УДК 517.518.1

О ВОССТАНОВЛЕНИИ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА Δ_B ПО ОБРАЗУ ФУРЬЕ-БЕССЕЛЯ, ЗАДАННОМУ НЕ ПОЛНОСТЬЮ

М. В. Половинкина

Воронежский государственный университет инженерных технологий

Поступила в редакцию 31.03.2018 г.

Аннотация. В работе рассмотрена проблема восстановления B-эллиптического оператора и его степеней от функции по преобразованию Фурье-Бесселя, заданному лишь на некотором выпуклом подмножестве в пространстве двойственных переменных. Оказывается существенным то, содержит ли это множество начало координат или нет. Приводятся явные выражения для оптимального метода восстановления и его погрешности. Результаты работы представляют собой распространение на случай сингулярного дифференциального B-эллиптического оператора Δ_B (обозначение и термин И. А. Киприянова) и преобразования Фурье–Бесселя части результатов, которые ранее получили Г. Г. Магарил-Ильяев и Е. О. Сивкова для степеней оператора Лапласа.

Ключевые слова: сингулярный дифференциальный оператор, преобразование Фурье-Бесселя, погрешность восстановления.

ON RECOVERY OF POWERS OF THE OPERATOR Δ_B FROM ITS INCOMPLETE FOURIER-BESSEL IMAGE

M. V. Polovinkina

Abstract. In this paper we consider recovery of the B-elliptic operator with its powers of a function from the Fourier–Bessel transform given on some convex subset in a space of dual variables. It turns out to be essential whether this subset contains the origin of coordinates or not. We give explicit expressions for an optimal recovery method and its error. In this work we extend results obtained by G. G. Magaril-Ilyaev and E. O. Sivkova for powers of the Laplace operator to the case of the singular differential B-elliptic operator Δ_B (the symbol and the term were introduced by I. A. Kipriyanov).

Keywords: singular differential operator, Fourier-Bessel transform, error of recovery.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть
$R^N_+ = \{x = (x',x''), x'=(x_1,\ldots,x_n), x''=(x_{n+1},\ldots,x_N),\ x_1>0,\ldots,x_n>0\}$, $1 \leqslant n \leqslant N$.
B-эллиптический оператор Δ_B (термин и обозначения введены И. А. Киприяновым [1]) определяется формулой

$$\Delta_B u = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{k=n+1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\,. \tag{1}$$

Мы будем использовать подход к дробным степеням оператора Δ_B, связанный с применением преобразования Фурье-Бесселя (см. [1], [2], [3], [4], там же см. описание пространства $L_2^\gamma(A)$, используемого ниже). Для любого $\alpha > 0$ равенство

$$(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(x) = F_\gamma^{-1}(|\xi|^\alpha F_\gamma f(\xi))(x), \tag{2}$$

где F_γ — преобразование Фурье-Бесселя, определяет α-ю степень оператора Δ_B.

Рассмотрим следующее пространство функций в $L_2^\gamma(R_+^N)$:

$$\mathcal{W}_2^\alpha(R_+^N) = \{f(\cdot) \in L_2^\gamma(R_+^N) : (-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot) \in L_2^\gamma(R_+^N)\}.$$

Положим

$$W_2^\alpha(R_+^N) = \{f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(R_+^N) : ||(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot)||_{L_2^\gamma(R_+^N)} \leqslant 1\}.$$

Пусть $0 < \beta < \alpha$. Мы хотим восстановить β-ю степень оператора Δ_B функции $f(\cdot) \in W_2^\alpha(R_+^N)$ по следующей информации: известна (наблюдается) некоторая функция $g(\cdot) \in L_2^\gamma(A)$, где $A \subset R_+^N$, удовлетворяющая условию

$$\| F_\gamma f(\cdot) - g(\cdot) \|_{L_2^\gamma(A)} = 0. \tag{3}$$

Положим

$$U(\alpha, A) = \left\{ \left(f(\cdot) \in W_2^\alpha(R_+^N), g(\cdot) \in L_2^\gamma(A)\right) : \| F_\gamma f(\cdot) - g(\cdot) \|_{L_2^\gamma(A)} = 0 \right\}. \tag{4}$$

