УДК 517.956

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В ПОЛОСЕ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА*

В. В. Панков, А. Д. Баев, А. А. Бабайцев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.07.2019 г.

Аннотация. В работе рассматривается краевая задача в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка. Уравнение содержит специальные весовые производные до порядка $2m$ и обычные частные производные до порядка $2k-1$. Предполагается, что $2m > 2k-1$. На границе $t = 0$ ставятся граничные условия общего вида, а на границе $t = d$ ставятся однородные условия Дирихле. В работе доказывается теорема о существовании и единственности решения такой краевой задачи. При определенных условиях доказано, что это решение принадлежит специальному весовому пространству типа пространства С. Л. Соболева.

Ключевые слова: теорема о существовании и единственности, вырождающееся эллиптическое уравнение, краевая задача, весовые пространства С. Л. Соболева.

ON ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A STRIP FOR A DEGENERATING HIGH-ORDER ELLIPTIC EQUATION

V. V. Pankov, A. D. Baev, A. A. Babaitsev

Abstract. In this paper we consider a boundary value problem in the band for a degenerate elliptic equation of high order. The equation contains special weight derivatives up to order and ordinary partial derivatives up to order . It is assumed that . General boundary conditions are set at the boundary, and homogeneous Dirichlet conditions are set at the boundary. The paper proves a theorem on the existence and uniqueness of the solution of such a boundary value problem. Under certain conditions, it is proved that this solution belongs to a special weight space of the S. L. Sobolev space type.

Keywords: existence and uniqueness theorem, degenerate elliptic equation, boundary value problem, weight spaces of S. L. Sobolev.

ВВЕДЕНИЕ

Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений используются при моделировании вырождающихся процессов, то есть процессов, в которых процессы, происходящие вблизи границ, существенно отличаются от процессов, происходящих внутри области. Краевые задачи для таких уравнений относятся к “неклассическим” задачам математической физики. Одна из главных трудностей, возникающих в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при “степенном” характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [1], [2].

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 19–11–00197 НИЧ 19013 выполняемого в Воронежском государственном университете

В работе В. П. Глушко [3] были доказаны априорные оценки краевых задач для уравнений, вырождающихся на границе в уравнение первого порядка по одной из переменных. В работах А. Д. Баева [4]–[6] были получены априорные оценки и теоремы о существовании решений краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка при произвольном сильном характере вырождения. В частности, были исследованы краевые в полосе задачи для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе области в уравнение четного порядка. В работах А. Д. Баева и С. С. Бунеева [7]–[8] были исследованы краевые задачи в полосе для эллиптических уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение третьего порядка. В работе [10] были получены коэрцитивные априорные оценки для одного эллиптического уравнения высокого порядка, вырождающегося на границе $t = 0$ в уравнение нечетного порядка.

В настоящей работе получены теоремы о существовании и единственности решений краевых задач в полосе для уравнений высокого порядка, вырождающихся на границе в уравнение нечетного порядка по одной из переменных. Таким образом, работа является естественным продолжением исследований, начатых в работах [7, 8, 10, 11]. В отличие от работы [11] в уравнении, которое рассматривается в данной работе, изменен знак перед невырождающейся производной нечетного порядка. Это изменение привело к тому, что на границе $t = 0$ приходится ставить на одно условие больше. Формулировка полученных результатов содержится в работе [9].

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В полосе $R^n_d = \{x \in R^{n-1}, 0 < t < d\}$, где $d > 0$ — некоторое число, рассмотрим уравнение

$$A(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v(x,t) = F(x,t), \tag{1}$$

где $A(D_x,D_{\alpha,t},\partial_t)v = L_{2m}(D_x,D_{\alpha,t})v - b(-1)^k\partial_t^{2k-1}v$, $L_{2m}(D_x,D_{\alpha,t}) = \sum\limits_{|\tau|+j\leqslant 2m} a_{\tau j}D_x^\tau D_{\alpha,t}^j$, $a_{\tau j}$ — комплексные числа, $Im\,\bar{b}a_{0,2m} = 0$.

Здесь $D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)}$, $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\tau = i^{|\tau|}\partial_{x_1}^{\tau_1}\partial_{x_2}^{\tau_2}\ldots\partial_{x_{n-1}}^{\tau_{n-1}}$.

На границе $t = 0$ полосы R^n_d задаются условия

$$B_j(D_x)\,v|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}D_x^\tau\partial_t^{j-1}\,v|_{t=0} = G_j(x),\ j = 1,2,\ldots,k-1 \tag{2}$$

с комплексными коэффициентами $b_{\tau j}$.

На границе $t = d$ полосы R^n_d заданы условия вида

$$v|_{t=d} = \partial_t\,v|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{m-1}\,v|_{t=d} = 0. \tag{3}$$

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. При всех $(\xi,\eta) \in R^n$ справедливо неравенство $Re\bar{b}L_{2m}(\xi,\eta) \geqslant c(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^m$, где постоянная $c > 0$ не зависит от (ξ,η).

Условие 2. Для некоторого $s \geqslant 2m + \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k-1}(m_j)$ функция $\alpha(t)$ принадлежит $C^{s-1}[0,d]$, причем $\alpha(0) = \alpha'(0) = 0$, $\alpha(t) > 0$ при $t > 0$.

Условие 3. $\sum\limits_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau \neq 0$, $j = 1,2,\ldots,k$ при всех $\xi \in R^{n-1}$.

Введем в рассмотрение пространства, в которых будет исследоваться задача (1.1)–(1.3). Введем в рассмотрение интегральное преобразование, которое на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$ записывается в виде $F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dt}{\sqrt{\alpha(t)}}$. Это преобразование было введено в работе [4]. В этой работе было замечено, что для преобразования F_α можно построить обратное преобразование F_α^{-1}, которое можно записать в виде $F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) =$

$\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}$, где $F^{-1}_{\eta\to\tau}$ — обратное преобразование Фурье. В работе [4] было доказано, что для преобразования F_α справедливо равенство, являющееся аналогом равенства Парсеваля. Это дает возможность рассмотреть это преобразование не только на функциях из $L_2(R^1_+)$, но и на некоторых классах обобщенных функций.

Определение 1. Пространство $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R^n_d)$ ($s \geqslant 0$ — целое число) состоит из тех функций $v(x,t) \in L_2(R^n_d)$, для которых конечна норма

$$\|v\|_{s,\alpha,m} = \{ \sum_{l=0}^{[\frac{(2k-1)s}{2m}]} \left\| F^{-1}_{\xi\to x}F^{-1}_{\alpha}[(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{\frac{1}{2}(s-\frac{2m}{2k-1}l)}F_\alpha F_{x\to\xi}[\partial^l_t v(x,t)]]\right\|^2_{L_2(R^n_d)}\}^{\frac{1}{2}},$$

где $[\frac{(2k-1)s}{2m}]$ — целая часть числа $\frac{(2k-1)s}{2m}$.

