УДК 517.927

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет

Поступила в редакцию 19.12.2017 г.

Аннотация. Обозначим через C пространство $C[0,1]$, через L_p $(1 < p < \infty)$ — пространство $L_p(0,1)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

Рассматривается краевая задача

$$x''(t) + f(t,(Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{2}$$

где $T : C \to L_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1] \times [0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Под положительным решением задачи (1)–(2) будем понимать функцию $x \in W^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

В работе на основе теории полуупорядоченных пространств с помощью специальных топологических средств получены достаточные условия существования и единственности положительного решения для краевой задачи (1)–(2).

Ключевые слова: Конус, полуупорядоченность, оператор, топология, индекс оператора, положительное решение, краевая задача.

ON THE EXISTENCE AND UNIQUENESS OF THE POSITIVE SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE STURM–LIOUVILLE TYPE FOR A SECOND-ORDER NONLINEAR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATION

G. E. Abduragimov

Abstract. Let's denote space $C[0,1]$ through C, space $L_p(0,1)$ through L_p $(1 < p < \infty)$ and space of functions, determined on $[0,1]$ with absolute uninterrupted derivative through W^2.

Boundary value

$$x''(t) + f(t,(Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{2}$$

is being examined, where $T : C \to L_p$ $(1 < p < \infty)$ is the linear continuous operator, the function $f(t,u)$ is non–negative on $[0,1] \times [0,\infty)$, and monotonically increases in the second argument, satisfying the Caratheodory condition and $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Under the positive solution of the problem (1)–(2) we shall consider the function $x \in W^2$, positive in the interval $(0, 1)$, satisfying almost everywhere the equation (1) and boundary conditions (2).

On the basis of the theory of partially ordered spaces by means of special topological means the sufficient conditions of solving the boundary value problem (1)–(2) are received in this article.

Keywords: Cone, semi regulation, operator, topology, carrier index, positive solution, boundary value problem.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам исследования существования и единственности положительных решений для нелинейных функционально-дифференциальных уравнений посвящено достаточно большое количество работ, например [1]–[11]. Практически во всех вышеупомянутых работах естественным орудием исследования положительных решений являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М. Г. Крейна, Л. В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. В последующем методы исследования положительных решений нелинейных операторных уравнений были развиты М. А. Красносельским и его учениками Л. А. Ладыженским, И. А. Бахтиным, В. Я. Стеценко, Ю. В. Покорным и др.

В данной работе на основе теории полуупорядоченных пространств с помощью специальных топологических средств [12], получены достаточные условия существования положительного решения для одного нелинейного функционально–дифференциального уравнения второго порядка, а единственность такого решения устанавливается с применением принципа единственности для выпуклых операторов [13, с. 220].

Полученные в настоящей статье результаты являются продолжением исследований автора, раннее опубликованные в работе [14].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Обозначим через C пространство $C[0,1]$, через L_p $(1 < p < \infty)$ — пространство $L_p(0,1)$ и через W^2 — пространство функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + f(t,(Tx)(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \tag{2}$$

где $T : C \to L_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1] \times [0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу, удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Под положительным решением задачи (1)–(2) будем понимать функцию $x \in W^2$, положительную в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(2) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,(Tx)(s))ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{3}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (2) и имеющая вид

$$G(t,s) = \begin{cases} t(1-s),\ 0 \leqslant t \leqslant s; \\ s(1-t),\ s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases} \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что функция Грина (4) удовлетворяет неравенствам

$$\varphi(t)\varphi(s) \leqslant G(t,s) \leqslant \frac{1}{4} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant 1), \tag{5}$$

где $\varphi(t) = \min(t,1-t)$.

Предположим, что функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1] \times [0,\infty)$, монотонно возрастает по второму аргументу и $f(t,u) \leqslant bu^{p/q}$ $(b > 0)$ при $u > 0$.

В операторной форме уравнение (3) можно переписать в виде

$$x = GNTx,$$

где $N : L_p \to L_q$ — оператор Немыцкого, $G : L_q \to C$ — оператор Грина.

Оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)f(s,(Tx)(s))ds, \quad 0 < t < 1, \tag{6}$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций и вполне непрерывен ([15], с. 161).

Обозначим через $\widetilde{K}$ конус неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$x(t) \geqslant \|x\|_C\, \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Легко видеть, что конус $\widetilde{K}$ телесен и нормален ([13, с. 14]).