Задача OR. Под задачей оптимального восстановления β-й степени оператора Δ_B функции $f(\cdot)$ по вышеописанной информации понимается нахождение величины

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W_2^\alpha(R_+^N), A\right) = \inf_m \sup_{U(\alpha,A)} \| (-\Delta_B)^{\beta/2} f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot) \|_{L_2^\gamma(R_+^N)},$$

где точная нижняя грань берется по всем отображениям $m : L_2^\gamma(A) \longrightarrow L_2^\gamma(R_+^N)$, которые мы будем называть методами, следуя [5], а также и тех методов m, на которых инфимум достигается. Величину $E\left((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(R_+^N), A\right)$ будем называть *погрешностью оптимального восстановления*, а отображения m, на которых нижняя грань достигается — *оптимальными методами восстановления*.

Задача OR для оператора Лапласа рассмотрена в работе [5]. Ниже приводятся результаты, которые являются распространением результатов работы [5] на случай, когда роль оператора Лапласа Δ играет сингулярный оператор Δ_B.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим вспомогательную задачу.

Задача I.

$$\begin{gathered} \| (-\Delta_B)^{\beta/2} f(\cdot) \|_{L_2^\gamma(R_+^N)} \longrightarrow \max, \ \| F_\gamma f(\cdot) \|_{L_2^\gamma(A)} = 0, \\ \| (-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot) \|_{L_2^\gamma(R_+^N)} \leqslant 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^\alpha(R_+^N). \end{gathered} \tag{5}$$

Лемма 1. *Погрешность оптимального восстановления $E\left((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(R_+^N), A\right)$ не меньше значения задачи I.*

Доказательство. Пусть $f_0(\cdot)$ — допустимая функция в (5), то есть $f_0(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи (5). Тогда и функция $-f_0(\cdot)$ тоже является допустимой. Пусть $m : L_{2,\gamma}(A) \longrightarrow L_{2,\gamma}(R_+^N)$ — произвольное фиксированное отображение (метод), $m(0)$ — образ нулевого элемента пространства $L_{2,\gamma}(A)$ при отображении m. Тогда мы будем иметь:

$$\begin{aligned} 2 \| (-\Delta_B)^{\beta/2} f_0(\cdot) \|_{L_{2,\gamma}(R_+^N)} &\leqslant \\ \leqslant \| (-\Delta_B)^{\beta/2} f_0(\cdot) - m(0)(\cdot) \|_{L_{2,\gamma}(R_+^N)} &+ \| (-\Delta_B)^{\beta/2} (-f_0)(\cdot) - m(0)(\cdot) \|_{L_{2,\gamma}(R_+^N)} \leqslant \\ \leqslant 2 \sup_{\substack{\|F_\gamma f(\cdot)\|_{L_{2,\gamma}(A)} \leqslant \delta, \\ \|(-\Delta_B)^{\alpha/2} f(\cdot)\|_{L_{2,\gamma}(R_+^N)} \leqslant 1}} &\| (-\Delta_B)^{\beta/2} f_0(\cdot) - m(0)(\cdot) \|_{L_{2,\gamma}(R_+^N)} \leqslant \end{aligned}$$

$$\leqslant 2 \sup_{\substack{\|F_\gamma f(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_{2,\gamma}(A)}\leqslant\delta,\\ \|(-\Delta_B)^{\alpha/2}f(\cdot)\|_{L_{2,\gamma}(R_+^N)}\leqslant 1}} \|\,(-\Delta_B)^{\beta/2}f_0(\cdot)-m(0)(\cdot)\,\|_{L_{2,\gamma}(R_+^N)}\,.$$

Переходя в этом неравенстве в левой части к супремуму по всем допустимым функциям задачи I, а в правой по всем отображениям (методам) m, мы завершаем доказательство леммы. Рассмотрим еще одну вспомогательную задачу.