Если s — натуральное число такое, что число $\frac{(2k-1)s}{2m}$ является целым числом, то эта норма эквивалентна следующей норме

$$\|v\|_{s,\alpha,q} = \{ \sum_{|\tau|+j+\frac{2m}{2k-1}l\leqslant s} \left\| D^\tau_x D^j_{\alpha,t}\partial^l_t v\right\|^2_{L_2(R^n_d)}\}^{\frac{1}{2}}.$$

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}) + \frac{m}{2k-1}\}$ — целое число, $m \geqslant 2k-1$ — целое число и выполнены условия 1–3. Пусть $F(x,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R^n_d)$, $G_j(x) \in H_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}(R^{n-1})$, $j = 1,2,\ldots,k$. Тогда существует единственное решение $v(x,t)$ задачи (1)–(3) принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R^n_d)$.

Формулировка теоремы 1 содержится в работе [9].

При доказательстве теоремы существенно используется априорная оценка решений задачи (1)–(3). Эта оценка доказана в [10]. Сформулируем эту оценку.

Теорема 2. Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}) + \frac{m}{2k-1}\}$ — целое число, $m \geqslant 2k-1$ — целое число, и выполнены условия 1–3. Тогда для любого решения $v(x,t)$ задачи (1)–(3), принадлежащего пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(R^n_d)$ справедлива априорная оценка

$$\|v\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} \leqslant c(\|Av\|_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}} + \sum_{j=1}^{k}\|B_j\, v|_{t=0}\|_{s-m_j-\frac{2m(j-1)}{2k-1}-\frac{m}{2k-1}}),$$

где постоянная $c > 0$ не зависит от v.

Здесь $\|\cdot\|_s$ — норма в пространстве Соболева–Слободецкого $H_s(R^{n-1})$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Применим к обеим частям уравнения (1) и условий (2)–(3) преобразование Фурье $F_{x\to\xi}$. Получим следующую задачу, зависящую от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$A(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)\,u(\xi,t) = L_{2m}(\xi,D_{\alpha,t})\,u(\xi,t) - b(-1)^k\partial^{2k-1}_t u(\xi,t) = f(\xi,t)\,, \tag{1.1}$$

$$B_j(\xi)\; u|_{t=0} = \sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau j}\xi^\tau\partial^{j-1}_t\, u|_{t=0} = g_j(\xi),\; j = 1,2,\ldots,k, \tag{1.2}$$

$$u(\xi,t)\,|_{t=d} = \partial_t u(\xi,t)\,|_{t=d} = \ldots = \partial^{m-1}_t u(\xi,t)\,|_{t=d} = 0. \tag{1.3}$$

Здесь $u(\xi,t) = F_{x\to\xi}[\nu(x,t)]$, $f(\xi,t) = F_{x\to\xi}[F(x,t)]$, $g(\xi) = F_{x\to\xi}[G(x)]$.

Аналогично определенным выше пространствам введем пространства $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$.

Определение 2. Будем говорить, что функция $u(t)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ ($s \geqslant 0$ — целое число), если конечна следующая норма, зависящая от параметра $\xi \in R^{n-1}$:

$$\|u\|_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1},|\xi|} = \left\{ \sum_{k+\frac{2m}{2k-1}j \leqslant s} \left\| F_{\alpha}^{-1}\left[\left(1+|\xi|^2+\eta^2\right)^{\frac{1}{2}k} F_{\alpha}\left[\partial_t^j u\right]\right]\right\|^2_{L_2(0;d)} \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{1.4}$$

Утверждение теоремы 1 вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.1. Пусть $s \geqslant \max\{2m, \max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}(m_j + \frac{2m(j-1)}{2k-1}) + \frac{m}{2k-1}\}$ — целое число, $m \geqslant 2k-1$ — целое число. Пусть $f(\xi,t) \in H_{s-2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ и выполнены условия 1–3. Тогда при всех $\xi \in R^{n-1}$ существует единственное решение задачи (1.1)–(1.3), принадлежащее пространству $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$.

Чтобы доказать теорему 1.1 для начала сведём задачу (1.1)–(1.3) к нелокальной задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром.

Рассмотрим функцию $\gamma(t) = (\alpha(t))^{\frac{2m}{2m-2k+1}}$, тогда

$$D^p_{\alpha,t}u = \left(\frac{1}{i}\right)^p \sum_{j=0}^{p} \psi_{pj}(t)\,\gamma^{\frac{(2k-1)(2m-j)}{2m}}(t)\,\gamma^{j-2k+1}(t)\,\partial_t^j u, \tag{1.5}$$

где функции $\psi_{pj}(t)$, $(0 \leqslant j \leqslant p)$ вычисляются из рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} \psi_{p+1,p+1}(t) = \psi_{p,p}(t), \ \ \psi_{0,0}(t) = 1, \\ \psi_{j+1,0}(t) = \alpha(t)\,\partial_t\psi_{j,0}(t) + \frac{1}{2}\alpha'(t)\,\psi_{j,0}(t), \\ \psi_{j+1,\chi}(t) = \alpha(t)\,\partial_t\psi_{j,\chi}(t) + \psi_{j,\chi-1}(t) + \left(\chi+\frac{1}{2}\right)\alpha'(t)\,\psi_{j,\chi}(t), \ \ (1 \leqslant \chi \leqslant j-1), \\ \psi_{j+1,j}(t) = \psi_{j,j-1}(t) + \left(j+\frac{1}{2}\right)\alpha'(t). \end{cases} \tag{1.6}$$

Воспользовавшись формулой (1.5), уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\sum_{p=2k}^{2m} b_{2m-p}(\xi,t)\,\gamma^{p-2k+1}\partial_t^p u + \sum_{p=0}^{2k-1} b_{2m-p}(\xi,t)\,\partial_t^p u = f(\xi,t), \tag{1.7}$$

где $b_0(\xi,t) \equiv 1$, а функции $b_{2m-p}(\xi,t)$, $p = 0,1,\ldots,2m-1$ вычисляются по следующим соотношениям

$$b_{2m-p}(\xi,t) = \sum_{j=p}^{2m} \sum_{|\tau|\leqslant 2m-j} (-1)^{\frac{2m-j}{2m}} \frac{a_{\tau j}}{a_{02m}} \xi^{\tau} \psi_{j,p}(t)\,\gamma^{\frac{(2m-p)(2k-1)}{2m}}(t), \tag{1.8}$$