Теорема 1. Предположим, что $T : C \to L_p$ — линейный положительный (монотонный) на конусе $\widetilde{K}$ оператор. Пусть отрезок $[0,1]$ не является промежутком осцилляции оператора $Lx \equiv -x'' - f'_u(t,T0)Tx$, т. е. любое нетривиальное решение уравнения $Lx = 0$ имеет на отрезке $[0,1]$ не более одного нуля (с учетом кратностей) и выполнены условия

1) $p > q$;

2) $f(t,u) \leqslant a_1(t) + b_1u^{p/q}$, $t \in [0,\ 1]$, $u \geqslant 0$, где $a_1(t) \in L_q$;

3) пусть для некоторого множества $\Omega_0 \subset [0,1]$

$$f(t.u) \geqslant \psi(u), \quad t \in \Omega_0, \quad u \geqslant 0,$$

где $\psi(u)$ — такая неубывающая неотрицательная функция, что $\alpha = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{u} > 0$;

4) $f'_u(t,u) \leqslant a_2(t) + b_2u^{\frac{p}{q}-1}$, $t \in [0,\ 1]$, $u \geqslant 0$, где $a_2(t) \in L_{\frac{pq}{p-q}}$;

5) $\alpha \int\limits_{\Omega_0} \varphi(s)(T\varphi)(s)ds > 1$.

Тогда краевая задача (1)–(2) имеет по крайней мере одно положительное решение.

Доказательство. Любая неподвижная точка оператора A является решением уравнения (3) и, следовательно, краевой задачи (1)–(2).

Предположим, что оператор A не имеет в $\widetilde{K}$ неподвижных точек. Теорема 1 будет доказана, если покажем, что оператор A является обобщенным растяжением конуса $\widetilde{K}$, т. е. индексы ([12]) нуля $\gamma(A,0)$ и бесконечности $\gamma(A,\infty)$ относительно конуса $\widetilde{K}$ равны соответственно единице и нулю.

В условиях теоремы 1 оператор A дифференцируем по Фреше в нуле ([15], с. 312), причем его производная

$$A'(0)x(t) = \int_0^1 G(t,s)f'_u(s,(T0)(s))(Tx)(s)ds, \quad 0 < t < 1$$

является положительным на конусе $\widetilde{K}$ вполне непрерывным оператором. Для доказательства равенства $\gamma(A,0) = 1$ покажем, что спектральный радиус оператора $A'(0)$ меньше единицы.

В предположении противного в силу теоремы Крейна–Рутмана ([16]) существует ненулевая функция $x_0(t) \in \widetilde{K}$, для которой $A'(0)x_0 = \lambda_0 x_0$ при $\lambda_0 > 1$. Это значит, что $x_0(t)$ удовлетворяет краевым условиям (2) и равенству

$$\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} Lx_0(t) = f'_u(t,(T0)(t))(Tx_0)(t), \quad 0 < t < 1, \tag{7}$$

причем $\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} < 0$. С другой стороны, из неосцилляции оператора L на $[0,1]$ следует, что оператор L^{-1}, обратный к L при краевых условиях (2), имеет ядро (функцию Грина), обладающее аналогичным (5) свойством. Поэтому оператор $Dy \equiv L^{-1}\left[f'_u(t,T0)Ty\right]$ должен быть положительным на конусе $\widetilde{K}$. А это противоречит равенству (7), поскольку из него следует, что $Dx_0 = \frac{\lambda_0}{1-\lambda_0} x_0 \in -\widetilde{K}$, несмотря на то, что $x_0 \in \widetilde{K}$.

Покажем теперь, что для любой неотрицательной функции $x(t) \in C$ выполняется неравенство

$$Ax(t) \geqslant \|Ax\|_C \, \varphi(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{8}$$

Действительно, в силу (5) и свойств функции Грина (4)

$$\|Ax\|_C \, \varphi(t) = \varphi(t) \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)f(s,(Tx)(s))ds = \varphi(t) \int_0^1 \left(\max_{t\in[0,1]} G(t,s)\right) f(s,(Tx)(s))ds \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(t) \int_0^1 \varphi(s)f(s,(Tx)(s))ds \leqslant \int_0^1 G(t,s)f(s,(Tx)(s))ds = Ax(t).$$

Доказанное свойство (8) означает, что $A\widetilde{K} \subset \widetilde{K}$, причем индекс $\gamma(A,0)$ оператора A в нуле относительно конуса $\widetilde{K}$ равен единице.

