УДК 517.983

О «ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОСТИ» КОЭФФИЦИЕНТОВ КВАДРАТИЧНОГО ПУЧКА

М. Ю. Глазкова, Л. И. Сухочева

Воронежский государственный технический университет

Поступила в редакцию 11.01.2018 г.

Аннотация. Известно, что не каждую пару A, C самосопряженных матриц можно одновременно привести к диагональному виду, т. е. найти базис, в котором одновременно формы (Ax, x) и (Cx, x) имеют канонический вид. В работе вводится понятие одновременной приводимости двух операторов к «диагональной форме» и обсуждаются условия, когда самосопряженные операторы, действующие в бесконечномерном гильбертовом пространстве, обладают указанным свойством.

Рассматривается квадратичный операторный пучок:

$$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda C + B,$$

и приводятся достаточные условия «диагонализируемости» его коэффициентов.

В формулировке результатов и их доказательстве используется традиционная терминология теории операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой — пространствах Понтрягина, пространствах Крейна.

Ключевые слова: коммутируемость, равномерно дефинитные инвариантные подпространства, пространство Крейна, пространство Понтрягина, квадратичный пучок.

ON THE «DIAGONALIZABILITY» OF COEFFICIENTS QUADRATIC PENCIL

M. Yu. Glazkova, L. I. Suhocheva

Abstract. It is known that not every pair A, C of self-adjoint matrices can be simultaneously reduced to a diagonal form, i.e. find a basis in which at the same time the forms (Ax, x) and (Cx, x) have a canonical form. The notion of the simultaneous reducibility of two operators to «diagonal form» is introduced and conditions when operators acting in an infinite-dimensional Hilbert space have this property are discussed.

A quadratic operator pencil:

$$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda C + B,$$

is considered.

Sufficient conditions for the «diagonalizability» of the operator coefficients of this pencil are given.

In the statement of results and their proof we use the traditional terminology of the theory of operators acting in spaces with an indefinite metric — Pontryagin spaces, Krein spaces.

Keywords: commutability, uniformly definite invariant subspaces, Krein space, Pontryagin space, quadratic pencil.

В работе С. Г. Крейна [1] рассматривается вопрос о движениях тяжелой вязкой несжимаемой жидкости в открытом сосуде, близких к положению равновесия. Задача нахождения собственных чисел сводится к решению уравнения

$$\nu\xi = \lambda A\xi + \frac{1}{\lambda}C\xi,$$

где ξ — вектор, A и C самосопряженные вполне непрерывные операторы конечного порядка в гильбертовом пространстве H, ν — коэффициент кинематической вязкости. Более того, оператор A положителен, оператор C неотрицателен.

В работе было показано, что спектр этого пучка состоит из не более, чем счетного множества собственных значений конечной алгебраической кратности, расположенных в правой полуплоскости.

Оператор-функцию вида

$$L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} C - I,$$

заданную на $\mathbb{C}$, принято называть пучком С. Крейна.

Обобщением пучка С. Крейна на случай конвективных движений нагреваемой жидкости в частично заполненном сосуде [2] является квадратичный операторный пучок

$$L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} C + (\varepsilon Q - I),$$

где операторы его определяющие действуют в бесконечномерном гильбертовом пространстве H и удовлетворяют следующим условиям: A, C, Q — вполне непрерывные операторы и A — положительный, C — неотрицательный, Q — самосопряженный операторы, ε — положительный параметр. Более того оператор $\varepsilon Q - I$ имеет в правой полуплоскости конечное число κ собственных значений с учетом кратности.

Если $\varepsilon \leqslant 1/||Q||$, то все собственные значения пучка L лежат в правой полуплоскости. При $\varepsilon > 1/||Q||$ не исключена возможность появления собственных значений пучка и в открытой левой полуплоскости. Оказывается, что в этих условиях количество собственных значений пучка L в левой полуплоскости не пусто, но не более конечного числа.

В [3] рассматривается модельный матричный пучок

$$L(\lambda) = \lambda A + \frac{1}{\lambda} C - J_\kappa, \tag{1}$$

где A, C и J_κ — эрмитовы матрицы в $H = \mathbb{C}^n$, $J_\kappa = diag(I_{n-\kappa}, -I_\kappa)$ и при некоторых дополнительных условиях на матричные коэффициенты A, C приводятся достаточные условия при которых 2κ собственных значений пучка L лежат в открытой левой полуплоскости и $2(n-\kappa)$ — в открытой правой.