где $2k \leqslant k \leqslant 2m-1$,

$$b_{2m-2k+1}(\xi,t) = \sum_{j=3}^{2m} \sum_{|\tau|\leqslant 2m-j} (-1)^{\frac{2m-j}{2m}} \frac{a_{\tau j}}{a_{02m}} \xi^{\tau} \psi_{j,3}(t)\,\gamma^{\frac{(2k-1)(2m-2k+1)}{2m}}(t) + \frac{(-1)^m b}{a_{02m}}, \tag{1.9}$$

$$b_{2m-p}(\xi,t) = \sum_{j=p}^{2m} \sum_{|\tau|\leqslant 2m-j} (-1)^{\frac{2m-j}{2m}} \frac{a_{\tau j}}{a_{02m}} \xi^{\tau} \psi_{j,p}(t)\,\gamma^{\frac{j(2m-2k+1)}{2m}}(t), \tag{1.10}$$

где $p = 1,2,\ldots,2k-2$;

$$b_{2m}(\xi,t) = \sum_{j=0}^{2m} \sum_{|\tau|\leqslant 2m-j} (-1)^{\frac{2m-j}{2m}} \frac{a_{\tau j}}{a_{02m}} \xi^{\tau} \psi_{j,0}(t). \tag{1.11}$$

Обозначим
$$\begin{cases} w_{2m-p}\left(\xi,t\right)=\partial_t^p u\left(\xi,t\right), \ p=0,1,\ \ldots,2k-1 \\ w_{2m-p}\left(\xi,t\right)=\gamma^{p-2k+1}\left(t\right)\partial_t^p u\left(\xi,t\right), \ p=2k,\ldots,2m. \end{cases} \tag{1.12}$$

Исходя из этого, верны следующие соотношения

$$\gamma\left(t\right)\partial_t w_{2m-p}\left(\xi,t\right)-w_{2m-(p+1)}\left(\xi,t\right)-\left(p-2k+1\right)\gamma'\left(t\right)w_{2m-p}\left(\xi,t\right)=0, \tag{1.13}$$

где $k=2k,\ldots,2m-2$;

$$\begin{cases} \gamma\left(t\right)\partial_t w_1\left(\xi,t\right)=\left(2m-2k\right)\gamma'\left(t\right)w_1\left(\xi,t\right)+\partial_t^{2m}u\left(\xi,t\right), \\ \gamma\left(t\right)\partial_t w_{2m-2k+1}\left(\xi,t\right)-w_{2m-2k}\left(\xi,t\right)=0, \\ \partial_t w_{2m-p}\left(\xi,t\right)-w_{2m-p-1}\left(\xi,t\right)=0, \ \ p=0,1,\ \ldots,2k-2 \end{cases} \tag{1.14}$$

С использованием этих формул уравнение (1.7) можно представить в виде

$$\begin{cases} \gamma\left(t\right)\frac{d\overline{u}_1}{dt}+B_{11}\left(\xi,t\right)\overline{u}_1+B_{12}\left(\xi,t\right)\overline{u}_2=\overline{f}\left(\xi,t\right), \\ \frac{d\overline{u}_2}{dt}+B_{22}\overline{u}_2+B_{12}\overline{u}_1=0, \end{cases} \tag{1.15}$$

где $\overline{u}_1=\left(w_1\left(\xi,t\right),w_2\left(\xi,t\right),\ldots,w_{2m-2k+1}\left(\xi,t\right)\right)^T$; $\overline{u}_2=\left(w_{2m-2k+2},\ldots,w_{2m}\right)^T$, символ T обозначает транспонирование. $\overline{f}\left(\xi,t\right)=f\left(\xi,t\right)\overline{e}_1$, $\overline{e}_1=\{\delta_{1j}\}_{j=1}^{2m-2k+1}$, δ_{ij} - символ Кронекера ($\begin{cases} \delta_{ii}=0 \\ \delta_{ij}=0,i\neq j \end{cases}$).

$B_{11}\left(\xi,t\right)=\{c_{ij}\}_{i,j=1}^{2m-2k+1}$ — матрица размерности $(2m-2k+1)\times(2m-2k+1)$ вида

$$B_{11}\left(\xi,t\right)=$$
$$\begin{pmatrix} b_1(\xi,t)-(2m-2k)\gamma'\left(t\right) & b_2\left(\xi,t\right) & b_3\left(\xi,t\right) & \ldots & b_{2m-2k+1}\left(\xi,t\right) \\ -1 & -\left(2m-2k-1\right)\gamma'\left(t\right) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & -\left(2m-2k-2\right)\gamma'\left(t\right) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.16}$$

$B_{12}\left(\xi,t\right)$ — матрица размера $(2m-2k+1)\times(2k-1)$ вида

$$B_{12}\left(\xi,t\right)=\begin{pmatrix} b_{2m-2k+2}(\xi,t)-(2m-2k)\gamma'(t) & b_{2m-2k+3}(\xi,t) & \ldots & b_{2m}(\xi,t) \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

$B_{21}\left(\xi,t\right)$ — матрица размера $(2k-1)\times(2m-2k+1)$ вида

$$B_{21}\left(\xi,t\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0\ldots & -1 \\ 0 & 0\ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0\ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

$B_{22}\left(\xi,t\right)$ — матрица размера $(2k-1)\times(2k-1)$ вида

$$B_{22}\left(\xi,t\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.19}$$

Вместе с системой (1.15) рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \gamma(t)\frac{d\overline{u}_1}{dt} + \left(B_{11}(\xi,0) + \gamma'(t)I\right)\overline{u}_1 + B_{12}^0(\xi,0)\,\overline{u}_2 = \overline{f}(\xi,t), \\ \frac{d\overline{u}_2}{dt} + B_{22}\overline{u}_2 + B_{21}\overline{u}_1 = 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Отличие матрицы $B_{12}^0(\xi,0)$ от матрицы $B_{12}(\xi,0)$ заключается в том, что элемент $b_{2m}(\xi,0)$ заменяется на элемент $b_{2m}^0(\xi,0)$, где $b_{2m}^0(\xi,0)$ - главная часть многочлена $b_{2m}(\xi,0)$.