Теорема 1 будет доказана, если мы покажем, что индекс $\gamma(A,\infty)$ оператора A на бесконечности относительно конуса $\widetilde{K}$ равен нулю. Равенство $\gamma(A,\infty) = 0$ означает ([12]), что оператор A на сферах большого радиуса положительно гомотопен оператору $A_0 x = 2\|x\|_C h_0$ при некотором $h_0 \in \widetilde{K}$ $\quad(\|h_0\|_C = 1)$. При этом два положительных оператора C_1, C_2 называются положительно гомотопными на конусе K, если существует оператор – функция $C(x,\lambda)$, положительная и вполне непрерывная по совокупности переменных на $K \times [\lambda_1,\lambda_2]$ и такая, что $C(x,\lambda_1) = C_1$, $C(x,\lambda_2) = C_2$, $C(x,\lambda) \neq x$ для всех x большой нормы и $\lambda \in [\lambda_1,\lambda_2]$.

На элементах любой нормы из $\widetilde{K}$ оператор $A_1 x = Ax + 2\|x\|_C \frac{\varphi}{\|\varphi\|_C}$ положительно гомопотен оператору $A_0 x = 2\|x\|_C \frac{\varphi}{\|\varphi\|_C}$. Действительно, функция $A(x,\lambda) \equiv \mu Ax + 2\|x\|_C \frac{\varphi}{\|\varphi\|_C}$ устанавливает при $\mu \in [0,1]$ нужную гомотопию, причем $A(x,\lambda) \neq x$ ввиду цепочки импликаций

$$\left[x = \mu Ax + 2\|x\|_C \frac{\varphi}{\|\varphi\|_C}\right] \to \left[x \geqslant 2\|x\|_C \frac{\varphi}{\|\varphi\|_C}\right] \to \left[\|x\|_C \geqslant 2\|x\|_C\right]$$

для любого $x \in \widetilde{K}$ $(\mu \geqslant 0)$.

Покажем теперь, что на элементах большой нормы из $\widetilde{K}$ оператор $A_1x = Ax + 2\left\|x\right\|_C \frac{\varphi}{\|\varphi\|_C}$ положительно гомотопен оператору A, причем гомотопия устанавливается оператор - функцией $A_1(x,\lambda) \equiv Ax + \lambda\left(2\left\|x\right\|_C \frac{\varphi}{\|\varphi\|_C}\right)$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. В предположении противного существует последовательность $x_n \in \widetilde{K}$ такая, что $\|x_n\|_C \to \infty$ и

$$Ax_n + \lambda_n\left(2\left\|x_n\right\|_C\right)\frac{\varphi}{\|\varphi\|_C} = x_n, \tag{9}$$

причем $\lambda_n > 0$ при всех n, ибо в противном случае соответствующее x_n окажется ненулевой неподвижной точкой оператора A. Для каждого n обозначим через λ_n^* наибольшее значение λ в неравенстве $x_n \geqslant \lambda\varphi$. Так как все $x_n \in \widetilde{K}$, то $x_n \geqslant \|x_n\|_C\,\varphi$, т. е. $\lambda_n^* \geqslant \|x_n\|_C$. Поэтому $\lambda_n^* \to \infty$. Докажем, что отсюда при больших n следует неравенство

$$A(\lambda_n^*\varphi) \geqslant \lambda_n^*\varphi. \tag{10}$$

Множество $\Omega_0 \subset [0,1]$ можно считать не содержащим нулей функции $\varphi(t)$. Поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n в силу условия 3 теоремы 1 получим $\psi\left[\lambda_n^*T\varphi)\right] \geqslant (\alpha-\varepsilon)\lambda_n^*T\varphi)$, откуда с учетом (5) следует, что

$$A(\lambda_n^*\varphi(t)) \geqslant \int\limits_{\Omega_0} G(t,s)f(s,T(\lambda_n^*\varphi)(s))ds \geqslant \varphi(t)\int\limits_{\Omega_0}\varphi(s)\psi(T(\lambda_n^*\varphi)(s))ds \geqslant$$

$$\geqslant \left[(\alpha-\varepsilon)\int\limits_{\Omega_0}\varphi(s)(T\varphi)(s)ds\right]\lambda_n^*\varphi(t).$$

А отсюда и из условия 4 теоремы 1 в силу произвольности ε следует справедливость (10) при достаточно больших n.