Рассмотрим матричный пучок (1). Если A, C — положительные диагональные матрицы, J_κ — как указано выше, то пучок L имеет 2κ собственных значения в открытой левой полуплоскости и $2(n-\kappa)$ — в открытой правой.

Действительно, задача нахождения собственных значений пучка сводится к отысканию корней уравнения $\det L(\lambda) = 0$. Раскрывая этот определитель, придем к системе n уравнений относительно λ:

$$\lambda a_{ii} + \frac{1}{\lambda} c_{ii} - 1 = 0, \ i = 1,2,...,n-\kappa,$$

$$\lambda a_{ii} + \frac{1}{\lambda} c_{ii} + 1 = 0, \ i = n-\kappa+1,...,n.$$

Ее решениями будут:

$$\lambda_i = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4a_{ii}c_{ii}}}{2a_{ii}}, \ \ i = 1,2,...,n-\kappa,$$

$$\lambda_i = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4a_{ii}c_{ii}}}{2a_{ii}}, \ \ i = n-\kappa+1,...,n.$$

Так как $a_{ii} > 0$, $c_{ii} > 0$ при $i = 1, 2, ..., n$, то $Re\lambda_i > 0$ при $i = 1,2,...,n-\kappa$ и $Re\lambda_i < 0$ при $i = n-\kappa+1,...,n$.

Таким образом, пучок (1) в рассматриваемых условиях имеет 2κ собственных значения в открытой левой полуплоскости и $2(n-\kappa)$ — в открытой правой.

Как известно, каждый линейный оператор, действующий в конечномерном пространстве представляется в заданном базисе в виде матрицы. Однако, не каждую пару A, C самосопряженных матриц можно одновременно привести к «диагональному виду», т. е. найти базис в котором одновременно формы (Ax,x) и (Cx,x) имеют канонический вид. Если одна из матриц (например, C) невырождена, то это можно сделать тогда и только тогда, когда выполнены следующие эквивалентные условия:

а) матрица $C^{-1}A$ подобна самосопряженной;

б) существует такая положительная матрица S, что матрицы $S^{-1}A$ и $S^{-1}C$ коммутируют.

Указанные условия имеют место, если, например, A — положительная матрица.

Эти результаты могут быть обобщены на бесконечномерный случай. Далее используется терминология и свойства операторов, действующих в пространствах с индефинитной метрикой (см., например, [4]).

Теорема 1. Пусть A, C — непрерывные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, C — непрерывно обратим и порождает C–метрику $[x,y]=(Cx,y)$. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) оператор $C^{-1}A$ подобен самосопряженному;

б) оператор $C^{-1}A$ имеет максимальное равномерно C-положительное N_+ и равномерное C-отрицательное N_- инвариантные подпространства C-ортогональные друг другу и потому $H=N_+[+]N_-$;

с) существует такой равномерно положительный непрерывный оператор S, что операторы $S^{-1}A$ и $S^{-1}C$ коммутируют. (При этом в качестве оператора S можно взять такой оператор, что $S=CJ$, где $J=P_+-P_-$ разность C-ортогональных проекторов на N_+ и N_- соответственно).

Сразу заметим, что $\{H,[.,.]\}$ — пространство Крейна [4]. Покажем эквивалентность условий а) и б).

Пусть оператор $C^{-1}A$ подобен самосопряженному, т. е. существует в H такой непрерывный и непрерывно обратимый оператор V, что $C^{-1}A=V^{-1}UV$, где U — некоторый самосопряженный оператор.