Из [18] известно, что нахождение "гладких" вплоть до $t = 0$ решений системы (1.20) зависит от расположения спектра матрицы $B_{11}(\xi,0)$. Исходя из условий, накладываемых на функцию $\alpha(t)$ и используя определение функции $\gamma(t)$ получаем, что $\gamma(0) = \gamma'(0) = 0$. Учитывая это и (1.8)–(1.11) получаем

$$b_{2m-p}(\xi,0) = 0,\ p = 1,2,\ldots,2m-1,\ p \neq 2k-1;\quad b_{2m-2k+1}(\xi,0) = \frac{(-1)^{k-1}b}{a_{0\,2m}}.$$

Теперь займемся нахождением собственных чисел матрицы $B_{11}(\xi,0)$. Из ее вида получаем, что $\det\left(B_{11}(\xi,0) - \lambda I\right) = (-\lambda)^{2m-2k+1} + b_{2m-2k+1}(\xi,0) = 0$. Отсюда $\lambda^{2m-2k+1} = (-1)^{k-1}\frac{b}{a_{0\,2m}}$. Условие 1 дает, что $Im\frac{b}{a_{02m}} = 0, Re\frac{b}{a_{02m}} > 0$. Следовательно у матрицы $B_{11}(\xi,t)$ собственные числа различны и среди них не имеется собственных чисел, которые лежат на мнимой оси. Заметим, что в левой полуплоскости лежат $(m-k+1)$ собственных числа и в правой полуплоскости лежат $(m-k)$ собственных чисел. То есть инвариантное пространство E_- (E_+) оператора $B_{11}(\xi,0)$, который соответствует собственным числам λ_p, что лежат в левой (правой) полуплоскости имеет размерность равную $m-k+1 \quad (m-k)$. Через P_- (P_+) обозначим проекторы на E_- (E_+). Также обозначим через $P_p \ \ (p = 1,2,\ldots,2m)$ операторы, которые действуют по формулам

$$\begin{aligned} &P_p\overline{u}_1 = w_p,\ p = 1,2,..,2m-2k+1; \\ &P_p\overline{u}_2 = w_p,\ p = 2m-2k+2,\, 2m-2k+3,\ldots,2m. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Проектируя первое уравнение системы (1.20) на E_- и E_+, получим

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^-}}{dt} + \left(B_{11}(\xi,0) + \gamma'(t)I\right)\overline{u_1^-} = \left(f(\xi,t) - b_{2m}^0(\xi,0)\,u\right)P_-\overline{e}_1, \tag{1.22}$$

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^+}}{dt} + \left(B_{11}(\xi,0) + \gamma'(t)I\right)\overline{u_1^+} = \left(f(\xi,t) - b_{2m}^0(\xi,0)\,u\right)P_+\overline{e}_1, \tag{1.23}$$

где $u(\xi,t) = w_{2m}(\xi,t)$, $\overline{u_1^-} = P_-\overline{u}_1$, $\overline{u_1^+} = P_1\overline{u}_1$.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\gamma(t)\frac{d\overline{u_1^-}}{dt} + \left(B_{11}(\xi,0) + \gamma'(t)I\right)\overline{u_1^-} = 0. \tag{1.24}$$

Пространство решений уравнения (1.24), рассматриваемого как уравнение в $E_- \subset C^{2m-2k+1}$, имеет размерность $(m-k-1)$ (это следует из работы [18]).

Краевые условия (1.3) можно переписать в виде

$$P_{2m}\overline{u}_2|_{t=d} = P_{2m-1}\overline{u}_2|_{t=d} = \ldots = P_{2m-2k+2}\overline{u}_2|_{t=d} = 0, \tag{1.25}$$

$$P_{2m-2k+1}\overline{u}_1|_{t=d} = P_{2m-2k}\overline{u}_1|_{t=d} = \ldots = P_{m+1}\overline{u}_1|_{t=d} = 0. \tag{1.26}$$

Далее рассмотрим краевые условия (1.2). С использованием обозначения (1.12) и равенства (1.25) перепишем условие (1.2) в виде

$$\sum_{|\tau|\leqslant m_j} b_{\tau,j}\xi^\tau(-1)^{2k-j}\int_0^t\int_{\tau_{2k-j+1}}^d\cdots\int_{\tau_1}^d w_{2m-2k+1}(\xi,\tau_0)\,d\tau_0 d\tau_1\ldots d\tau_{2k-j+1}\Bigg|_{t=d} = g_j(\xi), \tag{1.27}$$

$j = 1,2,\ldots,k$.

Исходя из этого заключаем, что условия (1.2)–(1.3) при $t = d$ можно переписать в виде (1.26), (1.27).

То есть, для системы (1.15) получим задачу Коши (1.26), (1.27). Тем самым краевая задача (1.1)–(1.3) сведена к задаче (1.26), (1.27).

Перед тем как доказывать существование и единственность решения данной задачи, докажем существование и единственность решения задачи (1.20), (1.26), (1.27). Обратив операторы в левой части (1.22) и (1.23), получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{u_1^-}\left(\xi,t\right) = U_1^-\left(t,d\right) q^- - \int_t^d U_1^-\left(t,s\right) P_- \overline{e}_1 \left(f\left(s\right) - b_{2m}^0\left(\xi,0\right) u\left(s\right)\right) \frac{ds}{\gamma(s)}, \\ \overline{u_1^+}\left(\xi,t\right) = \int_0^t U_1^+\left(t,s\right) P_+ \overline{e}_1 \left(f\left(s\right) - b_{2m}^0\left(\xi,0\right) u\left(s\right)\right) \frac{ds}{\gamma(s)}, \end{array} \right. \tag{1.28}$$

Здесь $U_1^{\pm}\left(t,s\right) = \frac{\gamma(s)}{\gamma(t)} \exp\left(P_{\pm} B_{11}\left(\xi,0\right) \int_t^s \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)$, q^- — произвольный вектор из E_-. $\overline{u}_1(\xi,t) = \overline{u_1^-}(\xi,t) + \overline{u_1^+}(\xi,t)$. Следовательно, из (1.28) получаем равенство

$$\overline{u}_1\left(\xi,t\right) = U_1^-\left(t,d\right) q^- - \int_0^d \Phi\left(t,\tau\right) f\left(\tau\right) d\tau + b_{2m}^0\left(\xi,0\right) \int_0^d \Phi\left(t,\tau\right) u\left(\tau\right) d\tau, \tag{1.29}$$

где

$$\Phi\left(t,\tau\right) = \left\{ \begin{array}{l} -U_1^+\left(t,\tau\right) P_+ \overline{e}_1 \frac{1}{\gamma(\tau)} \text{ при } 0 < \tau < t \\ U_1^-\left(t,\tau\right) P_- \overline{e}_1 \frac{1}{\gamma(\tau)} \text{ при } t < \tau < d. \end{array} \right. \tag{1.30}$$