Задача $\mathrm{I}^2(0)$.

$$\begin{gathered} C^{-1}\int\limits_{R_+^N\setminus\Omega^+}\xi^\gamma\,|\xi|^{2\beta}\,|F_\gamma f(\xi)|^2\,d\xi\longrightarrow\max\,,\\ C^{-1}\int\limits_{R_+^N\setminus\Omega^+}\xi^\gamma\,|\xi|^{2\alpha}\,|F_\gamma f(\xi)|^2\,d\xi\leqslant 1,\ f(\cdot)\in\mathcal{W}_2^\alpha(R_+^N), \end{gathered}\tag{6}$$

где

$$C=(2\pi)^{N-n}2^{2|\nu|}\prod_{k=1}^n\Gamma^2(\nu_k+1).$$

Лемма 2. *Квадрат значения задачи I и значение задачи $I^2(0)$ совпадают.*

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из равенства Парсеваля-Планшереля для преобразования Фурье-Бесселя.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Теорема 1. *Пусть $A\in R_+^N$ — выпуклое множество. Если $0\notin A$, то*

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2},W_2^\alpha(R_+^N),A\right)=+\infty.$$

Доказательство. Пусть $0\notin A$. Тогда согласно конечномерной теореме отделимости (см., напр., [6]) можно отделить начало координат от выпуклого множества Ω, а значит и от A, т.е. существует такой вектор $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)\in R_+^N$, $|\lambda|=\sqrt{\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n^2}=1$, что

$$\sup_{\xi\in A}(\lambda,\xi)\leqslant 0.\tag{7}$$

Для каждого $\varepsilon>0$ рассмотрим шар $B_\varepsilon=B(\varepsilon\lambda,\varepsilon/2)$. Если $\xi\in B_\varepsilon$, то

$$(\xi-\varepsilon\lambda,\xi-\varepsilon\lambda)=|\xi|^2+\varepsilon^2|\lambda|^2-2\varepsilon(\xi,\lambda)\leqslant\varepsilon^2/4,$$

откуда, учитывая, что $|\lambda|=1$, получаем

$$(\xi,\lambda)\geqslant|\xi|^2/(2\varepsilon)+3\varepsilon/8>0.$$

Поэтому $B_\varepsilon\cap A=\varnothing$.

Введем в рассмотрение такую функцию $f_\varepsilon(\cdot)$, что

$$F\,f_\varepsilon(\xi)=\begin{cases} C^{1/2}\left(\int\limits_{B_\varepsilon}\xi^\gamma\,|\xi|^{2\beta}\,d\xi\right)^{-1/2}, & \xi\in B_\varepsilon.\\ 0,\ \xi\notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Ясно, что $F\,f_\varepsilon\in L_{2,\gamma}(R_+^N)$. Поэтому $f_\varepsilon\in L_{2,\gamma}(R_+^N)$. Кроме того функция $F\,f_\varepsilon$ финитна, а потому и функция $\xi\to-|\xi|^\alpha F\,f_\varepsilon(\xi)$ принадлежит $L_{2,\gamma}(R_+^N)$. Следовательно, $f_\varepsilon\in\mathcal{W}_2^\alpha(R_+^N)$, поскольку $(-\Delta)^{\alpha/2} f_\varepsilon(\cdot) \in L_{2,\gamma}(R^N_+)$. Также легко показать, что функция $f_\varepsilon(\cdot)$ удовлетворяет и другим условиям задачи I^2. Пусть $\xi \in B_\varepsilon$. Тогда $|\xi| = |\xi - \varepsilon\lambda + \varepsilon\lambda| \leqslant |\xi - \varepsilon\lambda| + |\varepsilon\lambda| \leqslant 3\varepsilon/2$. Учитывая это, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod\limits_{k=1}^{n} \Gamma^2(\nu_k+1)} \int\limits_{R^N_+} \xi^\gamma\, |\xi|^{2\beta}\, |F_\gamma f(\xi)|^2\, d\xi = \frac{\int\limits_{B_\varepsilon} \xi^\gamma\, |\xi|^{2\beta}\, d\xi}{\int\limits_{B_\varepsilon} \xi^\gamma\, |\xi|^{2\alpha}\, d\xi} =$$

$$= \frac{\int\limits_{B_\varepsilon} \xi^\gamma\, |\xi|^{2\beta+2\alpha-2\alpha}\, d\xi}{\int\limits_{B_\varepsilon} \xi^\gamma\, |\xi|^{2\alpha}\, d\xi} \geqslant \left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)^{-2(\alpha-\beta)} \frac{\int\limits_{B_\varepsilon} \xi^\gamma\, |\xi|^{2\alpha}\, d\xi}{\int\limits_{B_\varepsilon} \xi^\gamma\, |\xi|^{2\alpha}\, d\xi} = \left(\frac{3}{2}\varepsilon\right)^{-2(\alpha-\beta)}.$$

