УДК 517.9

УТОЧНЕННЫЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ С ЗАСТОЙНЫМИ И ПРОТОЧНЫМИ ЗОНАМИ

А. В. Костин, М. В. Муковнин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 31.07.2017 г.

Аннотация. В статье рассматриваются феноменологические уравнения фильтрации в пористой среде с проточными и застойными зонами. Данная модель была предложена В. С. Голубевым и предлагается аналогичная модель, которая более точно описывает процесс фильтрации, точность достигается за счет явного, то есть не осредненного вхождения плотности. Далее рассматриваются задачи без начальных условий для модели фильтрации и для уточненной модели фильтрации. Для уточненной модели задача сводится к нестационарной задаче без начальных условий в случае периодического граничного условия. Для неё получено точное решение, которое позволяет проанализировать поведение фильтрационных волн в пористой среде и построить алгоритмы для ЭВМ, моделирующие данные процессы с меньшей погрешностью. В заключение приводятся несколько нетривиальных примеров.

Ключевые слова: феноменологические уравнения фильтрации, задачи без начальных условий, пористые среды.

REFINED PHENOMENOLOGICAL FILTRATION EQUATIONS IN A POROUS MEDIUM WITH STAGNANT AND FLOW ZONES

A. V. Kostin, M. V. Mukovnin

Abstract. The article deals with the phenomenological filtration equations in a porous medium with flow and stagnant zones. This model has been proposed. V. S. Golubev and proposed a similar model which with more precision describes the filtering process, the accuracy is achieved due to the explicit, that is, not averaged occurrences of density. Next, we consider problems without initial conditions for the filtration model and for the refined filtration model. For a refined model task reduces to a nonstationary problem without initial conditions in the case of a periodic boundary condition. For her, the exact solution of the task, which allows to analyze the behavior of filtration waves in a porous medium and build algorithms for computer simulating these processes with less error. In conclusion, there are several non-trivial examples.

Keywords: phenomenological equations of filtration, tasks without initial conditions, porous media.

В работе [1] В. С. Голубевым предложены феноменологические уравнения фильтрации в пористой среде, учитывающие наличие проточных и застойных зон, далее модель фильтрации

$$a\frac{\partial^2 P_1(t,x)}{\partial x^2} = (1-\nu)\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t} + \nu\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial t}\, 0 < x < \infty, 0 < t < \infty, \tag{0.1}$$

$$\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t} = \gamma[P_1(t,x) - P_2(t,x)], \tag{0.2}$$

где ν — доля объема проточных зон, $P_1(t,x)$ и $P_2(t,x)$ — давление в проточных и застойных зонах соответственно, γ — константа массобмена между проточными и застойными зонами, $a = \frac{kE_\chi}{\mu\chi}$, μ — вязкость жидкости, k — проницаемость среды, χ — пористость, отнесенная к объему проточных зон, E_χ — модуль сжимаемости жидкости.

Для системы (0.1)–(0.2) в работах [2], [3] Ю.И. Бабенко рассматривает задачу о нахождении градиента давления у границы области $\frac{\partial P_1}{\partial x}\big|_{x=0}$ при граничных условиях

$$P_1(t,x)|_{x=0} = \varphi(t), \quad P_1(t,x)|_{x=\infty} = P_2(t,x)|_{x=\infty} = 0 \tag{0.3}$$

и начальным условием

$$P_1(0,x) = 0. \tag{0.4}$$

В работе [5] указывается решение системы (0.1)–(0.2) при $t \in (-\infty,\infty)$ без начального условия (0.4) с периодической функцией $\varphi(t)$

$$P_1(t,0) = \varphi(t). \tag{0.5}$$

Так, например, если $\varphi(t) = A\cos\omega t$, то решение задачи (0.1)–(0.2)–(0.3)–(0.5) имеет вид

$$P_1(t,x) = \exp\left(-\sqrt{\frac{\alpha+\rho}{2}}x\right)\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\rho-\alpha}{2}}x\right), \tag{0.6}$$

$$P_2(t,x) = \gamma\int_{-\infty}^{t} e^{\gamma(s-t)}P_1(s,x)ds, \tag{0.7}$$

$$\alpha = \frac{\omega^2(1-\nu)\gamma}{\gamma^2+\omega^2}, \quad \rho = \frac{\omega}{a}\sqrt{\frac{\gamma^2+\omega^2\nu^2}{\gamma^2+\omega^2}}. \tag{0.8}$$

В настоящем сообщении вместо уравнения (0.1) приводится уравнение точнее описывающее изучаемый процесс движения жидкости, далее улучшенная модель фильтрации.