Теперь из (9), (10) в силу неравенства $x_n \geqslant \lambda_n^*\varphi$ следует цепочка соотношений

$$x_n = Ax_n + \lambda_n\left(2\frac{\|x_n\|_C}{\|\varphi\|_C}\right)\varphi \geqslant A(\lambda_n^*\varphi) + \lambda_n\left(2\frac{\|x_n\|_C}{\|\varphi\|_C}\right)\varphi \geqslant \lambda_n^*\varphi + \lambda_n\left(2\frac{\|x_n\|_C}{\|\varphi\|_C}\right)\varphi,$$

т. е. $x_n \geqslant \left(\lambda_n^* + \lambda_n\frac{2\|x_n\|_C}{\|\varphi\|_C}\right)\varphi$, причем $\lambda_n\frac{2\|x_n\|_C}{\|\varphi\|_C} > 0$. А это противоречит максимальности чисел λ_n^* в неравенствах $x_n \geqslant \lambda\varphi$.

Полученное противоречие окончательно подтверждает справедливость положительной гомотопии между A и A_1 и тем самым между A и A_0. Поэтому $\gamma(A,\infty) = 0$. Теорема 1 полностью доказана.

Найдем теперь достаточные условия единственности положительного решения краевой задачи (1)–(2). Пусть $x(t)$ — положительное решение уравнения (3). В силу условия 3 теоремы 1, с учетом (5), на рассматриваемом конусе $\widetilde{K}$ получим

$$x(t) = \int\limits_0^1 G(t,s)f(s,(Tx)(s))ds \geqslant \varphi(t)\int\limits_0^1\varphi(s)\psi((Tx)(s))ds \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(t)\int\limits_0^1\varphi(s)\psi\left(\|x\|_C\,(T\varphi)(s)\right)ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Переходя в последнем неравенстве к максимуму на отрезке $[0,1]$, получим

$$\max_{t\in[0,1]} x(t) \geqslant \max_{t\in[0,1]}\varphi(t)\int\limits_0^1\varphi(s)\psi\left(\|x\|_C\,(T\varphi)(s)\right)ds$$

$$\|x\|_C \geqslant \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \varphi(s)\psi\left(\|x\|_C (T\varphi)(s)\right)ds.$$

Разрешив последнее неравенство относительно $\|x\|_C$, получим

$$0 < \|x\|_C \leqslant \mathrm{M}. \tag{11}$$

Допустим, что уравнение (3) имеет два положительных решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$. Из принципа единственности для выпуклых операторов следует, что обе разности $x_1(t)-x_2(t)$ и $x_2(t)-x_1(t)$ не являются строго положительными функциями. Без ограничения общности можно считать, что разность $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ обладает следующим свойством: найдутся такие числа t_0 и t_1, что $y(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} y(t) = \|y(t)\|_C$, $y(t_1) < 0$. Отсюда вытекает, что $\|y(t) - l\|_C \geqslant \frac{1}{2}\|y(t)\|_C$ при любом числе l.

Из равенств

$$x_i(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f(s,(Tx_i)(s))ds (i = 1, 2), 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

применяя теорему о среднем, получим

$$y(t) = \int\limits_0^1 G(t,s) f'_u(s,(T\widetilde{x})(s))(Ty)(s)ds, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

где функция $(T\widetilde{x})(t)$ принимает значения, промежуточные между значениями $(Tx_1)(t)$ и $(Tx_2)(t)$.

Взяв в качестве l ноль, в силу условия 4 теоремы 1 и оценок (11), имеем

$$\frac{1}{2}\|y\|_C \leqslant \|y\|_C \leqslant \frac{1}{4}\int\limits_0^1 \left| a_2(s) + b_2 (T\widetilde{x})^{\frac{p}{q}-1}(s)\right| |(Ty)(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\int\limits_0^1 |a_2(s)|\,(Ty)(s)ds + \frac{|b_2|}{4}\int\limits_0^1 \left|(T\widetilde{x})^{\frac{p}{q}-1}(s)\right| |(Ty)(s)|\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\|a_2\|_{L_{\frac{pq}{p-q}}}^{\frac{p}{p-1}} \|Ty\|_{L_p} + \frac{|b_2|}{4}\|T\widetilde{x}\|_{L_p}^{\frac{p}{q}-1}\|Ty\|_{L_p} \leqslant \frac{\gamma}{4}\|a_2\|_{L_{\frac{pq}{p-q}}}^{\frac{p}{p-1}}\|y\|_C + \frac{|b_2|\,\gamma^{p/q}}{4}\mathrm{M}^{\frac{p}{q}-1}\|y\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\gamma}{4}\|a_2\|_{L_{\frac{pq}{p-q}}}^{\frac{p}{p-1}} + \frac{|b_2|\,\gamma^{p/q}}{4}\mathrm{M}^{\frac{p}{q}-1}\right)\|y\|_C,$$

где γ — норма оператора $T : C \to L_p$.

Таким образом,

$$\|y\|_C \leqslant \left(\frac{\gamma}{4}\|a_2\|_{L_{\frac{pq}{p-q}}}^{\frac{p}{p-1}} + \frac{|b_2|\,\gamma^{p/q}}{4}\mathrm{M}^{\frac{p}{q}-1}\right)\|y\|_C,$$

т. е. $\gamma\|a_2\|_{L_{\frac{pq}{p-q}}}^{\frac{p}{p-1}} + |b_2|\,\gamma^{p/q}\mathrm{M}^{\frac{p}{q}-1} \geqslant 4$.

Если последнее неравенство не выполняется, то уравнение (3), а следовательно, и краевая задача (1)–(2) имеет единственное решение. Доказана

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 краевая задача (1)–(2) имеет единственное положительное решение, если

$$\gamma\|a_2\|_{L_{\frac{pq}{p-q}}}^{\frac{p}{p-1}} + |b_2|\gamma^{p/q}M^{\frac{p}{q}-1} < 4.$$

В качестве примера можно рассмотреть краевую задачу

$$x''(t) + \frac{1}{(1+t)^2}\left(\int\limits_0^1 x(s)ds\right)^2 = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{12}$$

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0. \tag{13}$$

Существование положительного решения краевой задачи (12)–(13) очевидным образом гарантирует теорема 1. Несложно проверить выполнение условий теоремы 2, обеспечивающих единственность этого решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев, Н. В. Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения / Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, П. М. Симонов // Вестник Удмуртского государственного университета. Серия : Математика. — 2009. — № 1. — С. 3–23.

2. Wong, F. H. Existence of positive solutions for second order functional differential equations / F. H. Wong, S. P. Wang, T. G. Chen // Computers & Mathematics with Applications. — 2008. — V. 56, № 10. — P. 2580–2587.

3. Ma, R. Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations / R. Ma // Appl. Math. Comput. — 2007. — V. 193, № 1. — P. 66–72.

4. Zima, M. On positive solutions of functional-differential equations in banach spaces / M. Zima // Journal of Inequalities and Applications. — 2000. — V. 6, № 3. — P. 359–371.

5. Agarwal, R. P. Positive solutions of singular value problems for delay differential equations / R. P. Agarwal, S. Stanek // Dyn. Syst. Appl. — 2007. — V. 16, № 4. — P. 755–770.

6. Existence of positive solutions for functional equations / C. Hong, C. Yeh, C. Lee, F. Wong // Computer & Mathematics with Applications. — 2000. — V. 40, № 6. — P. 783–792.

7. Sun, Y. Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations / Y. Sun, M. Han, L. Debnath // Applied Mathematics and Computation. — 2007. — V. 190, № 1. — P. 699–704.

8. Weng, P. Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE / P. Weng, D. Jiang // Computers & Mathematics with Applications. — 1999. — V. 37, № 10. — P. 1–9.

9. Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations / C. Hong, C. Yeh, C. Lee, F. Wong // J. Math. Anal. Appl. — 2004. — V. 297, № 1. — P. 14–23.

10. Yin, F. The existence of positive solutions for the quasilinear functional delay differential equations / F. Yin, F. Fugi, Y. Li // J. Math. Study. — 2002. — V. 35, № 4. — P. 364–370.

11. Agarwal, R. Positive solutions of singular boundary value problems for delay differential equations / R. Agarwal, S. Stanмk // Dyn. Syst. Appl. — 2007. — V. 16, № 4. — P. 755–770.

12. Покорный, Ю. В. Об относительных индексах положительных операторов / Ю. В. Покорный // Труды математического факультета Воронежского государственного университета. — 1971. — № 4. — С. 79–89.

13. Красносельский, М. А. Положительные решения операторных уравнений / М. А. Красносельский. — М. : Физматгиз, 1962. — 396 с.

14. Абдурагимов, Г. Э. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма-Лиуввиля для одного нелинейного функционально–дифференциального уравнения второго порядка / Г. Э. Абдурагимов // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2012. — № 1. — С. 77–80.

15. Крейн, С. Г. Функциональный анализ / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1972. — 544 с.

16. Крейн, М. Г. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха / М. Г. Крейн, М. А. Рутман // УМН. — 1948. — Т. 3, вып. 1 (23). — С. 3–95.

REFERENCES

1. Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Functional differential equations and applications. [Azbelev N.V., Maksimov V.P., Simonov P.M. Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya i ikh prilozheniya]. *Vestnik Udmurtskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika — Proceedings of Udmurt State University*, 2009, no. 1, pp. 3–23.

2. Wong F.H., Wang S.P., Chen T.G. Existence of positive solutions for second order functional differential equations. Computers & Mathematics with Applications, 2008, vol. 56, no. 10, pp. 2580–2587.

3. Ma R. Positive solutions for boundary value problems of functional differential equations. Appl. Math. Comput., 2007, vol. 193, no. 1, pp. 66–72.

4. Zima M. On positive solutions of functional-differential equations in banach spaces. Journal of Inequalities and Applications, 2000, vol. 6, no. 3, pp. 359-371.

5. Agarwal R.P., Stanek S. Positive solutions of singular value problems for delay differential equations, 2007, vol. 16, no. 4, pp. 755–770.

6. Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F. Existence of positive solutions for functional equations. Computer & Mathematics with Applications, 2000, vol. 40, no. 6, pp. 783–792.

7. Sun Y., Han M., Debnath L. Existence of positive periodic solutions for a class of functional differential equations. Applied Mathematics and Computation, 2007, vol. 190, no. 1, pp. 699–704.

8. Weng P., Jiang D. Existence of positive solutions for boundary value problem of second-order FDE. Computers & Mathematics with Applications, 1999, vol. 37, no. 10, pp. 1–9.

9. Hong C., Yeh C., Lee C., Wong F. Existence of positive solutions for higher-order functional differential equations. J. Math. Anal. Appl., 2004, vol. 297, no. 1, pp. 14–23.

10. Yin F., Fugi F., Li Y. The existence of positive solutions for the quasilinear functional delay differential equations. J. Math. Study, 2002, vol. 35, no. 4, pp. 364–370.

11. Agarwal R., Stanмk S. Positive solutions of singular boundary value problems for delay differential equations. Dyn. Syst. Appl., 2007, vol. 16, no. 4, pp. 755–770.

12. Pokorny Yu. V. On the relative indices pf positive operators. [Pokorny Yu. V. Ob otnositel'nyx indeksax polozhitel'nyx operatorov]. *Trudi matematicheskogo fakul'teta Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta — Proceedings of the Faculty of Mathematics of Voronezh State University*, 1971, no. 4, pp. 79–89.

13. Krasnosel'skii M.A. Positive solutions of operator equations. [Krasnosel'skiy M.A. Polozhitel'nye resheniya operatornykh uravneniy]. Moscow, 1962, 396 p.

14. Abduragimov G.E. On the existence of the positive solution of a boundary value problem of the Sturm–Liouville type for a second-order linear functional-differential equation. [Anduragimov G.E. O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitel'nogo resheniya kraevoy zadachi tipa Schturma–Liuvvilya dlya odnogo nelineynogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2012, no. 1, pp. 77–80.

15. Krein S.G. Functional analysis and other mathematics. [Kreyn S.G. Funktsional'nyy analiz]. Moscow: Nauka, 1972, 544 p.

16. Krein S.G., Rutman M.A. Linear operators that leave an invariant cone in the Banach space. [Krein S.G., Rutman M.A. Lineynie operatori, ostavlyayschie invariantnim konus v prostranstve Banaha]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1948, vol. 3, iss. 1, pp. 3–95.

Абдурагимов Гусен Эльдерханович, доцент, математический факультет, кафедра прикладной математики и информатики, Дагестанский государственный университет, Махачкала, Республика Дагестан, Россия
E-mail: gusen_e@mai.ru

Abduragimov Gusen E., assistant professor, Department of Mathematics, Chair of Applied Mathematics and Informatics, Daghestan State University, Makhachkala, Daghestan, Russia
E-mail: gusen_e@mai.ru