Из этой оценки снизу в силу произвольной малости ε вытекает, что значение целевого функционала в задаче I^2, а значит, и в исходной задаче восстановления может быть сделано сколь угодно большим. Теорема доказана.

Пусть Ω^+ — выпуклая ограниченная область, прилегающая к гиперплоскостям $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Граница области Ω^+ состоит из двух частей: Γ^+, расположенной в части пространства R^N_+ и Γ_0, принадлежащей гиперплоскостям $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Пусть $\Omega \subset R^N$ — объединение множества Ω^+ и множества Ω^-, полученного из Ω^+ симметрией относительно пространства $x' = 0$. Будем также предполагать далее, что область Ω выпукла. Через $B(\xi, r)$ обозначим замкнутый шар с центром в точке ξ и радиусом r.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^- \in R^N_+$ *— выпуклая область,* $0 \in \Omega$, $r_\Omega = \sup\{r > 0 : B(0,r) \in \Omega\}$. *Тогда*

$$E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W^\alpha_{2,\gamma}(R^N_+), \Omega^+\right) = r_\Omega^{\beta-\alpha}.$$

При этом метод

$$\widehat{m}(F_\gamma f(\cdot)|_{\Omega^+})(t) = C^{-1} \int\limits_{|\xi| \leqslant r_\Omega} \xi^\gamma\, |\xi|^\beta F_\gamma f(\xi) \prod_{k=1}^{n} j_{\nu_k}(t_k \xi_k) \prod_{k=n+1}^{N} e^{it_k\xi_k}\, d\xi \tag{8}$$

является оптимальным.

Доказательство. Пусть $0 \in \Omega$. Согласно лемме 1 значение $E\left((-\Delta_B)^{\beta/2}, W^\alpha_2(R^N_+), \Omega^+\right)$ не меньше квадрата значения задачи $I^2(0)$. Поскольку $B(0, r_\Omega) \in \Omega$, то из включения $\xi \in R^N_+ \backslash \Omega^+$ вытекает неравенство $|\xi| > r_\Omega$. Отсюда

$$C^{-1} \int\limits_{R^N_+ \backslash \Omega^+} \xi^\gamma\, |\xi|^{2\beta}\, |F_\gamma f(\xi)|^2\, d\xi = C^{-1} \int\limits_{R^N_+ \backslash \Omega^+} \xi^\gamma\, |\xi|^{-2(\alpha-\beta)}\, |\xi|^{2\alpha}\, |F_\gamma f(\xi)|^2\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant r_\Omega^{-2(\alpha-\beta)}\, C^{-1} \int\limits_{R^N_+ \backslash \Omega^+} \xi^\gamma\, |\xi|^{2\alpha}\, |F_\gamma f(\xi)|^2\, d\xi \leqslant r_\Omega^{-2(\alpha-\beta)}. \tag{9}$$

Граница шара $B(0, r_\Omega) \in \Omega$ и граница области Ω^+ имеют непустое пересечение. Пусть точка ξ_0 принадлежит этому пересечению. Ясно, что $|\xi_0| = r_\Omega$. Тогда $\xi_0 \notin \operatorname{int} \Omega^+$. Поэтому точку ξ_0 можно отделить от выпуклого множества $\operatorname{int} \Omega^+$. Это значит, что существует такой вектор $\lambda \in R^N_+, |\lambda| = 1$, что $\sup\limits_{\xi \in \Omega^+} (\lambda, \xi) \leqslant (\lambda, \xi_0)$. Пусть $\xi_\kappa = \xi_0 + (1/\kappa)\lambda$, κ — натуральное число.