Указывается связь решения уточненной задачи с соответствующими решениями для системы (0.1)–(0.2).

1. ПОСТРОЕНИЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В [1], при исследовании движения жидкости в пористой среде с застойными зонами анализируется уравнение

$$(1-\nu)\frac{\partial\rho_2}{\partial t} + \nu\frac{\partial\rho_1}{\partial t} + \nu\frac{\partial(u\rho_1)}{\partial x} = 0, \tag{1.1}$$

где $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ — доля объема проточных зон $\rho_1(t,x)$, $\rho_2(t,x)$ — плотности жидкостей в проточных и застойных зонах, $u(t,x)$ — скорость течения жидкости в проточной зоне, t — время.

Для скорости массобмена между проточными и застойными зонами устанавливается связь

$$\frac{\partial\rho_2}{\partial t} = \gamma(\rho_1 - \rho_2). \tag{1.2}$$

Скорость $u(t,x)$ в пористой среде связана с истинной скоростью u_0 равенством $u(t,x) = \frac{\chi_0}{chi}u_0(t,x)$. Здесь χ_0 и χ — пористость, отнесенная ко всему свободному объему и к объему проточных зон соответственно.

Соотношение

$$u(t,x) = -\frac{k}{\mu\nu\chi_0}\cdot\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial x}, \tag{1.3}$$

где μ — вязкость жидкости, связывает давление и скорость жидкости по закону Дарси. При этом предполагается, что для упругого режима фильтрации в недеформируемой среде плотность линейно зависит от давления, что характеризуется равенствами

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial x} = \frac{\rho_a}{E_\chi} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial x} \quad (i = 1,2), \tag{1.4}$$

где ρ_a — усредненная плотность жидкости, E_χ — модуль ее сжимаемости.

Использование (1.3) и (1.4) приводит уравнение (1.1) к виду

$$\frac{\partial(u(t,x)\rho_1)}{\partial x} = -\frac{k}{\mu\chi}\left(\rho_1 \frac{\partial^2 P_1(t,x)}{\partial x^2} + \frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial x}\right). \tag{1.5}$$

Далее, в [1] в равенстве (1.5) делается упрощение правой части путем отбрасывания, в силу малости произведения

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial x}. \tag{1.6}$$

и осреднения плотности $\rho_1 \approx \rho_a$.

В результате уравнение (1.1) в [1] принимает вид (0.1), т.е.

$$a\frac{\partial^2 P_1(t,x)}{\partial x^2} = (1-\nu)\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t} + \nu\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial t}\, 0 < x < \infty, 0 < t < \infty, \tag{1.7}$$

где $a = \frac{kE_\chi}{\mu\chi}$ — коэффициент пьезопроводимости

$$\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t} = \gamma[P_1(t,x) - P_2(t,x)], \tag{1.8}$$

образует систему феномелогических уравнений фильтрации согласно работе [1], стр. 101, в которой рассматривается задача нахождения решения этой системы в полубесконечной магистрали $\chi \in [0,\infty)$ с условиями

$$P_1(t,x)|_{x=0} = \varphi(t), \quad P_1(t,x)|_{x=\infty} = 0, \tag{1.9}$$

$$\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t} = \gamma[P_1(t,x) - P_2(t,x)]. \tag{1.10}$$

Требуется найти градиент давления у границы области $\left.\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = q(t)$.

Согласно (1.3) эта величина определяет скорость движения жидкости на границе области.