Учитывая, что $u\left(\xi,t\right)|_{t=d} = \partial_t u\left(\xi,t\right)|_{t=d} = \ldots = \partial_t^{2k-2} u\left(\xi,t\right)|_{t=d} = 0$, получим

$$\begin{aligned} u\left(\xi,t\right) = (-1) \int_t^d \int_{\tau_{2k-2}}^d \ldots \int_{\tau_1}^d \partial_t^{2k-1}\left(\xi,\tau_0\right) d\tau_0 d\tau_1 \ldots d\tau_{2k-2} = \\ = -\int_t^d \int_{\tau_{2k-2}}^d \ldots \int_{\tau_1}^d w_{2m-2k+1}\left(\xi,\tau_0\right) d\tau_0 d\tau_1 \ldots d\tau_{2k-2}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Применяя (1.31) в (1.29), получим равенство

$$\begin{aligned} \overline{u}_1\left(\xi,t\right) = U_1^-\left(t,d\right) q^- - \int_0^d \Phi\left(t,\tau\right) f\left(\tau\right) d\tau - b_{2m}^0\left(\xi,0\right) \cdot \\ \cdot \int_0^d \Phi\left(t,\tau\right) \int_\tau^d \int_{\tau_{2k-2}}^d \ldots \int_{\tau_1}^d w_{2m-2k+1}\left(\xi,\tau_0\right) d\tau_0 d\tau_1 \ldots d\tau_{2k-2} d\tau. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Кроме этого функция $\overline{u}_1(\xi,t)$ удовлетворяет условиям (1.26), (1.27). Из (1.32) получим равенства

$$\begin{aligned} P_\nu \overline{u}_1 = w_\nu = P_\nu U_1^-\left(t,d\right) q^- - \int_0^d P_\nu \Phi\left(t,\tau\right) f\left(\tau\right) d\tau - \\ - b_{2m}^0\left(\xi,0\right) \int_0^d P_\nu \Phi\left(t,\tau\right) \int_\tau^d \int_{\tau_{2k-2}}^d \ldots \int_{\tau_1}^d w_{2m-2k+1}\left(\xi,\tau_0\right) d\tau_0 d\tau_1 \ldots d\tau_{2k-2} d\tau. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Подставляя в (1.33) $t = d$, получим

$$\begin{aligned} w_\nu|_{t=d} = P_\nu U_1^-\left(d,d\right) q^- - \int_0^d P_\nu \Phi\left(d,\tau\right) f\left(\tau\right) d\tau - \\ - b_{2m}^0\left(\xi,0\right) \int_0^d P_\nu \Phi\left(d,\tau\right) \int_\tau^d \int_{\tau_{2k-2}}^d \ldots \int_{\tau_1}^d w_{2m-2k+1}\left(\xi,\tau_0\right) d\tau_0 d\tau_1 \ldots d\tau_{2k-2} d\tau. \end{aligned}$$

Заметим, что $U_1(d,d) = 1$ и $w_\nu|_{t=d} = 0$ при $m+1 \leqslant \nu \leqslant 2m-2k+1$. Отсюда, при $m+1 \leqslant \nu \leqslant 2m-2k+1$, получим равенства

$$P_\nu q^- = d_\nu + b^0_{2m}(\xi,0)\, M_\nu w_{2m-2k+1}, \nu = m+1, m+2, \ldots, 2m-2k+1, \tag{1.34}$$

где

$$d_\nu = \int_0^d P_\nu \Phi(d,\tau)\, f(\tau)\, d\tau, \tag{1.35}$$

$$M_\nu w_{2m-3} = -\int_0^d P_\nu \Phi(d,\tau) \int_\tau^d \int_{\tau_{2k-2}}^d \ldots \int_{\tau_1}^d w_{2m-2k+1}(\xi,\tau_0)\, d\tau_0 d\tau_1 \ldots d\tau_{2k-2} d\tau. \tag{1.36}$$

Теперь рассмотрим условия (1.27). Их можно записать в виде

$$(-1)^{2k-j}\theta_j(\xi) \int_0^t \int_{\tau_{2k-j-1}}^d \ldots \int_{\tau_1}^d w_{2m-2k+1}(\xi,\tau_0)\, d\tau_0 d\tau_1 \ldots d\tau_{2k-j-1}|_{t=d} = g_j(\xi), \tag{1.37}$$

где $\theta_j(\xi) = -\sum\limits_{|\tau| \leqslant m_j} b_{\tau,j}\xi^\tau$, $j = 1,2,\ldots,k$.

Подставляя функцию $w_{2m-2k+1}$, заданную равенством (1.33) при $\nu = 2m-2k+1$, в равенства (1.37), получаем равенства

$$(-1)^{2k-j}\theta_j(\xi) \int_0^d \int_{s_{2k-j-1}}^d \ldots \int_{s_1}^d P_{2m-2k+1} U_1^-(s_0,d)\, q^- ds_0 ds_1 \ldots ds_{2k-j-1} =$$
$$= d_{m+1-j} + b^0_{2m}(\xi,0)\, M_{m+1-j} w_{2m-2k+1}, \tag{1.38}$$

где $j = 1,2,\ldots,k$,

$$d_{m+1-j} = g_j(\xi) +$$
$$+ (-1)^{2k-j}\theta_j(\xi) \int_0^d \int_{s_{2k-j-1}}^d \ldots \int_{s_1}^d \int_0^d P_{2m-2k+1}\Phi(s_0,\tau)\, f(\tau) ds_0 ds_1 \ldots . ds_{2k-j-1} d\tau. \tag{1.39}$$

$$M_{m+1-j} w_{2m-2k+1} = (-1)^{2k-j}\theta_j(\xi) \int_0^d \int_{s_{2k-j-1}}^d \ldots \int_{s_1}^d \left[\int_0^d P_{2m-2k+1}\Phi(s_0,\tau) \cdot\right.$$
$$\left.\cdot \int_\tau^d \int_{\tau_{2k-2}}^d \ldots \int_{\tau_1}^d w_{2m-2k+1}(\xi,\tau_0)\, d\tau_0 d\tau_1 \ldots d\tau_{2k-2} d\tau\right] ds_0 d\tau_1 \ldots d\tau_{2k-j-1}. \tag{1.40}$$

Уравнения (1.34), $\nu = m+1, m+2, \ldots, 2m-2k+1$, и уравнения (1.38), $j = 1,2,\ldots,k$ образуют систему $(m-k+1)$ уравнений для вычисления вектора q^-. Покажем, что эта система будет иметь единственное решение, если $d > 0$ достаточно малы.

