam

Abstract. For normal nonlinear systems of ordinary differential equations with rapidly oscillating terms and boundary conditions, the Krylov-Bogolyubov averaging method is justified. The corresponding boundary conditions are described in the general theory of ordinary differential equations and represent a generalization of the conditions for the periodicity of the solution.

Keywords: boundary value problem, averaging method, normal system.

ВВЕДЕНИЕ

Теория метода усреднения [1], [2], который называют так же методом усреднениям Крылова-Боголюбова, разработана в настоящее время для обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточно большой полнотой. Однако вопросы усреднения краевых задач для нормальных систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений исследованы еще недостаточно. По-видимому, имеется лишь одна работа [3], в которой метод усреднения обоснован для некоторого класса краевых задач. В данной работе этот метод обоснован для иного класса краевых задач. Эти краевые задачи без связи с методом усреднения исследовались, например, в [4]. Они служат обобщением задач о периодических решениях. Обоснование метода усреднения в данной работе, как и в работе [3], осуществляется с помощью теоремы о неявных отображениях (см например, [5]). Впервые такой подход использовался в работе [6] при обосновании метода усреднения для абстрактных параболических уравнений.

1. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть $\Gamma = \{(x,t), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]\}$ и $\Pi = \{(x,t,\tau), x \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T], \tau \in [0,\infty)\}$. На отрезке $t \in [0,T]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,t) + \varphi(x,t,\omega t) \\ Ax(0) + Bx(T) = 0, \omega \gg 1 \end{cases} \tag{1}$$

Здесь A и B — квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $F(x,t)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ вектор–функции, определенные на множествах Γ и Π соответственно, со значениями в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющие следующим условиям.

1. $F(x,t)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ вместе с их производными по x непрерывны на множествах Γ и Π соответственно.

2. Пусть для каждого ограниченного множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ выполняется условие: $\varphi(x,t,\tau)$ имеет нулевое среднее по τ, равномерно относительно $(x,t) \in \Omega \times [0,T]$ выполняется предельное равенство

$$\langle \varphi(x,t,\tau) \rangle = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(x,t,\tau)\, \mathrm{d}\tau = 0.$$

3. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ (x,t,τ) равномерно ограничены на Π.

4. $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x, то есть существует такая постоянная L, что при всех $x, y \in \Omega$, $t \in [0,T]$ и $\tau \in [0,\infty)$ выполняются неравенства

$$|| \frac{\partial F}{\partial x}(y,t) - \frac{\partial F}{\partial x}(x,t) || \leqslant L|y - x|,$$

$$|| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(y,t,\tau) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t,\tau) || \leqslant L|y - x|.$$

Здесь $|\ v\ |$-норма вектора $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^t \in \mathbb{R}^n$, а $||\ V\ ||$-норма матрицы $V = (V_{ij})$, согласованная с нормой $|\ v\ |$, (например
$||\ v\ || = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\ a_{ij}\ |$).

5. Усредненная задача

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = F(y,t) \\ Ay(0) + By(T) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

имеет решение $\overset{o}{y}(t)$.

6. Введем обозначение : $L(t) = F_x(\overset{o}{y}(t),t)$ и пусть $\Phi(t)$-матрицант[1)] системы

$$\frac{dx}{dt} = L(t)x \tag{3}$$

[1)] напомним, что матрицантом системы (3) называют её фундаментальная система решения $\Phi(t)$ нормированную в точке $t = 0$, то есть $\Phi(0) = E$

Будем предполагать, что имеет место соотношение
$\Delta = det\left[A\Phi(0) + B\Phi(T)\right] \neq 0$.

В (1) сделаем замену

$$x(t) \longrightarrow x(t) + \overset{o}{y}(t). \tag{4}$$

Получим

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = L(t)x + f(x,t,\omega t) \\ Ax(0) + Bx(T) = 0, \omega \gg 1 \end{cases} \tag{5}$$

где $f(x,t,\tau) = \varphi(x + \overset{o}{y},t,\tau) + F(x + \overset{o}{y},t) - F(\overset{o}{y},t) - [F'_x(\overset{o}{y},t)]x \equiv H(x,t,\tau) + \Psi(x,t)$, $H(x,t,\tau) = \varphi(x + \overset{o}{y},t,\tau)$, $\Psi(x,t) = F(x + \overset{o}{y},t) - F(\overset{o}{y},t) - [F'_x(\overset{o}{y},t)]x$.
Прежде всего, наряду с задачей (5) рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = L(t)y + \Psi(y,t) \\ Ay(0) + By(T) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

которая очевидно, имеет решение $y(t) = 0$.