2. УТОЧНЕНИЕ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Приведенные выше рассуждения указывают, что уравнение (0.1) является следствием упрощения (огрубления) (1.1) за счет отбрасывания в (1.5) слагаемого (1.6). Однако соотношение (1.1) можно уточнить, если отбросить только половину выражения (1.6). Тогда соответствующее приближение получает вид

$$\frac{\partial(u\rho_1)}{\partial x} \approx -\frac{k}{\mu\chi}\left(\rho_1 \cdot \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial^2 x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial x}\right) =$$

$$= -\frac{k}{\mu\chi}\left(\sqrt{\rho_1}\frac{\partial}{\partial_x}\left(\sqrt{\rho_1}\frac{\partial P_1}{\partial x}\right)\right) = a\mathbb{D}_\rho^2 P_1(x), \tag{2.1}$$

$a = -\frac{k}{\mu\chi}$; $\mathbb{D}_\rho P_1(x) = \sqrt{\rho_1}\frac{\partial P_1}{\partial x}$.

В результате (1.5) получаем уравнение

$$a\mathbb{D}_\rho^2 P_1(t,x) = \nu \cdot \frac{\partial P_1(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t}, \tag{2.2}$$

которое более точно описывает исследуемую модель движения жидкости, так как в его коэффициенты явно (не осредненно) входит плотность ρ_1, причем приближение получено с меньшей погрешностью.

Присоединяя к уравнению (2.2) соотношение

$$\frac{\partial P_2}{\partial t} = \gamma(P_2 - P_1), \tag{2.3}$$

получаем систему уравнений (2.2)–(2.3), уточняющую режим фильтрации (0.1)–(0.2), приведенный в [1].

3. ЗАДАЧИ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ

Интересно, что система (2.2)–(2.3) после замены $s = h(x)$ сводится к системе Голубева (0.1)–(0.2) для функций $v_1(t,s) = P_1(t,h^{-1}(s))$ и $v_2(t,s) = P_2(t,h^{-1}(s))$, где

$$h(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\rho_1(\xi)}}. \tag{3.0}$$

Отсюда следует, что если $P_1(t,x)$ и $P_2(t,x)$ — решение системы Голубева, то функции $P_1(t,p(x))$ и $P_2(t,p(x))$ являются решением уточненной системы (2.2)–(2.3).

Для модели фильтрации задача без начальных условий рассматривалась в [3] в следующей постановке:

При $t \in (-\infty,\infty) = \mathbb{R}$ и $x \in (0,\infty) = \mathbb{R}^+$ рассматривается система уравнений

$$a\frac{\partial^2 P_1(t,x)}{\partial x^2} = \nu\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t} = \gamma(P_1(t,x) - P_2(t,x)), \tag{3.2}$$

где $a > 0$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$, $\gamma \geqslant 0$.

Ставится задача о нахождении решения системы (3.1)–(3.2), удовлетворяющему условиям

$$u_1(t,0) = \varphi(t), \tag{3.3}$$

$$\lim_{x\to\infty}|u_1(t,x)| = \lim_{x\to\infty}|u_2(t,x)| = 0, \tag{3.4}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}}|u_1(t,x)| < \infty, \qquad \sup_{t\in\mathbb{R}}|u_2(t,x)| < \infty. \tag{3.5}$$

Условия (3.5) относят эту задачу к классу задач без начальных условий (см. [2], с. 59, [6], с. 238).

Для задачи (3.1)–(3.5) указывается явный вид точного решения, в случае когда $\varphi(t)$ периодическая функция и, как следствие, выписывается и градиент $q(t) = G\varphi(t)$. В [8] доказывается

Теорема 3.1. Если в условии (3.3) функция $\varphi(t)$ периодическая с периодом T и рядом Фурье

$$\varphi(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2\pi n}{T} + b_n\sin\frac{2\pi n}{T}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left[\frac{2\pi n}{T}(t - \delta_n^0)\right], \tag{3.6}$$

где

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \qquad \delta_n^0 = \frac{T}{2\pi n}\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{b_n}{a_n}\right),$$

то существует решение задачи (3.1)–(3.5), периодическое при каждом $x \in \mathbb{R}^+$ и оно имеет вид

$$u(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\frac{(\rho_n+\alpha_n)}{2}}x} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{(\rho_n - \alpha_n)}{2}}x - \omega_n t + \delta_n^0\right], \tag{3.7}$$