Пусть $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_{m-k+1}$ — собственные векторы матрицы $B_{11}(\xi,0)$, соответствующие собственным числам, лежащим в левой полуплоскости. Векторы $\overline{r}_1, \ldots, \overline{r}_{m-k+1}$ образуют базис в E_- и $q^- \in E_-$, следовательно, существуют числа μ_p, $p = 1, 2, .., m-k+1$ такие, что

$$q^- = \mu_1 \overline{r}_1 + \mu_2 \overline{r}_2 + \ldots + \mu_{m-k+1} \overline{r}_{m-k+1}. \tag{1.41}$$

Пользуясь условием $B_{11}(\xi,0)\, \overline{r}_p = \lambda_p \overline{r}_p$ и принимая во внимание вид матрицы $B_{11}(\xi,0)$, получим

$$r_{p,l} = (-\lambda_p)^{2m-2k+1-l}\, r_{p,2m-2k+1}, \, p = 1,2,\ldots,2m-2k+1. \tag{1.42}$$

Через $r_{p,l}$ обозначена — l–ая координата вектора $\overline{r}_p$.

Из соотношения (1.42) вытекает, что $\overline{r}_p \neq \bar{0}$, значит $r_{p,2m-2k+1} \neq 0$. Из (1.41) и (1.42) вытекает соотношение

$$P_\nu q^- = \sum_{p=1}^{m-k+1} \mu_p P_\nu \overline{r}_p = \sum_{p=1}^{m-k+1} \mu_p r_{p\nu} =$$
$$= d_\nu + b_{2m}^0(\xi,0) M_\nu w_{2m-2k+1},\ \nu = m+1, m+2, \ldots, 2m-2k+1.$$

Используя в этих равенствах равенство (1.42), получим

$$\sum_{p=1}^{m-k+1} \mu_p r_{p,2m-2k+1} (\lambda_p)^{2m-2k+1-\nu} = (-1)^{2m-2k+1-\nu}\left(d_\nu + b_{2m}^0(\xi,0) M_\nu w_{2m-2k+1}\right), \quad (1.43)$$

где $\nu = m+1, m+2, \ldots, 2m-2k+1$.

Теперь рассмотрим условия (1.38). Так как $\overline{r}_p$ — собственный вектор матрицы $B_{11}(\xi,0)$, который отвечает собственному значению λ_p, то

$$U_1^-(\tau,d)\overline{r}_p = \frac{\gamma(d)}{\gamma(\tau)} \exp\left(\lambda_p \int_\tau^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\overline{r}_p.$$

Из этого равенства и (1.38) вытекает равенство

$$\sum_{p=1}^{m-k+1} \mu_p (-1)^{2k-j}\theta_j(\xi) \int_0^d \int_{s_{2k-j-1}}^d \ldots \int_{s_1}^d P_{2m-2k+1}\frac{\gamma(d)}{\gamma(s_0)}\times$$
$$\times \exp\left(\lambda_p \int_{s_0}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) r_{p,2m-2k+1} ds_0 ds_1 \ldots ds_{2k-j-1} =$$
$$= d_{m+1-j} + b_{2m}^0(\xi,0) M_{m+1-j} w_{2m-2k+1}. \quad (1.44)$$

Здесь $j = 1,2,\ldots,k$.

Заметим, что

$$\int_{\tau_1}^d \frac{1}{\gamma(\tau_0)} \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_0}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right) d\tau_0 = -\frac{1}{\lambda_p}\left(1 - \exp\left(\lambda_p \int_{\tau_1}^d \frac{d\rho}{\gamma(\rho)}\right)\right). \quad (1.45)$$

Используя (1.45), получим из (1.44) равенства

$$-\sum_{p=1}^{m-k+1} \theta_j(\xi)\gamma(d)\mu_p r_{p,2m-2k+1}(-1)^{l+j}[\frac{d^l}{l!\lambda_p^j} + \frac{d^{l+1}}{(l+1)!\lambda_p^{j-1}} +$$
$$+ \ldots + \frac{d^{l+j-1}}{(l+j-1)!\lambda_p} + o(d^N)] = d_{m+1-j} + b_{2m}^0(\xi,0) M_{m+1-j} w_{2m-2k+1}, \quad (1.46)$$

$j = 1,2,..,k$, $N > 0$ — любое число.

Таким образом, для нахождения чисел $(\mu_p r_{p,2m-2k+1})$ получаем систему уравнений (1.43) при $\nu = m+1, \ldots, 2m-2k+1$ и (1.46) при $j = 1,2,\ldots,k$. (то есть всего $(m-k+1)$ уравнений). Определитель этой системы имеет вид

$$D = \prod_{j=1}^{k} (-1)^{k+j+1}\theta_j(\xi)\frac{\gamma^k(d)}{(l!)^k} d^{k^2}[D_1 + o(d^N)], N > 0, \quad (1.47)$$

где D_1 определитель матрицы размера $(m-k+1)\times(m-k+1)$, элементы которой имеют вид

$$\beta_{jp}=\lambda_p^{j-k-1}, j=1,2,\ldots,m-k+1, p=1,2,\ldots,m-k+1. \qquad (1.48)$$

Так как собственные числа $\lambda_p, p=1,\ldots,m-k+1$ различны, то D_1 — определитель Вронского и, очевидно, отличен от нуля.

Таким образом, при достаточно малом $d>0$ получим, что $D\neq 0$ при выполнении условия 3. Следовательно, система (1.43), (1.46) $(\nu=m+1,\ldots,2m-2k+1, j=1,2,\ldots,k)$ имеет единственное решение при любых правых частях. Решение этой системы можно записать в виде

$$\mu_p=\sum_{\nu=m-k+1}^{2m-2k+1}\beta_{p,\nu}(d_\nu+b_{2m}^0(\xi,0)M_\nu w_{2m-2k+1})\frac{1}{r_{p,2m-2k+1}};\ p=1,2,\ldots,m-k+1. \qquad (1.49)$$

Используя (1.49) и (1.41) в (1.33) при $\nu=2m-2k+1$, получим

$$w_{2m-2k+1}(\xi,t)=\widetilde{F}(\xi,t)+b_{2m}^0(\xi,0)\widetilde{M}w_{2m-2k+1}(\xi,t), \qquad (1.50)$$