Рассмотрим шар $B(\xi_\kappa,1/(2\kappa)$. Он не пересекается с Ω^+. Действительно, если $\xi\in B(\xi_\kappa,1/(2\kappa)$, то $(\lambda,\xi)>(\lambda,\xi_0)$, то есть $\xi\notin\Omega$. Пусть

$$V_\kappa=\int\limits_{B(\xi_\kappa,1/(2\kappa))}\xi^\gamma\,d\xi.$$

Рассмотрим последовательность функций $f_\kappa(\cdot)\in L_2^\gamma(R_+^N)$, преобразование Фурье-Бесселя от которых имеют вид

$$F\,f_\kappa(\xi)=\begin{cases}C^{1/2}V_\kappa^{-1/2}\,\left(r_\Omega+\frac{3}{2\kappa}\right)^{-\alpha},\ \xi\in B(\xi_\kappa,1/(2\kappa)),\\ 0,\ \xi\notin B(\xi_\kappa,1/(2\kappa)).\end{cases}$$

Эти функции допустимы для задачи $\mathrm{I}^2(0)$. Пусть $\xi\in B(\xi_\kappa,1/(2\kappa))$. Тогда

$$|\xi|=|\xi-\xi_0-\frac{1}{\kappa}\lambda+\xi_0+\frac{1}{\kappa}|\leqslant\frac{1}{2\kappa}+|\xi_0|+\frac{1}{\kappa}=r_\Omega+\frac{3}{2\kappa}.$$

Отсюда

$$C^{-1}\int\limits_{R_+^N\setminus\Omega^+}\xi^\gamma\,|\xi|^{2\alpha}\,|F_\gamma f_\kappa(\xi)|^2\,d\xi=C^{-1}\,C\,V_\kappa^{-1}\left(r_\Omega+\frac{3}{2\kappa}\right)^{-2\alpha}\int\limits_{B(\xi_\kappa,1/(2\kappa))}\xi^\gamma\,|\xi|^{2\alpha}\,d\xi\leqslant$$

$$\leqslant V_\kappa^{-1}\left(r_\Omega+\frac{3}{2\kappa}\right)^{-2\alpha}\left(r_\Omega+\frac{3}{2\kappa}\right)^{2\alpha}\int\limits_{B(\xi_\kappa,1/(2\kappa))}\xi^\gamma\,d\xi=1.$$

С другой стороны, для $\xi\in B(\xi_\kappa,1/(2\kappa))$ имеем

$$r_\Omega=|\xi_0|=|\xi_0-\xi+\xi-\frac{1}{\kappa}\lambda+\frac{1}{\kappa}\lambda|\leqslant|\xi|+|\xi_0+\frac{1}{\kappa}\lambda-\xi|+|\frac{1}{\kappa}\lambda|\leqslant|\xi|+\frac{1}{2\kappa}+\frac{1}{\kappa},$$

откуда получим

$$|\xi|\geqslant r_\Omega-\frac{3}{2\kappa}.$$

Следовательно,

$$C^{-1}\int\limits_{R_+^N\setminus\Omega^+}\xi^\gamma\,|\xi|^{2\beta}\,|F_\gamma f_\kappa(\xi)|^2\,d\xi=C^{-1}\,C\,V_\kappa^{-1}\left(r_\Omega+\frac{3}{2\kappa}\right)^{-2\alpha}\int\limits_{B(\xi_\kappa,1/(2\kappa))}\xi^\gamma\,|\xi|^{2\beta}\,d\xi\geqslant$$

$$\geqslant V_\kappa^{-1}\left(r_\Omega+\frac{3}{2\kappa}\right)^{-2\alpha}\left(r_\Omega-\frac{3}{2\kappa}\right)^{2\beta}V_\kappa.$$

Правая часть этого неравенства стремится при $\kappa\to\infty$ к величине $r_\Omega^{2\beta-2\alpha}$, а левая в силу (9) не превосходит этой величины, откуда вытекает, что значение задачи $\mathrm{I}^2(0)$ равно $r_\Omega^{2\beta-2\alpha}$. В силу же леммы 1 отсюда следует, что

$$E\left((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(R_+^N),\Omega^+,0\right)\geqslant r_\Omega^{2\beta-2\alpha}.$$