Рассмотрим преобразование Кели-Неймана при $\lambda\neq\bar{\lambda}, \lambda\in\rho(C^{-1}A)$, где $\rho(C^{-1}A)$ — множество регулярных точек оператора $C^{-1}A$:

$$W=K_\lambda(C^{-1}A)=(C^{-1}A-\bar{\lambda}I)(C^{-1}A-\lambda I)^{-1}=$$
$$=(V^{-1}UV-\bar{\lambda}I)(V^{-1}UV-\lambda I)^{-1}=V^{-1}K_\lambda(U)V.$$

Следовательно, по Следствию II.6.15. [4] операторы W и $K_\lambda(U)$ являются C–унитарным и унитарным соответственно. Поскольку они подобны, то оператор W устойчив, т. е. $\sup_{n\in Z}||W^n||<\infty$. Поэтому в силу теоремы Филлипса [5] (см. [4] Следствие II.5.20, Теорема I.10.2.) этот оператор обладает инвариантной дуальной парой максимальных равномерно дефинитных подпространств $\{N_+,N_-\}$, где N_+ — максимальное равномерно C-положительное подпространство, N_- — максимальное равномерно C-отрицательное подпространство и они C-ортогональны друг другу, а потому $H=N_+[+]N_-$. Относительно этого разложения пространства H оператор W представим в виде:

$$W=\begin{pmatrix} W_+ & 0\\ 0 & W_-\end{pmatrix},$$

где $W_\pm$ — C-унитарные операторы. Применим к оператору W обратное преобразование Кели-Неймана:

$$C^{-1}A=K_\lambda^{-1}(W)=\begin{pmatrix} K_\lambda^{-1}(W_+) & 0\\ 0 & K_\lambda^{-1}(W_-)\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} C^{-1}(A_+) & 0 \\ 0 & C^{-1}(A_-) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $C^{-1}AN_\pm \subset N_\pm$, т. е. выполняется условие б).

Обратно, пусть выполнено условие б), т. е. существуют максимальное равномерно C-положительное N_+ и равномерное C-отрицательное N_- инвариантные подпространства оператора $C^{-1}A$ C-ортогональные друг другу.

Введем в H новое скалярное произведение:

$$\langle x, y\rangle = [x_+, y_+] - [x_-, y_-],$$

где $x = x_+ + x_-$, $y = y_+ + y_-$, $x_\pm$, $y_\pm \in N_\pm$.

Согласно теореме Рисса [6] существует такой непрерывный равномерно положительный оператор S, что $\langle x, y\rangle = (Sx, y)$. Покажем, что $C^{-1}A$ является S-самосопряженным оператором.

В самом деле,

$$\left\langle C^{-1}Ax, y\right\rangle = [C^{-1}Ax_+, y_+] - [C^{-1}Ax_-, y_-] =$$

$$[x_+, C^{-1}Ay_+] - [x_-, C^{-1}Ay_-] = \left\langle x, C^{-1}Ay\right\rangle.$$

Тогда $C^{-1}A = S^{-1}(C^{-1}A)^*S = S^{-1/2}(S^{-1/2}(C^{-1}A)^*S^{1/2})S^{1/2}$.

Так как

$$(S^{-1/2}(C^{-1}A)^*S^{1/2})^* = S^{1/2}(C^{-1}A)^*S^{-1/2} =$$

$$= S^{1/2}S^{-1}(C^{-1}A)^*SS^{-1/2} = S^{-1/2}(C^{-1}A)^*S^{1/2}$$

— самосопряженный оператор, и оператор $C^{-1}A$ подобен ему, то импликация б)$\rightarrow$а) доказана.

Пусть выполняется условие б). В силу выше изложенного для $J = P_+ - P_-$, где $P_\pm$ — ортопроекторы на $N_\pm$ имеем:

$$(CJx, y) = [Jx, y] = [(P_+ - P_-)x, y] =$$

$$= [P_+x, y] - [P_-x, y] = [x_+, y_+] - [x_-, y_-] = \langle x, y\rangle = (Sx, y).$$

Следовательно, $S = CJ$. Так как по построению оператор $C^{-1}A$ коммутирует с J, то $S^{-1}C \cdot S^{-1}A = S^{-1}C \cdot S^{-1}C \cdot C^{-1}A = S^{-1}C \cdot C^{-1}A \cdot S^{-1}C = S^{-1}A \cdot S^{-1}C$, т. е. операторы $S^{-1}A$ и $S^{-1}C$ коммутируют и имеет место условие с).

Пусть существует такой равномерно положительный непрерывный оператор S, что операторы $S^{-1}A$ и $S^{-1}C$ коммутируют. По ранее изложенному, оператор $C^{-1}A$ будет S-самосопряженным и подобным самосопряженному оператору $S^{-1/2}(C^{-1}A)^*S^{1/2}$, т. е. выполняется условие а).

Теорема доказана.

Будем говорить, что операторы A и C могут быть одновременно приведены к диагональной форме или «диагонализированы», если они удовлетворяют условиям а) – с) Теоремы 1.

Приведем пример операторного пучка, для коэффициентов которого выполняются условия Теоремы 1.

Рассмотрим квадратичный операторный пучок

$$L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda C + B \tag{2}$$

Пусть непрерывные самосопряженные операторы A,B и C действуют в бесконечномерном гильбертовом пространстве H и обладают свойствами:

A — положительный оператор;

$$C \text{ —непрерывно обратимый оператор и } C = C_1 + C_2; \tag{3}$$

C_1 — равномерно положительный оператор;

C_2 — вполне непрерывный оператор.

Покажем, что имеет место условие б) Теоремы 1. Так как оператор C_1 — равномерно положительный, а C_2 - вполне непрерывный, то оператор $C = C_1 + C_2$ может иметь разве лишь положительные точки сгущения спектра ([7], Теорема I.5.2.). Следовательно, число κ отрицательных собственных значений (с учетом кратности) оператора C не более, чем конечно. Поэтому пространство $\{H, [x, y] = (Cx, y)\}$ является пространством Понтрягина Π_κ с κ отрицательными квадратами [4] (Определение I.9.1, Следствие I.9.16).

Отметим, что оператор $C^{-1}A$ будет C-положительным: $[C^{-1}Ax, y] = (Ax, y) > 0$ $(x \neq 0)$. Согласно теореме Понтрягина [8], существует κ–мерное, а потому максимальное неположительное подпространство N_- инвариантное относительно оператора $C^{-1}A$. Более того, это подпространство отрицательно.

В самом деле, если бы оно содержало хотя бы один изотропный вектор x_0, то $[C^{-1}Ax_0, x_0] = 0$ при $x_0 \neq 0$, что противоречит C-положительности оператора $C^{-1}A$. Следовательно, N_-отрицательное κ–мерное инвариантное относительно $C^{-1}A$ подпространство. Тогда $N_+ = N_-^{[\perp]}$ инвариантно относительно $C^{-1}A$ и положительно. Так как в пространстве Понтрягина дефинитные подпространства являются равномерно дефинитными [4], то N_+ максимальное равномерно C–положительное, а N_- максимальное равномерно C–отрицательное подпространство, C–ортогональные друг другу и $H = N_+[+]N_-$. Таким образом, имеет место условие б) Теоремы 1., а значит и условия а) и с). Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $L(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda C + B$, и выполняются условия (3), тогда для операторных коэффициентов A и C пучка (2) выполняются условия а) – с) Теоремы 1.

Следует заметить, что указанное свойство «диагонализируемости» коэффициентов операторного пучка оказывается весьма существенным при исследовании структуры спектра пучка (2) (см. [9]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крейн, С. Г. О колебаниях вязкой жидкости в сосуде / С. Г. Крейн // Доклады Академии наук СССР. — 1964. — Т. 159, № 2. — С. 262–265.

2. Копачевский, Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М. : Нука, 1989. — 416 с.

3. Сухочева, Л. И. О некоторых спектральных свойствах квадратичного самосопряженного пучка матриц с доминирующими главными диагоналями / Л. И. Сухочева // Матем. заметки. — 1997. — Т. 61, № 3. — С. 381–390.

4. Азизов, Т. Я. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / Т. Я. Азизов, И. С. Иохвидов. — М. : Наука, 1986. — 352 с.

5. Fhillips, R. The Extension of Dual Subspaces Invariant Under an Algebra / R. Fhillips // Proc. Intern. Symp.: Linear space. Jerusalem, 1960, Jerusalem press. — 1961. — P. 366–398.

6. Ахиезер, Н. И. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве / Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. — М. : Наука, 1966. — 544 с.

7. Гохберг, И. Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов / И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. — М. : Наука, 1965. — 448 с.

8. Понтрягин, Л. С. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой / Л. С. Понтрягин // Из. АН СССР. Серия математика. — 1944. — Т. 8, № 6. — С. 243–280.

9. Сухочева, Л. И. Алгебраические и спектральные свойства самосопряжённых операторов в пространствах с индефинитной метрикой : Автореф. дис. кан. физ-мат. наук. — Воронеж, 1995. — 15 с.

10. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

11. Баев, А. Д. Априорная оценка решений одной краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / А. Д. Баев, С. С. Бунеев // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 81–92.

REFERENCES

1. Krein S.G. Oscillations of a viscous fluid in a container. [Kreyjn S.G. O kolebaniyax vyazkoyj zhidkosti v sosude]. *Doklady Akademii nauk SSSR – Doklady Mathematics of the USSR*, 1964, vol. 159, no. 2, pp. 262–265.

2. Kopachevsky N.D., Krein S.G., Kan Ngo Zui. Operator methods in linear hydrodynamics: Evolutionary and spectral problems. [Kopachevsky N.D., Krein S.G., Kan Ngo Zui. Operatornye metody v lineyjnoyj gidrodinamike: Evolyucionnye i spektral'nye zadachi]. Moscow, 1989, 416 p.

3. Suhocheva L.I. On some spectral properties of a quadratic self-adjoint matrix pencil with dominant main diagonals. [Suxocheva L.I. O nekotoryx spektral'nyx svoyjstvax kvadratichnogo samosopryazhennogo puchka matric s dominiruyushhimi glavnymi diagonalyami]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1997, vol. 61, no. 3, pp. 381–390.

4. Azizov T.Ya., Iokhvidov I.S. Linear operators in spaces with an indefinite metric. [Azizov T.Ya., Iokhvidov I.S. Osnovy teorii lineyjnyx operatorov v prostranstvax s indefinitnoyj metrikoyj]. Moscow, 1986, 352 p.

5. Fhillips R. The Extension of Dual Subspaces Invariant Under an Algebra. Proc. Intern. Symp.: Linear space. Jerusalem, 1960, Jerusalem press, 1961, pp. 366–398.

6. Akhiezer N.I., Glazman I.M. The theory of linear operators in a Hilbert space. [Axiezer N.I., Glazman I.M. Teoriya lineyjnyx operatorov v gil'bertovom prostranstve]. Moscow, 1966, 544 p.

7. Gokhberg I.Ts., Krein M.G. Introduction to the theory of linear non-self-adjoint operators. [Gokhberg I.Ts., Krein M.G. Vvedenie v teoriyu lineyjnyx nesamosopryazhennyx operatorov]. Moscow, 1965, 448 p.

8. Pontryagin L.S. Hermitian operators in a space with indefinite metric. [Pontryagin L.S. Ermitovy operatory v prostranstve s indefinitnoyj metrikoyj]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematika – Izvestiya Academii nayk USSR. Math series*, 1944, vol. 8, no. 6, pp. 243–280.

9. Suhocheva L.I. Algebraic and spectral properties of self-adjoint operators in spaces with an indefinite metric. [Suxocheva L.I. Algebraicheskie i spektral'nye svoyjstva samosopryazhyonnyx operatorov v prostranstvax s indefinitnoyj metrikoyj]. Avtoref. dis. Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh: 1995, 15 p.

10. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 162–172.

11. Baev A.D., Buneev S.S. An A Priori Estimate For Solutions Of A Boundary Value Problem In The Strip For Degenerate Elliptic Equations Of Higher Order. [Baev A.D., Buneev S.S. Apriornaya ocenka resheniyj odnoyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika – Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 81–92.

Глазкова Мария Юрьевна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и механики Воронежского государственного технического университета, Воронеж, Россия
E-mail: glazkovam@yandex.ru

Glazkova Mariya Yurievna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor of Applied Mathematics and Mechanics Department, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
E-mail: glazkovam@yandex.ru

Сухочева Людмила Ивановна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры прикладной математики и механики Воронежского государственного технического университета, Воронеж, Россия
E-mail: l.suhocheva@yandex.ru

Suhocheva Ludmila Ivanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Researcher, Associate Professor of Applied Mathematics and Mechanics Department, Voronezh State Technical University, Voronezh, Russia
E-mail: l.suhocheva@yandex.ru