где

$$\widetilde{F}(\xi,t)=\sum_{\nu=m-l+1}^{2m-2l}\sum_{p=1}^{m-l}\beta_{p,\nu}\frac{\gamma(d)}{\gamma(t)}\exp(\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)})-\int_0^d P_{2m-2l}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau, \qquad (1.51)$$

$$\widetilde{M}w_{2m-2k+1}=\sum_{p=1}^{m-k}\sum_{\nu=m-k+1}^{2m-2k+1}\beta_{p,\nu}M_\nu w_{2m-2k+1}\frac{\gamma(d)}{\gamma(t)}\exp(\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)})+$$
$$+\int_0^d P_{2m-2k+1}\Phi(t,\tau)\int_\tau^d\int_{\tau_{2k-2}}^d\ldots\int_{\tau_1}^d w_{2m-2k+1}(\xi,\tau_0)d\tau_0 d\tau_1\ldots d\tau_{2k-2}d\tau. \qquad (1.52)$$

Заметим, что при достаточно малых $d>0$ справедливы неравенства

$$\begin{cases}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m-l}Re\lambda_j+\max\limits_{0\leqslant t\leqslant d}|\gamma'(t)|\leqslant\delta_-<0\\ \min\limits_{m-l+1\leqslant j\leqslant 2m-2l}Re\lambda_j-\max\limits_{0\leqslant t\leqslant d}|\gamma'(t)|\geqslant\delta_+>0.\end{cases} \qquad (1.53)$$

В этом случае доказательство разрешимости уравнения (1.50) основано на следующих оценках

$$\left\|\int_0^d P_{2m-2l}\Phi(t,\tau)f(\tau)d\tau\right\|_{L_2(0,d)}\leqslant(m-l)\left(\frac{1}{\delta_-}+\frac{1}{\delta_+}\right)\|f\|_{L_2(0,d)}, \qquad (1.54)$$

$$\sum_{p=1}^{m-l}\left\|\frac{1}{\gamma(t)}\exp(\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)})\right\|_{L_2(0,d)}\leqslant(m-l)\left(\frac{1}{\delta_-}\right)^{\frac12}, \qquad (1.55)$$

$$\sum_{j=m-l+1}^{2m-2l}\left\|\frac{1}{\gamma(t)}\exp(-\lambda_p\int_t^d\frac{d\rho}{\gamma(\rho)})\right\|_{L_2(0,d)}\leqslant(m-l)\left(\frac{1}{\delta_+}\right)^{\frac12}, \qquad (1.56)$$

$$\sup_{0<t_1<d}\left\|\int_0^t P_\nu\Phi(t_1,t)d\tau\right\|_{L_2(0,d)}\leqslant 3(m-l)\left(\frac{1}{\delta_+}+\frac{1}{\delta_-}\right)\sqrt{d}. \qquad (1.57)$$

Эти оценки выводятся непосредственно из (1.30) и (1.53). Из (1.54)–(1.57) получим, что функция $\widetilde{F}(x,t)$, определённая в (1.51), принадлежит пространству $L_2(0;d)$, а оператор $\widetilde{M}$, определённый в (1.52), является ограниченным оператором в $L_2(0,d)$. Выберем теперь $\delta > 0$ настолько малым, чтобы при всех $|\xi| \leqslant \delta$ выполнялось условие

$$\left|b^0_{2m}(\xi,0)\right| \left\|\widetilde{M}\right\|_{L_2 \to L_2} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда уравнение (1.50) однозначно разрешимо в $L_2(0,d)$ и

$$w_{2m-2k+1} = (I - b^0_{2m}(\xi,0)\widetilde{M})^{-1}\widetilde{F}. \tag{1.58}$$

Причём,

$$\left\|w_{2m-2k+1}\right\|_{L_2(0;d)} \leqslant 2\left\|\widetilde{F}\right\|_{L_2(0;d)}. \tag{1.59}$$

Подставляя решение (1.58) в (1.33), получим решение системы (1.20). Это решение удовлетворяет условиям (1.25), (1.26), (1.27), а, значит, выполнены условия (1.2), (3.3).

Из равенства (1.33) и неравенства (1.59) получим, что все координаты векторных функций $\overline{u}_1$ и $\overline{u}_2$ принадлежат по переменной t пространству $L_2(0;d)$ при всех $\xi \in R^{n-1}$, $|\xi| \leqslant \delta$.

Таким образом, эти векторные функции являются решением системы (1.20) и удовлетворяют условиям (1.25), (1.26), (1.27).

Из (1.12)–(1.14) следует, что $u\,(\xi,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$i^{-2m}\alpha^{2m}\,(t)\,\partial_t^{2m}u - \frac{(-1)^k b}{a_{0\,2m}}\partial_t^{2k-1}u + \sum_{|\tau|=2m}\frac{a_{\tau,0}}{a_{0\,2m}}\xi^\tau u = f. \tag{1.60}$$

Заметим, что

$$i^{-2m}\alpha^{2m}\,(t)\,\partial_t^{2m}u = D^{2m}_{\alpha,t}u + R_{2m}u, \tag{1.61}$$

где $R_{2m}u = \sum\limits_{j=0}^{2m-1} z_{2m,j}\,(t)\,D^j_{\alpha,t}u$, а $z_{2m,j}\,(t)$ — ограниченные и непрерывные функции на отрезке $[0;d]$.

Тогда, из (1.60) и (1.61) заключаем, что функция $u\,(\xi,t)$ будет удовлетворять уравнению

$$a_{0\,2m}D^{2m}_{\alpha,t}u - (-1)^k b\partial_t^{2k-1}u + \sum_{|\tau|=2m} a_{\tau,0}\xi^\tau u + R_{2m}u = f\,(\xi,t). \tag{1.62}$$

Можно показать (см. [3]), что функция $u\,(\xi,t)$ принадлежит пространству $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}(0;d)$ по переменной t.

Введем обозначение $\widetilde{A} = a_{0\,2m}D^{2m}_{\alpha,t} + \sum\limits_{|\tau|=2m} a_{\tau,0}\xi^\tau - (-1)^k b\partial_t^{2k-1} + a_{0\,2m}R_{2m}$. Рассмотрим оператор $A^\mu = \mu A + (1-\mu)\,\widetilde{A}$, где $A = L_{2m}\,(\xi,D_{\alpha,t}) - (-1)^k b\partial_t^{2k-1}$. Можно показать справедливость априорной оценки, аналогичной оценке из теоремы 2 для оператора A^μ при $|\xi| \leqslant \delta$ с константой, не зависящей от $\mu \in [0,1]$. Исходя из предыдущих выкладок, можем сделать вывод, что уравнение (1.62) имеет единственное решение, удовлетворяющее условиям (1.2), (1.3). Пользуясь этим, при помощи метода продолжения по параметру μ и используя априорную оценку, получаем, что уравнение $A\,(\xi,D_{\alpha,t},\partial_t)\,u = f$ будет иметь единственное решение, которое удовлетворяет условию (1.2) и (1.3) при $|\xi| \leqslant \delta$.