Рассмотрим теперь метод $\widehat{m}$, определенный формулой (8). Для функции $f(\cdot)\in W_{2,\gamma}^\alpha(R_+^N)$ по теореме Парсеваля-順Планшереля для преобразования Фурье-Бесселя имеем:

$$\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\cdot)-\widehat{m}(F_\gamma f(\cdot)|_{\Omega^+})(\cdot)\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+^N)}=C^{-1}\int\limits_{R_+^N\setminus B(0,r_\Omega)}\xi^\gamma\,|\xi|^{2\beta}|F_\gamma f(\xi)|^2\,d\xi=$$

$$= C^{-1} \int\limits_{R_+^N \setminus B(0,r_\Omega)} \xi^\gamma \, |\xi|^{2\beta-2\alpha} |\xi|^{2\alpha} |F_\gamma f(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant r_\Omega^{2\beta-2\alpha} \, C^{-1} \int\limits_{R_+^N} \xi^\gamma \, |\xi|^{2\alpha} |F_\gamma f(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant r_\Omega^{2\beta-2\alpha}.$$

Теорема доказана.

Результаты настоящей работы анонсировались на Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики" в Воронежском государственном университете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Киприянов, И. А. Сингулярные эллиптические краевые задачи / И. А. Киприянов. — М. : Наука, 1997. — 199 с.

2. Ляхов, Л. Н. В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами / Л. Н. Ляхов. — Липецк : ЛГПУ, 2007. — 232 с.

3. Катрахов, В. В. Метод преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений / В. В. Катрахов, С. М. Ситник // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2018. — Т. 64, № 2. — С. 211–426.

4. Ситник, С. М. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя / С. М. Ситник, Э. Л. Шишкина. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2019. — 224 с.

5. Магарил-Ильяев, Г. Г. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру / Г. Г. Магарил-Ильяев, Е. О. Сивкова // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 4. — С. 119–130.

6. Магарил-Ильяев, Г. Г. Выпуклый анализ и его приложения / Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 176 с.

REFERENCES

1. Kipriyanov I.A. Singular elliptic boundary value problems. [Kipriyanov I.A. Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi]. Moscow: Nauka, 1997, 199 .

2. Lyakhov L. N. B-hypersingular integrals and their applications to the description of the Kupriyanov functional classes and to integral equations with B-potential nuclei. [Lyaxov L.N. V-gipersingulyarnye integraly i ix prilozheniya k opisaniyu funkcional'nyx klassov Kipriyanova i k integral'nym uravneniyam s V-potencial'nymi yadrami]. Lipetsk, 2007, 232 p.

3. Katrakhov V.V., Sitnik S.M. The transmutation method and boundary-value problems for singular differential equations. [Katrakhov V.V., Sitnik S.M. Metod preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnyx ellipticheskix uravneniyj]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2018, vol. 64, no. 2, pp. 211–426.

4. Sitnik S.M., Shishkina E.L. The transmutation operators method for differential equations with Bessel operators. [Sitnik S.M., Shishkina E.L. Metod operatorov preobrazovaniya dlya differencial'nyx uravneniyj s operatorami Besselya]. Moscow, 2019, 224 p.

5. Magaril-Il'yaev G. G., Sivkova E.O. Best recovery of the Laplace operator of a function from incomplete spectral data. [Magaril-Il'yaev G. G., Sivkova E.O. Nailuchshee vosstanovlenie operatora Laplasa funkcii po ee netochno zadannomu spektru]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya — Modern mathematics. Fundamental directions*, 2012, vol. 203, no. 4, pp. 119–130.

6. Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M. Convex analysis: theory and applications. [Magaril-Il'yaev G.G., Tikhomirov V.M. Vypuklyyj analiz i ego prilozheniya]. Moscow, 2003, 176 p.

Половинкина Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Polovinkina Marina Vasil'evna, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Information Technologies, Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru