УДК 517.925.7

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ В МИГРАЦИОННЫХ МОДЕЛЯХ ХОТЕЛЛИНГА И ПУ

М. В. Половинкина[1], С. А. Рабееах[2]

[1] — *Воронежский государственный университет инженерных технологий,*
[2] — *Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 31.03.2017 г.

Аннотация. Рассматриваются нелинейные уравнения в частных производных, описывающие миграционные процессы. Первое из них предложено Хотеллингом как модель роста популяций (как было признано в дальнейшем, преимущественно нечеловеческих) и их пространственного распространения. Второе предложено Т. Пу как развитие модели Хотеллинга с учетом производства. Для каждого из этих уравнений в монографии Т. Пу установлены достаточные условия устойчивости стационарного решения. Однако оказалось возможным эти условия уточнить, если принять во внимание размеры области, в которой рассматривается уравнение. Это реализовано в работе. В основном воспроизводится схема Т. Пу, но оценки улучшены благодаря использованию неравенства Пуанкаре–Стеклова–Фридрихса.

Ключевые слова: стационарное решение, устойчивость стационарного решения, неравенство Стеклова.

ON STABILITY OF A STATIONARY SOLUTION TO MIGRATION MODELS OF HOTELLING AND PUU

M. V. Polovinkina, S. A. Rabeeakh

Abstract. We consider nonlinear partial differential equations describing migration processes. First of them was proposed by Hotelling as a population growth model with spatial diffusion. This model, as it was recognized in further, characterizes predominantly non-human populations. The second one was offered by T. Puu as the development of the Hotelling model including production. T. Puu proved sufficient conditions for stability of stationary solutions for each of these equations. In this work we refine these conditions, taking into account the size of the domain in which the equation is considered. Mostly we reproduce the scheme of T. Puu, and improve the estimates using the Poincare-Steklov-Friedrichs inequalities.

Keywords: stationary solution, stability of a stationary solution, Steklov inequality.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе рассматриваются нелинейные уравнения в частных производных, которые моделируют некоторые физические, биологические и социальные процессы. В монографии [1] рассматривался вопрос о достаточных условиях устойчивости стационарных решений таких уравнений. Выяснилось, что условия утверждений о достаточных условиях устойчивости несколько завышены. Ниже показано, что устойчивость стационарного решения будет иметь место и при чуть менее жестких ограничениях. Это оказалось возможным благодаря учету геометрии области, в которой рассматривается уравнение.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Ω — ограниченная область в плоскости переменных x_1 и x_2 с кусочно-гладкой границей Γ и диаметром d. Рассмотрим в области Ω уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = (1-p)\,p + \Delta p + (\vec{u} + p\vec{v})\,\nabla p, \tag{1}$$

где $p = p(x_1,x_2,t)$ — плотность популяции, $\vec{u}, \vec{v}$ — два постоянных вектора, определяющих интенсивность и направления автономных компонентов перемещения,

$$\Delta p = \nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}\,.$$

Это уравнение было предложено (по сведениям, содержащимся в [1] — там же см. список литературы и описание принципов построения модели) Хотеллингом в 1921 году. Оно описывает рост и распространение популяции на основе принципа Малтуса с учетом миграционных процессов. Т. Пу (см. [1], с. 41–42, 62) доказал, что для устойчивости стационарного решения уравнения (1) достаточно выполнения условия

$$1 - 2\pi - \frac{1}{2}\,\vec{v}\ \nabla\pi < 0. \tag{2}$$

Ставится задача ослабить это условие.

Рассмотрим теперь в области Ω уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} = p(1 + \alpha(\beta p^2 - p^3) - \gamma p) + \frac{1}{6}\Delta(\alpha(3\beta p^2 - 2p^3)) + (\mathbf{u} + (p-\sigma)^2\mathbf{v})\cdot p, \tag{3}$$

где p — искомая функция, $p = p(x,y,t) \in C^2(\Omega)\bigcap C^1(\overline{\Omega})$ при каждом $t > 0$, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ — постоянные векторы, определяющие интенсивность и направление автономных компонентов перемещения. В правой части уравнения (3) первое слагаемое называют членом роста, второе — членом диффузии, третье — автономным членом. Уравнение (3) предложено Т. Пу [1] в качестве замены уравнения Хотеллинга для моделирования миграционных процессов с учетом воспроизводства ресурсов.

Пусть $\pi(x,y)$ — стационарное решение уравнения (3), то есть решение уравнения

$$\pi(1 + \alpha(\beta\pi^2 - \pi^3) - \gamma\pi) + \frac{1}{6}\Delta(\alpha(3\beta\pi^2 - 2\pi^3)) + (\mathbf{u} + (\pi-\sigma)^2\mathbf{v})\cdot\pi = 0, \tag{4}$$

удовлетворяющее условию $0 < \pi < \beta$.

В [1] показано, что при $\mathbf{u} = 0, \mathbf{v} = 0$ условие

$$\mu = 1 + \alpha(3\beta\pi^2 - 4\pi^3) - 2\gamma\pi < 0 \tag{5}$$

является достаточным для асимптотической устойчивости стационарного решения. Ниже приводятся достаточные условия устойчивости стационарного решения при $\mathbf{u} \neq 0, \mathbf{v} \neq 0$, которые для случая $\mathbf{u} = 0, \mathbf{v} = 0$ ослабляют условия Т. Пу.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть π — стационарное решение уравнения (1), то есть решение уравнения

$$(1-\pi)\,\pi + \Delta\pi + (\vec{u} + \pi\vec{v})\,\nabla\pi = 0 \quad (\partial\pi/(\partial t) = 0)\,.$$

Пусть $z = p - \pi$ — малое отклонение от стационарного решения. Что мы понимаем под «малостью» отклонения, будем уточнять в процессе изложения. Тогда

$$p = \pi + z. \tag{6}$$

Подставляя выражение (6) в уравнение (1), получим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (1 - \pi - z)(\pi + z) + \Delta\pi + \Delta z + (\vec{u} + (\pi + z)\vec{v})(\nabla\pi + \nabla z) =$$

$$= (1 - \pi)\pi + +\Delta\pi + (\vec{u} + \pi\vec{v})\nabla\pi + (1 - 2\pi)z + \Delta z + (\vec{u} + \pi\vec{v} + z\vec{v})\nabla z - z^2 + z\vec{v}\nabla\pi.$$

Учитывая, что π является стационарным решением, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (1 - 2\pi)z + \Delta z + (\vec{u} + \pi\vec{v} + z\vec{v})\nabla z + z\vec{v}\nabla\pi - z^2. \tag{7}$$

Для исследования устойчивости стационарного решения умножим полученное уравнение (7) на z и проинтегрируем по области Ω, в которой рассматривается уравнение (1). После этого получим

$$\iint\limits_{\Omega} z\frac{\partial z}{\partial t}\,dx = \iint\limits_{\Omega} (1 - 2\pi)z^2\,dx +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} z\Delta z\,dx + \iint\limits_{\Omega} z(\vec{u} + \pi\vec{v} + z\vec{v})\,\nabla z\,dx + \iint\limits_{\Omega} z^2\vec{v}\nabla\pi\,dx - \iint\limits_{\Omega} z^3\,dx. \tag{8}$$

Здесь и далее мы полагаем $dx = dx_1 dx_2$. Рассмотрим в отдельности слагаемые, которые появятся при интегрировании. Будем при этом исходить из того, что на границе $\Gamma = \partial\Omega$ решение p и стационарное решение π принимают одинаковые значения. Поэтому отклонение z на границе Γ принимает нулевые значения. По формуле Грина имеем:

$$\iint\limits_{\Omega} z\Delta z dx = -\iint\limits_{\Omega} (\nabla z)^2\,dx + \int\limits_{\Gamma} z\frac{\partial z}{\partial v} ds = -\iint\limits_{\Omega} (\nabla z)^2\,dx.$$

Здесь ds — элемент дуги границы $\Gamma = \partial\Omega$. Далее имеем:

$$z\,\vec{u}\,\nabla z = \frac{1}{2}\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i\,z^2\right) = \frac{1}{2}\operatorname{div}\left(z^2\,\vec{u}\right).$$

Отсюда по формуле Гаусса-Остроградского получим:

$$\iint\limits_{\Omega} \vec{u}\,z\,\Delta z dx = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} \operatorname{div}\left(z^2\,\vec{u}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} z^2\,\vec{u}\,\vec{\nu} ds = 0,$$

где $\vec{\nu}$ — единичный внешний нормальный вектор к Γ. Для интеграла от произведения $z^2\,\vec{v}\,\nabla z$ аналогичным образом получим:

$$\iint\limits_{\Omega} z^2\,\vec{v}\,\nabla z\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}\left(z^3\,\vec{u}\,\right)\,dx = \frac{1}{3}\int\limits_{\Omega} z^3\,\vec{u}\,\vec{\nu}\,ds = 0.$$

Наконец,

$$\iint\limits_{\Omega} z\,\pi\,\vec{v}\,\nabla z\,dx = \iint\limits_{\Omega} \pi\sum_i v_i\,z\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\,dx = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} \pi\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_i\,z^2\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i \, \pi \, z^2 \right) \, dx - \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} \sum_i v_i \, z^2 \, \frac{\partial \pi}{\partial x_i} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \left(\pi z^2 \vec{v} \right) dx - \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} z^2 \, \vec{v} \, \nabla \pi \, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{\Gamma} \pi \, z^2 \, \vec{v} \, \vec{\nu} ds - \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} z^2 \, \vec{v} \, \nabla \pi \, dx = -\frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega} z^2 \, \vec{v} \, \nabla \pi \, dx.$$

Таким образом, после умножения уравнения на отклонение z и интегрирования по области Ω, мы получим равенство

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\Omega} z^2 dx = \iint\limits_{\Omega} \left(1 - 2\pi - \frac{1}{2} \vec{v} \, \nabla \pi \right) z^2 \, dx - \iint\limits_{\Omega} (\nabla z)^2 \, dx - \iint\limits_{\Omega} z^3 \, dx.$$

В силу неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса (см. [2] с. 150, [3], с. 62) будет верно неравенство:

$$\iint\limits_{\Omega} |\nabla z^2| \, dx \geqslant \frac{1}{d^2} \iint\limits_{\Omega} z^2 dx.$$

Следовательно, получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\Omega} z^2 \, dx \leqslant \iint\limits_{\Omega} \left(1 - 2\pi - \frac{1}{2} \vec{v} \, \nabla \, \pi - \frac{1}{d^2} \right) z^2 \, dx - \iint\limits_{\Omega} z^3 \, dx.$$

Предположение о малости отклонения z позволяет считать, что

$$\left| \iint\limits_{\Omega} z^3 \, dx \right| < \frac{1}{2} \left| \iint\limits_{\Omega} \left(1 - 2\pi - \frac{1}{2} \vec{v} \, \nabla \pi - \frac{1}{d^2} \right) z^2 \, dx \right|.$$

Отсюда следует, что условие

$$1 - \frac{1}{d^2} - 2\pi - \frac{1}{2} \vec{v} \, \nabla \pi < 0 \tag{9}$$

является достаточным условием устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга (1). При $\vec{u} = 0, \vec{v} = 0$ достаточное условие (9) устойчивости было получено в [4].

Пусть $\pi \in C^2(\Omega) \bigcap C^1(\overline{\Omega})$ — регулярное решение уравнения (3),

$$z(x,y,t) = p(x,y,t) - \pi(x,y)$$

— малое отклонение от стационарного решения, удовлетворяющее условию $z \,|_{\Gamma} = 0$. Подставим в уравнение $p = \pi + z$. Тогда

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Для первого слагаемого (член роста) имеем

$$p(1 + \alpha(\beta p^2 - p^3) - \gamma p) = (\pi + z)(1 + \alpha(\beta(\pi + z)^2 - (\pi + z)^3) - \gamma(\pi + z)) =$$
$$= (\pi + z)[1 + \alpha(\beta(\pi^2 + 2\pi z + z^2) - (\pi^3 + 3\pi^2 z + 3\pi z^2 + z^3)) - \gamma(\pi + z)].$$

Опуская степени z выше первой, получим, что член роста будет иметь вид

$$\pi(1 + \alpha(\beta\pi^2 - \pi^3) - \gamma\pi) + z(1 + \alpha(3\pi^2 - 4\pi^3) - 2\gamma\pi).$$

Первый член в этом выражении является членом роста из исходного уравнения для стационарного решения, а значит он равен со знаком минус сумме члена диффузии и автономного члена для стационарного решения:

$$-\frac{1}{6} \Delta \alpha (3\beta\pi^2 - 2\pi^3) - (\mathbf{u} + (\pi - \sigma)^2 \mathbf{v}) \cdot \pi.$$

Записывая уравнение после этой подстановки, получим

$$\frac{\partial z}{\partial t} = (1 + \alpha(3\beta\pi^2 - 4\pi^3) - 2\gamma\pi)z + \frac{1}{6}\Delta\omega +$$

$$+(\mathbf{u} + ((\pi - \sigma)^2 + z^2 + 2\pi z - 2\sigma z)\mathbf{v}) \cdot \nabla z + (z^2 + 2(\pi - \sigma)z)\mathbf{v} \cdot \nabla\pi,$$

где

$$\omega = \alpha(6\beta\pi z + 3\beta z^2 - 6\pi^2 z - 6\pi z^2 - 2z^3) = 6\alpha\pi(\beta - \pi)z + 3\alpha(\beta - 2\pi)z^2 - 2\alpha z^3.$$

Умножим полученное равенство на ω, опуская степени z, большие 2, и проинтегрируем полученное равенство по области Ω. В левой части мы при этом получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{\Omega} 3\alpha(\beta - \pi)z^2 dxdy.$$

Именно знак этого выражения нас и интересует: если оно отрицательно, то стационарное решение устойчиво.

При интегрировании всех членов, содержащих произведение $z^m\nabla z$, мы можем применить следующую схему. Пусть $g(x,y)$ — достаточно гладкая функция, $\mathbf{a} = (\xi,\eta)$ — постоянный вектор, $m = 1,2,\ldots$. Тогда

$$\int\int\limits_{\Omega} z^m\, g\mathbf{a}\ \nabla z dxdy = \frac{1}{m+1}\int\int \operatorname{div}\left(z^{m+1} g\ \mathbf{a}\right)\, dxdy.$$

Отсюда по формуле Гаусса-Остроградского получим:

$$\int\int\limits_{\Omega} z^m\, g\mathbf{a}\ \nabla z\, dxdy = \frac{1}{m+1}\int\limits_{\partial\Omega} z^{m+1} g\ \mathbf{a} \cdot \nu\, ds - \frac{1}{m+1}\int\int\limits_{\Omega} z^{m+1}\,\mathbf{a}\ \cdot\ \nabla g\ dxdy =$$

$$= -\frac{1}{m+1}\int\int\limits_{\Omega} z^{m+1}\,\mathbf{a}\ \cdot\ \nabla g\, dxdy,$$

где $\vec{\nu}$ — единичный внешний нормальный вектор к $\partial\Omega$. Если при этом $m \geqslant 2$, то полученный интеграл мы можем не принимать во внимание при выяснении вопроса о знаке суммы.

С помощью неравенства Пуанкаре-Стеклова-Фридрихса получаем:

$$\frac{1}{6}\iint\limits_{\Omega}\omega\Delta\omega\, dxdy = -\frac{1}{6}\iint\limits_{\Omega}(\bigtriangledown\omega)^2 dxdy \leqslant -\frac{1}{6d^2}\iint\limits_{\Omega}\omega^2 dxdy.$$

Принимая во внимание, что $\omega^2 = (6\alpha\pi(\beta - \pi)z)^2 + O^*(z^3)$, $z \to 0$, мы получим, что неравенство

$$1 + \alpha(3\beta\pi^2 - 4\pi^3) - 2\gamma\pi - \frac{\alpha\pi(\beta - \pi)}{d^2} +$$

$$+(12\alpha\pi(\pi - \sigma)(\beta - \pi)\nabla\pi - (\pi - \sigma)\nabla(\pi - \sigma) -\ nabla(\pi - \sigma)) \cdot \mathbf{v} - 3\mathbf{u} \cdot \nabla(\alpha\pi(\beta - \pi)) < 0$$

является достаточным условием устойчивости стационарного решения. Ясно, что в случае нулевого автономного члена это условие ослабляет условие Т. Пу (5).

Результаты работы анонсировались на международных конференциях (см., напр., [5]–[6]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пу, Т. Нелинейная экономическая динамика / Т. Пу. — Ижевск : Издательский дом «Удмуртский университет», 2000. — 200 с.

2. Михайлов, В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В. П. Михайлов. — М. : Наука, 1976. — 392 с.

3. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — М. : Наука, 1973. — 408 с.

4. Мешков, В. З. Об устойчивости стационарного решения уравнения Хотеллинга / В. З. Мешков, И. П. Половинкин, М. Е. Семенов // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2002. — Т. 9, вып. 1. — С. 226–227.

5. Половинкин, И. П. К вопросу об устойчивости стационарного решения в миграционных моделях без производства и с производством / И. П. Половинкин, М. В. Половинкина, С. А. Рабееах // Современные методы и проблемы математической гидродинамики–2019. Материалы международной научной конференции. — Воронеж, 2019. — С. 258–264.

6. On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation / T. N. Gogoleva, I. N. Shchepina, M. V. Polovinkina, S. A. Rabeeakh // Journal of Physics : Conf. Series. — 2019. — 1203. — 012041.

7. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

8. Баев, А. Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

REFERENCES

1. Puu T. Nonlinear economic dynamics. [Pu T. Nelineyjnaya ekonomicheskaya dinamika]. Izhevsk, 2000, 200 p.

2. Mikhailov V.P. Partial differential equations. [Mixayjlov V.P. Differencial'nye uravneniya v chastnyx proizvodnyx]. Moscow, 1976, 392 p.

3. Ladyzhenskaya O. A. Boundary value problems of mathematical phisics. [Mixayjlov V.P. Differencial'nye uravneniya v chastnyx proizvodnyx]. Moscow, 1976, 392 p.

4. Meshkov V.Z., Polovinkin I.P., Semenov M.E. On stability of a stationary solution to the Hotelling equation. [Meshkov V.Z., Polovinkin I.P., Semenov M.E. Ob ustoyjchivosti stacionarnogo resheniya uravneniya Xotellinga]. *Obozrenie prikladnoyj i promyshlennoyj matematiki — Appl. and Industrial Math. Rev.*, 2002, vol. 9, iss. 1, pp. 226–227.

5. Polovinkin I.P., Polovinkina M.V., Rabeeakh S.A. On stability of a stationary solution in migration models without production and with production. [Polovinkin I.P., Polovinkina M.V., Rabeeakh S.A. K voprosu ob ustoyjchivosti stacionarnogo resheniya v migracionnyx modelyax bez proizvodstva i s proizvodstvom]. Modern method and problems of mathematical hydrodynamics–2019: Materials of the international scientific conference, Voronezh, 2019, pp.–258–264.

6. Gogoleva T. N., Shchepina I.N., Polovinkina M.V., Rabeeakh S.A. On stability of a stationary solution to the Hotelling migration equation. Journal of Physics: Conf. Series, 2019, 1203, 012041.

7. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 162–172.

8. Baev A.D., Buneev S.S. An A Priori Estimate For Solutions Of A Boundary Value Problem In The Strip For Degenerate Elliptic Equations Of Higher Order. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 81–92.

Половинкина Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Polovinkina Marina Vasil'evna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Information Technologies, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Рабееах Светлана Александровна, аспирант кафедры математического и прикладного анализа, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: srabeeakh@mail.ru

Rabeeakh Svetlana Alexandrovna, Postgraduate Student of the Department of Mathematical and Applied analysis, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: srabeeakh@mail.ru