Рассмотрим оператор $A\left(\lambda\,\dot{\xi}\,,D_{\alpha,t},\partial_t\right)$, где $|\,\dot{\xi}\,| = \delta$. Используем априорную оценку из теоремы 2, при помощи метода продолжения по параметру $\lambda > 0$ из ранее установленной разрешимости задачи (1.2)–(1.3) для уравнения $A\left(\lambda\,\dot{\xi}\,,D_{\alpha,t},\partial_t\right)u = f$ при $\lambda = 1$, получаем, что данная задача имеет единственное решение для любых $\lambda > 0$. Теперь положим $\lambda = \frac{|\xi|}{\delta}$, в результате получим, что задача (1.2)–(1.3) для уравнения $A\left(\xi, D_{\alpha,t}, \partial_t\right) u = f$ будет иметь единственное решение для любых $\xi \in R^{n-1}$. Значит, установлены существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.3) при дополнительных условиях (1.53). В случае невыполнения хотя бы одного этого условия, будем рассматривать оператор $\hat{A} = L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right) - (-1)^k \widehat{b} \partial_t^{2k-1}$. Здесь $Re\overline{\overline{b}}a_{0\,2m} > 0$, $Im\overline{\overline{b}}a_{0\,2m} = 0$. Тогда оператор $\hat{A}$ будет удовлетворять тем же условиям, что и оператор A. Выбираем $Re\widehat{b} > 0$ настолько большим, чтобы условия (1.53) были выполнены. Выше было показано, что задача (1.2)–(1.3) для уравнения $\hat{A} u = f$ имеет единственное решение в $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\left(0; d\right)$. Заметим, что можно показать справедливость априорной оценки, аналогичной оценке теоремы 2, которая будет выполняться и для оператора $\widehat{A}^{\mu} = L_{2m}\left(\xi, D_{\alpha,t}\right) - \left(b\mu + (1-\mu)\,\widehat{b}\right)(-1)^k \partial_t^{2k-1}$, при этом постоянная в этой оценке не зависит от $\mu \in [0;1]$. Это дает возможность опять применять метод продолжения по параметру $\mu \in [0;1]$ и получить существование и единственность решения этой задачи при $\mu = 1$ из существования и единственности задачи (1.2)–(1.3) для уравнения $\widehat{A}^{\mu} u = f$ при $\mu = 0$. Исходя из того, что $\widehat{A}^1 = A$, получим, что существование и единственность решения задачи (1.1)–(1.3) доказана в $\widetilde{H}_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\left(0; d\right)$, откуда и следует существование и единственность решения задачи (1)–(3) в $H_{2m,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\left(R^n_d\right)$. При доказательстве существования и единственности решения задачи (1)–(3) в пространстве $H_{s,\alpha,\frac{2m}{2k-1}}\left(R^n_d\right)$ при $s > 2m$, необходимо использовать известный метод повышения гладкости (см. [3]).

При достаточно малых $d > 0$ разрешимость показана. При $t \geqslant d$ уравнение не будет являться вырождающимся, а, это означает, что решение задачи (1)–(3) существует при $t \in [d; d_1]$ (см. [11]). Тогда при помощи “склеивания” (см. [11]), получим существование и единственность решения задачи (1)–(3) при $t \in [0; d_1]$ для любого $d_1 > 0$. Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Математический сборник. — 1969. — Т. 80 (112), вып. 4. — С. 455–491.

2. Вишик, М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4. — С. 29–56.

3. Глушко, В. П. Априорные оценки решений краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко; Воронеж. гос. ун-т. — Воронеж, 1979. — 47 с. — Деп. в ВИНИТИ 27.03.79, № 1048–79.

4. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

5. Баев, А. Д. Качественные методы теории краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев. — Воронеж : Воронеж. гос. ун–т, 2008. — 240 с.

6. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

7. Баев, А. Д. Об одном классе краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Доклады Академии Наук. — 2013. — Т. 448, № 1. — С. 7–8.

8. Баев, А. Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн.

Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

9. Баев, А. Д. О существовании решений одного класса краевых задач в полосе для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев, В. В. Панков // Доклады Академии Наук. — 2017. — Т. 475, № 5. — С. 1–3.

10. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

11. Панков, В. В. О существовании и единственности решения одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, Н. А. Бабайцева // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 3. — С. 79–92.

REFERENCES

1. Vishik M.I., Grushin V.V. Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain. [Vishik M.I., Grushin V.V. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1969, vol. 80 (112), iss. 4, pp. 455–491.

2. Vishik M.I., Grushin V.V. Degenerate elliptic differential and pseudo-differential operators. [Vishik M.I., Grushin V.V. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, iss. 4, pp. 29–56.

3. Glushko V.P. A priori estimates for solutions of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Apriornye ocenki resheniyj kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. Voronezh State University, Voronezh, 1979, 47 p, dep. in VINITI 27.03.79, № 1048–79.

4. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

5. Baev A.D. Qualitative methods of theory of boundary value problems for degenerate elliptic equations. [Baev A.D. Kachestvennye metody teorii kraevyx zadach dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. Voronezh, 2008, 240 p.

6. Baev A.D. On General boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

7. Baev A.D., Buneev S.S. On a class of boundary value problems in the band for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D., Buneev S.S. Ob odnom klasse kraevyx zadach v polose dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2013, vol. 448, no. 1, pp. 7–8.

8. Baev A.D., Buneev S.S. An A Priori Estimate For Solutions Of A Boundary Value Problem In The Strip For Degenerate Elliptic Equations Of Higher Order. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 81–92.

9. Baev A.D., Pankov V.V. On the existence of solutions of a class of boundary value problems in a strip for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D., Pankov V.V. O sushhestvovanii resheniyj odnogo klassa kraevyx zadach v polose dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2017, vol. 475, no. 5,

pp. 1–3.

10. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 162–172.

11. Pankov V.V., Baev A.D., Babaitseva N.A. On the existence and uniqueness of the solution of one boundary value problem in the strip for the degenerating elliptic equation of high order. [Pankov V.V., Baev A.D., Babayjceva N.A. O sushhestvovanii i edinstvennosti resheniya odnoyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 3, pp. 79–92.

Панков Владимир Владимирович, аспирант Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: pankovfam@mail.ru

Pankov Vladimir Vladimirovich, graduate student of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: pankovfam@mail.ru

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бабайцев Андрей Александрович, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: 259608@mail.ru

Babaitsev Andrey A., student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: 259608@mail.ru