где $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$,

$$\rho_n = \frac{\omega_n}{a}\sqrt{\frac{\gamma^2 + \omega_n^2\nu^2}{\omega_n^2 + \gamma_2}}, \qquad \alpha_n = \frac{\omega_n^2(1-\nu)\gamma}{a(\gamma^2 + \omega_n^2)}. \tag{3.8}$$

Из представления (3.7) следует выражение для градиента

$$G\varphi(t) = \left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right|_{x=0} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n\sqrt{\rho_n}\cos(\Theta_n - \omega_n t), \tag{3.9}$$

где $\Theta_n = \arccos\sqrt{\frac{\rho_n+\alpha_n}{2\rho_n}}$.

4. ЗАДАЧИ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ

Естественно, по аналогии с рассмотренной задачей без начальных условий для модели фильтрации, рассмотреть уточненную задачу и сравнить решения этих задач.

Для решения уточненной задачи введем функцию

$$h(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\rho_1(\xi)}}. \tag{4.1}$$

Тогда уравнение (2.2) запишется в виде

$$\mathbb{D}_h^2 P_1(t,x) = \nu\frac{\partial P_1(t,x)}{\partial t} + (1-\nu)\frac{\partial P_2(t,x)}{\partial t}, \tag{4.2}$$

где

$$\mathbb{D}_h P_1(t,x) = \frac{\partial P_1(t,x)}{\partial h(x)}. \tag{4.3}$$

Делая замену $h(x) = s$, введем функции

$$v_1(t,s) = P_1(t,h^{-1}(s)), \qquad v_2(t,s) = P_2(t,h^{-1}(s)). \tag{4.4}$$

Для таких функций система (1.9)–(1.10) запишется в виде

$$a\frac{\partial^2 v_1(t,s)}{\partial s^2} = \nu\frac{\partial v_1(t,s)}{\partial t} + (1-\nu)\frac{\partial v_2(t,s)}{\partial t}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial v_2(t,s)}{\partial t} = \gamma[v_2(t,s) - v_1(t,s)] \tag{4.6}$$

с исходными данными

$$v_1(t,0) = \varphi(t), \quad t \in (-\infty,\infty), \tag{4.7}$$

$$|v_1(t,\infty)| < \infty, \quad |v_2(t,\infty)| < \infty. \tag{4.8}$$

То есть для $v_1(t,s)$ и $v_1(t,s)$ получена ранее исследуемая задача без начальных условий для уравнения решение которого в силу (3.7) имеют вид

$$v_1(t,s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\frac{(\rho_n+\alpha_n)}{2}}s} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{(\rho_n-\alpha_n)}{2}}s - \omega_n t + \delta_n^0\right], \tag{4.9}$$

$$v_2(t,s) = \gamma \int_{-\infty}^{t} e^{\gamma(\xi-t)} v_1(\xi,s) d\xi, \tag{4.10}$$

где $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$.

Теперь, возвращаясь к переменной x, получаем представление решения задачи без начальных условий, для уточненной системы Голубева

$$u_1(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\sqrt{\frac{(\rho_n+\alpha_n)}{2}}h(x)} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{(\rho_n-\alpha_n)}{2}}h(x) - \omega_n t + \delta_n^0\right], \tag{4.11}$$

$$u_2(t,x) = \gamma \int_{-\infty}^{t} e^{\gamma(\xi-t)} u_1(\xi,x) d\xi. \tag{4.12}$$

5. ПРИМЕРЫ

1. Пусть $x \geqslant 0$, $\rho_1(x) = (1+x)^{2\Theta}$, $0 \leqslant \Theta < 1$, тогда в (4.11) $h(x) = \frac{1}{1-\Theta}[(1+x)^{1-\Theta} - 1]$.
2. Если $\Theta = 1$, то $h(x) = \ln(1+x)$,

$$u_1(t,x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1+x)^{-\sqrt{\frac{(\rho_n+\alpha_n)}{2}}} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{(\rho_n-\alpha_n)}{2}}\ln(1+x) - \omega_n t + \delta_n^0\right].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабенко, Ю. И. Тепломассообмен, методы расчета тепловых и диффузионных потоков / Ю. И. Бабенко. — Л. : Химия, 1986.— 144 с.

2. Бабенко, Ю. И. Методы дробного интегродифференцирования в прикладных задачах теории тепломассообмена / Ю. И. Бабенко. — СПБ. : НПО "Профессионал", 2009. — 584 с.

3. Голубев, В. С. Уравнение движения жидкости в пористой среде с застойными зонами / В. С. Голубев// ДАН СССР. — 1978. — Т. 238, № 6. — С. 1318–1320.

4. Голубев, В. С. Динамика геотехнологических процессов / В. С. Голубев, Г. Н. Кричевец. — М. : Недра, 1989. — 120 с.

5. Голубев, В. С. Динамика геохимических процессов / В. С. Голубев. — М. : Недра, 1981.

6. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1966. — 724 с.

7. Костин, В. А. Об одной модели процесса нестационарной фильтрации в пористой среде / В. А. Костин, А. В. Костин // Насосы. Турбины. Системы. — 2017. — № 4 (25). — С. 65–69.

8. Костин, В. А. О решении задачи без начальных условий для системы уравненийописывающих динамику некоторых процессов тепломассопереноса / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. К. Фахад // Вопросы науки. — 2016. — Т. 1. — С. 53–57.

9. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

10. Баев, А. Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

REFERENCES

1. Babenko Yu.I. Heat and mass transfer, methods for calculating thermal and diffusive flows. [Babenko Yu.I. Teplomassoobmen, metody rascheta teplovyh i diffuzionnyh potokov]. Leningrad: Chemistry, 1986, 144 p.

2. Babenko Yu.I. The methods of fractional integro-differentiation in The theory of heat and mass transfer. [Babenko Yu.I. Metody drobnogo integrodifferencirovanija v prikladnyh zadachah teorii teplomassoobmena]. SPB, 2009, 584 p.

3. Golubev V.S. The equation of motion of a liquid in a porous medium with a stagnant zones. [Golubev V.S. Uravnenie dvizhenija zhidkosti v poristoj srede s zastojnymi zonami]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Doklady Mathematics of the USSR*, 1978, vol. 238, no. 6, pp. 1318–1320.

4. Golubev V.S., Krichevets G.N. Dynamics of geotechnological processes. [Golubev V.S., Krichevets G.N. Dinamika geotehnologicheskih processov]. Moscow, 1989, 120 p.

5. Golubev V.S. Dynamics of geochemical processes. [Golubev V.S. Dinamika geohimicheskih processov]. Moscow, 1981.

6. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics. [Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Uravnenija matematicheskoj fiziki]. Moscow: Nauka, 1966, 724 p.

7. Kostin V.A., Kostin A.V. On one model of the process of a nonstationary filter in a porous medium. [Kostin V.A., Kostin A.V. Ob odnoj modeli processa nestacionarnoj fil'tracii v poristoj srede]. *Pumps. Turbines. Systems — Насосы. Турбины. Системы*, 2017, no. 4 (25), pp. 65–69.

8. Kostin V.A., Kostin A.V., Fahad D.K. On solving a problem without initial conditions for a system of equations describing the dynamics of certain processes. [Kostin V.A., Kostin A.V., Fahad D.K. O reshenii zadachi bez nachal'nyh uslovij dlja sistemy uravnenijopisyvajushhih dinamiku nekotoryh processov teplomassoperenosa]. *Questions of science — Вопросы науки*, 2016, vol. 1, pp. 53–57.

9. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 162–172.

10. Baev A.D., Buneev S.S. An A Priori Estimate For Solutions Of A Boundary Value Problem In The Strip For Degenerate Elliptic Equations Of Higher Order. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 81–92.

Костин Алексей Владимирович, к.ф.–м.н., доцент кафедры математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: leshakostin@mail.ru

Kostin Aleksej Vladimirovich, Associate Professor of the Department of mathematical modeling, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: leshakostin@mail.ru

Муковнин Михаил Вячеславович, аспирант кафедры математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mikhailmukovnin@gmail.com

Mukovnin Mikhail Vjacheslavovich, graduate student, Department of Mathematical Modeling, Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mikhailmukovnin@gmail.com