Далее нам понадобится известное банахово пространство $C_\mu([0,T])$, $\mu \in (0,1)$, то есть, пространство непрерывных вектор-функций $w : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($w \in C([0,T])$), удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ;
$||w||_{C_\mu([0,T])} = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} ||w(t)|| + \sup\limits_{0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant T} \frac{||w(t_2) - w(t_1)||}{(t_2 - t_1)^\mu} < \infty$.

Справедливо следующее утверждение

Теорема. *При* $\mu \in (0,1)$ *существует* $\omega_0 > 0$ *такое, что в некоторой* $C_\mu([0,T])$*-окрестности вектор-функции* $\overset{o}{y}(t)$ *задача* (1) *при* $\omega > \omega_0$ *имеет единственное решение* $x_\omega(t)$*, и справедливо предельное равенство* $\lim\limits_{\omega \to \infty} ||x_\omega(t) - \overset{o}{y}(t)||_{C_\mu([0,T])} = 0$

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Доказательству теоремы предпошлём некоторые вспомогательными построения. От (5) и (6) перейдем в силу [4] к эквивалентным интегральным уравнениям

$$x(t) = \int_0^T G(t,s) f(x(s),s,\omega s) \mathrm{d}s \tag{7}$$

$$y(t) = \int_0^T G(t,s) \Psi(y(s),s) \mathrm{d}s \tag{8}$$

Здесь $G(t,s) = \begin{cases} \Phi(t)S(s), 0 \leqslant t < s \\ \Phi(t)U(s), s < t \leqslant T \end{cases}$ — функция Грина рассматриваемой краевой задачи (см., [4]), где $S(s) = -\left[A + B\Phi(T)\right]^{-1} \Phi(T)B\Phi^{-1}(s)$, $U(s) = \{E - \left[A + B\Phi(T)\right]^{-1} \Phi(T)B\}\Phi^{-1}(s)$, E — единичная матрица.

Исходя из равенств (7) и (8), зададим в какой-либо окрестности точки $(0,\infty)$ пространства $C_\mu([0,T]) \times [1,\infty]$ оператор $N : C_\mu([0,T]) \times [1,\infty] \to C_\mu([0,T])$, $0 < \mu \leqslant 1$ формулой:

$$[N(x,\omega)](t) = \tag{9}$$

$$\begin{cases} x(t) - \int\limits_0^t \Phi(t)U(s) f(x(s),s,\omega s) \mathrm{d}s - \int\limits_t^T \Phi(t)S(s) f(x(s),s,\omega s) \mathrm{d}s, \omega \neq \infty \\ x(t) - \int\limits_0^t \Phi(t)U(s)\Psi(x(s),s) \mathrm{d}s - \int\limits_t^T \Phi(t)S(s)\Psi(x(s),s) \mathrm{d}s, \omega = \infty \end{cases}$$

Ради кратности, первый интеграл в (9) (при $\omega = \infty$ и $\omega \neq \infty$) будем обозначать через $[I_1(x,\omega)](t)$, а второй через $[I_2(x,\omega)](t)$.

Теорема вытекает из теоремы о неявных отображениях [5] и следующего основного утверждения.

Лемма. *Оператор $N(x,\omega)$ определен в окрестности точки $(0,\infty)$, непрерывен и непрерывно дифференцируемый в этой точке. При этом $N(0,\infty) = 0$, а производная Фреше $D_yN(0,\infty) = I$ где I — тождественный оператор в $C_\mu([0,T])$*

Действительно, в силу этой леммы согласно теореме о неявных отображениях найдутся $\omega_0 > 0$ и $\delta > 0$, такие что в окрестности $||x||_{C_\mu([0,T])} \leqslant \delta$ при $\omega > \omega_0$, существует единственное решение x_ω задачи $N(t,\omega) = 0$ и при этом $x_\omega \underset{\omega\to\infty}{\to} 0$ в $C_\mu([0,T])$.

Леммы вытекает из следующих четырех утверждении.

1. Оператор $N(x,\omega)$ непрерывен в точке $(0,\infty)$,
2. $N(x,\omega)$ имеет дифференциал Фреше по x в точке $(0,\infty)$, который непрерывен в этой точке,
3. $N(0,\infty) = 0$,
4. $D_yN(0,\infty) = I$.

Основное внимание мы уделим доказательству пункта 1, поскольку пункт 2 доказывается аналогично, а пункты 3, 4 очевидны. Докажем непрерывность оператора $N(x,\omega)$ в точке $(0,\infty)$. Для этого зафиксируем любое $\varepsilon > 0$ и докажем, что существуют $0 < \delta_1 < 1$ и $\omega_1 > 0$, такие что при $\omega > \omega_1$ и $||x||_{C_\mu([0,T])} < \delta_1$ выполняется оценка

$$||N(x,\omega) - N(0,\infty)||_{C_\mu([0,T])} < \varepsilon \tag{10}$$

Заметим, что $N(0,\infty) = 0$, поэтому нам остается доказать что для любого $\varepsilon > 0$ существует $0 < \delta_1 < 1$ такие, что при

$$\|x\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_1, \omega > \omega_0 \tag{11}$$

выполняется неравенство

$$||N(x,\omega)||_{C_\mu([0,T])} < \varepsilon \tag{12}$$

Будем считать, что $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда остается доказать неравенство

$$||I_i(x,\omega)||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}, i = 1,2 \tag{13}$$

когда x и ω удовлетворяют условию (11). Вначале, оценим I_1.
Воспользуемся известным (см., [6]) интерполяционным неравенством

$$\|u\|_{C_\mu([0,T])} \leqslant \|u\|_{C([0,T])} + \left(2\|u\|_{C([0,T])}\right)^{1-\mu} \|u\|^\mu_{C^1([0,T])} \tag{14}$$

$u \in C^1([0,T]$.
Из формулы (9) легко следует оценка

$$\sup_{\|x\|_{C_\mu([0,T])\leqslant 1, t\in[0,T]}} \|\frac{\partial[I_1(x,\omega)](t)}{\partial t}\| \leqslant C_0 \tag{15}$$

где $C_0 > 0$ — константа.

В силу соотношений (14), (15) неравенство (12) достаточно доказать при $\mu = 0$ (то есть с заменой $C_\mu([0,T])$ на $C([0,T])$ при $||x||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}$). Далее под символом $\|.\|$ будем подразумевать $\|.\|_{C([0,T])}$, если не оговорено иное. Имеем:

$$\|I_1\| = \| \int_0^t \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s + \int_0^t \Phi(t)U(s)\Psi(x(s),s)\mathrm{d}s\| \equiv \|I_{11} + I_{12}\|.$$

Поскольку $\|\Psi(x(s),s)\| = \bar{o}(||x||)$ при $||x|| \to 0$ равномерно относительно $s \in [0,T]$, то найдется δ_2, такое что при $||x|| \leqslant \delta_2 ||I_{12}||_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{12}$. Оценим теперь $\|I_{11}\|$.

Вначале найдем $t_0 > 0$, так что при всех $\omega > 0$ и всех $||x|| < \delta_2$:

$$\|I_{11}\| \leqslant \| \int_0^{t_0} \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\| + \| \int_{t_0}^t \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\| = \|I'_{11}\| + \|I''_{11}\|.$$

Возможность выбора такой величины t_0 следует из неравенств:

$$\|I'_{11}\| = || \int_0^{t_0} \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s|| \leqslant \int_0^{t_0} ||\Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)||\mathrm{d}s \leqslant Mt_0 < \frac{\varepsilon}{12},$$

где $M > 0$ — константа.

Перейдем теперь к оценке интеграла $\int_{t_0}^t \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s$, где $t > t_0$. Разабъём интервал (t_0,t) на m равных частей и воспользуемся представлением:

$$\|I''_{11}\| = \| \int_{t_0}^t \Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s)\mathrm{d}s\| \leqslant$$

$$\| \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \left[\Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s) - \Phi(t)U(\tau_i)H(x(\tau_i),\tau_i,\omega s)\right] \mathrm{d}s\| +$$

$$+\| \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \Phi(t)U(\tau_i)H(x(\tau_i),\tau_i,\omega s)\mathrm{d}s\| \equiv \|A\| + \|B\|.$$

Вначале оценим слагаемое $\|A\|$. Имеем

$$||A|| \leqslant \sum_{i=1}^m \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} ||\Phi(t)U(s)H(x(s),s,\omega s) - \Phi(t)U(\tau_i)H(x(\tau_i),\tau_i,\omega s)||\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^m \left[\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} ||\Phi(t)H(x(s),s,\omega s)|| ||U(s) - U(\tau_i)||\mathrm{d}s\right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^m \left[\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \|\Phi(t)U(\tau_i)\| \|(H(x(s),s,\omega s) - H(x(\tau_i),\tau_i,\omega s))\|\mathrm{d}s\right].$$

Так как $||U(s) - U(\tau_i)|| = ||\int_s^{\tau_i} U'(\tau)\mathrm{d}s|| \leqslant L_1(\tau_i - s) \leqslant L_1\frac{T}{m}$; $L_1 = const > 0$. то существует $m = m_1$ столь большое, что $||U(s) - U(\tau_i|| < \frac{\varepsilon}{24}$.

Далее, $||H(x(s),s,\omega s) - H(x(\tau_i),\tau_i,\omega s)|| \leqslant L_2(||x(s) - x(\tau_i)|| + |s - \tau_i|)$; $L_2 = const > 0$. Поскольку $x \in C_\mu([0,T])$, то имеем оценку $||x(s) - x(\tau_i)|| \leqslant L_3(s - \tau_i)^\mu$; $L_3 = const > 0$. Из проведенных рассуждений следует, что найдется столь большое m, при котором для всех $\omega > 0$ имеет место оценка: $||A|| < \frac{\varepsilon}{12}$.

Оценим теперь $\|B\|$. В каждом интеграле, входящем в B, сделаем замену $\omega s = r$.

Получим

$$||B|| = ||\Phi(t) \sum_{i=1}^m U(\tau_i) \left[\frac{1}{\omega\tau_{i+1}} \int_0^{\omega\tau_{i+1}} H(x(\tau_i), \tau_i,r)\mathrm{d}r - \frac{1}{\omega\tau_i} \int_0^{\omega\tau_i} H(x(\tau_i),\tau_i,r)\mathrm{d}r\right] ||.$$

Согласно условиям теоремы равномерно относительно x

$$\left(||x||_{C_\mu([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

справедливы предельные равенства:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_0^N \varphi(x(\tau_i),\tau_i,r)\mathrm{d}r = 0,$$

$i = \overline{1,m}$.

Отсюда следует существование такого $\omega_0 > 0$, что при всех $\omega > \omega_0$

$$||\frac{1}{\omega\tau_i}\int_0^{\omega\tau_i} \varphi(x(\tau_i),\tau_i,r)\mathrm{d}r|| < \frac{\varepsilon}{24}, i = \overline{1,m},$$

следовательно при $\omega > \omega_0$ $||B|| < \frac{\varepsilon}{12}$, а потому $\|I_1\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Аналогично доказывается, что при достаточно большом ω_0 и $\omega > \omega_0$ выполняется оценка $\|I_2\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Таким образом, мы доказали, что $||N(x,\omega)||_{C_\mu([0,T])} \leqslant ||x|| + ||I_1|| + ||I_2|| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$, а значит оператор $N(x,\omega)$ является непрерывным в точке $(0,\infty)$. Итак, лемма доказана, а потому доказана теорема.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боголюбов, Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — М. : Физматлит. — 1974. — 403 с.

2. Митропольский, Ю. А. Метод усреднения в нелинейной механике / Ю. А. Митропольский. — Киев : Наукова думка, 1971. — 440 с.

3. Левенштам, В. Б. Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими слагаемыми и краевыми условиями / В. Б. Левенштам, П. Е. Шубин // Матем. заметки. — 2016. — Т. 100, вып. 1. — С. 94–108.

4. Бибиков, Ю. Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Н. Бибиков. — М. : Высшая школа, 1991. — 303 с.

5. Дьедонне, Ж. Основы современного анализа / Ж. Дьедонне. — М. : Мир, 1964. — 432 с.

6. Симоненко, И. Б. Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений / И. Б. Симоненко // Матем. сб. — 1970. — Т. 81(123), № 1. — С. 53–61.

REFERENCES

1. Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations. [Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A. Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy]. Moscow, 1974, 403 p.

2. Mitropolsky Yu.A. Averaging method in nonlinear mechanics. [Mitropol'skiy Yu.A. Metod usredneniya v nelineynoy mekhanike]. Kiev, 1971, 440 p.

3. Levenshtam V.B., Shubin P.E. Justification of the averaging method for differential equations with large rapidly oscillating terms and boundary conditions. [Levenshtam V.B., Shubin P.Ye. Obosnovaniye metoda usredneniya dlya differentsial'nykh uravneniy s bol'shimi bystro ostsilliruyushchimi slagayemymi i krayevymi usloviyami]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, iss. 1, pp. 94–108.

4. Bibikov Yu.N. Course of ordinary differential equations. [Bibikov Yu.N. Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy]. Moscow, 1991, 303 p.

5. Diedonne Zh. The basis of modern analysis. [D'yedonne Zh. Osnovy sovremennogo analiza]. Moscow, 1964, 432 p.

6. Simonenko I.B. Justification of the averaging method for abstract parabolic equations. [Simonenko I.B. Obosnovaniye metoda osredneniya dlya abstraktnykh parabolicheskikh uravneniy]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1970, vol. 81(123), no. 1, pp. 53–61.

Бигириндавйи Д., Аспирант, кафедра алгебры и дискретной математики, Южный Федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия
E-mail: bigirindavyidaniel@gmail.com

Bigirindavyi D., Postgraduate Student, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: bigirindavyidaniel@gmail.com

Левенштам В. Б., профессор, кафедра алгебры и дискретной математики, Южный Федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия; главный научный сотрудник, лаборатория математической физики, Южный математический институт ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия
E-mail: vleven@math.rsu.ru

Levenshtam V. B., Professor, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia; Chief Researcher, Laboratory of Mathematical Physics, Southern Mathematical Institute VNC RAN, Vladikavkaz, Russia
E-mail: vleven@math.rsu.ru