

УДК 534.26

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА ИЗОТРОПНЫМИ ОБОЛОЧКАМИ

С. Л. Ильменков¹, С. А. Переселков², С. А. Ткаченко², П. В. Рыбьянец²

¹ – Санкт-Петербургский государственный морской технический университет;

² – Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.08.2019 г.

Аннотация. С помощью теоремы взаимности получены строгие решения трехмерных задач излучения звука изотропными телами: сплошным вытянутым сфероидом, вытянутой сфероидальной и бесконечной цилиндрической оболочками, возбуждаемых точечными гармоническими источниками на их поверхности. Для разделения переменных в векторном уравнении Гельмгольца используется представление векторного потенциала через скалярные потенциалы Дебая. Из физических граничных условий на поверхностях контакта тел с внутренней и внешней жидкими средами получены алгебраические системы уравнений для определения неизвестных коэффициентов разложения потенциалов рассеянной звуковой волны. Вычислены и проанализированы угловые характеристики излучения рассматриваемых тел для различных расположений источников, материалов и толщин оболочек. Отмечено возрастание уровней излучения в освещенной области и поперечных направлениях при снижении его в теневой зоне с увеличением толщины и волнового размера оболочек. Рассмотрены возможности дальнейшего развития данного подхода для решения задач излучения звука упругими телами, возбуждаемыми турбулентными пульсациями, в которых жидкие частицы являются излучателями более высоких порядков (диполями и квадрупольями).

Ключевые слова: сфероидальная и цилиндрическая изотропные оболочки, теорема взаимности, трехмерные задачи, уравнение Гельмгольца, потенциалы Дебая, граничные условия, угловые характеристики излучения.

THE USE OF RECIPROCAL THEOREM FOR THE SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL TASKS OF SOUND RADIATION IS ISOTROPIC SHELLS

S. L. Ilmenkov, S. A. Pereselkov, S. A. Tkachenko, P. V. Rybyanets

Abstract. The reciprocal theorem they used to obtain strict solutions of three-dimensional tasks of sound radiation by isotropic bodies: a solid elongated spheroid, elongated spheroidal and infinite cylindrical shells excited by point harmonic sources on their surface. To separate the variables in the vector Helmholtz equation, we use the representation of the vector potential through the scalar Debye potentials. From the physical boundary conditions on the surfaces of contact of bodies with internal and external liquid media, algebraic systems of equations for the determination of unknown coefficients of the expansion of the scattered sound wave potential they are obtained. The angular characteristics of the radiation of the considered bodies for different locations of sources, materials and shell thicknesses are calculated and analyzed. The

© Ильменков С. Л., Переселков С. А., Ткаченко С. А., Рыбьянец П. В., 2019

increase of radiation levels in the illuminated area and transverse directions with its decrease in the shadow zone with increasing thickness and wave size of the shells is noted. The possibilities of further development of this approach for solving the tasks of sound radiation by elastic bodies excited by turbulent pulsations in which liquid particles are higher-order emitters (dipoles and quadruples) are considered.

Keywords: spheroidal and cylindrical isotropic shells, reciprocal theorem, three-dimensional tasks, Helmholtz equation, Debye potentials, boundary conditions, angular characteristics of radiation.

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследованию методов расчета излучения звука упругими телами, находящимися в жидкой среде, посвящено очень большое количество работ. Основополагающие результаты, достигнутые в данной области, отражены в монографиях [1–3, 5, 7–13, 17, 18 и др.], акустическое излучение пластин и оболочек рассматривалось также в работах [13–15, 19–21, 23, 24 и др.]. При этом библиография по данной тематике продолжает интенсивно пополняться, что свидетельствует как о ее востребованности и актуальности, так и о сохраняющихся возможностях дальнейших исследований.

Развитие методов и алгоритмов расчета излучения звука упругими оболочками в области достаточно низких частот целесообразно строить с позиций волновой акустики, обеспечивающей наиболее полное и строгое описание звуковых полей с учетом взаимодействия отдельных упругих мод конструкции с внешним акустическим полем. Несмотря на появление в настоящее время большого количества достаточно удобных численных методов решения подобных задач, особая значимость аналитических решений заключается в строгом понимании физической сущности проблемы, а также возможности получения эталонных (тестовых) результатов, что способствует успешной реализации численных алгоритмов.

Развитие судостроения, авиации, трубопроводного транспорта и т. д. стимулирует интерес к исследованию проблем генерации звука упругими оболочками при воздействии на них полей пульсаций давления гидродинамической природы.

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ИЗОТРОПНЫМИ ТЕЛАМИ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ

В данном разделе рассматриваются строгие решения трехмерных задач излучения звука сплошным вытянутым сфероидом и вытянутой сфероидальной оболочкой под действием точечных источников на их поверхности. В монографии [23], посвященной изучению гидродинамических источников звука, отмечается, что такие задачи могут быть интерпретированы как задачи излучения звука упругим телом под воздействием турбулентных пульсаций потока жидкости, причем, определенный интерес представляет расчет, основанный на сосредоточенной силе, обусловленной этой пульсацией.

Рассмотрим трехмерную граничную задачу излучения звука изотропным вытянутым сфероидом, находящемся в невязкой жидкости с плотностью ρ_1 и возбуждаемым в точке P_0 гармоническим точечным источником с потенциалом $\Phi = \exp(ikr)/r$, где k — волновое число в жидкой среде; r — расстояние от источника (рис. 1) [24–26].

Введем в рассмотрение систему вытянутых сфероидальных координат ξ, η, φ с межфокусным расстоянием $2f$, а также сферическую систему координат R, θ, φ с общим для обеих систем центром O (см. рис. 1). Сфероидальные координаты точки P_0 примем равными ξ_0, η_0, φ_0 .

Для нахождения дальнего поля излучения вытянутого сфероида под действием точечного источника воспользуемся вариантом теоремы взаимности для упругих поверхностей [24–26],

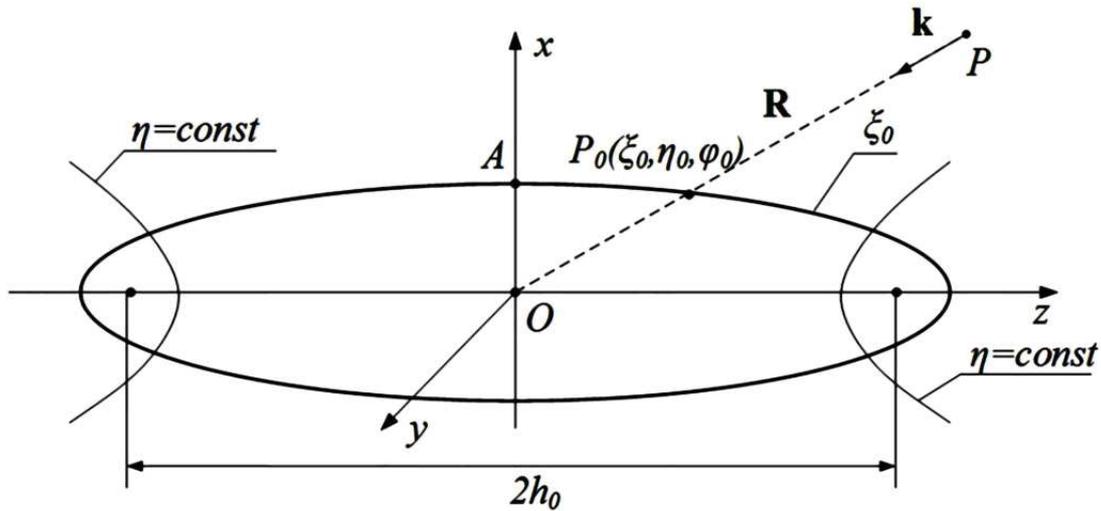


Рис. 1. Точечный источник на поверхности упругого сфероида.

что позволяет свести решение задачи излучения к решению эквивалентной трехмерной граничной задачи дифракции плоской монохроматической волны на данном теле. В соответствии с данной теоремой искомая угловая характеристика излучения звуком телом $\psi_S(\theta, \varphi)$ (где θ, φ — сферические координаты точки наблюдения) совпадает с распределением потенциала на поверхности упругого рассеивателя $\Phi_1(\xi, \eta, \varphi)$, помещенного в поле звуковой волны с потенциалом $\Phi_0 = \exp(ikR)$ (k — волновой вектор падающей волны; R — радиус-вектор из начала координат в точку наблюдения P). При этом положение точечного источника на поверхности упругого тела определяется точкой пересечения луча от источника падающей волны (в задаче дифракции) с поверхностью тела (см. рис. 1).

Угловая характеристика излучения $\psi_S(\theta, \varphi)$ связана с потенциалом рассеяния звука сфероидом в дальнем поле $\Phi_S(r, \theta, \varphi)$ следующим соотношением:

$$\Phi_S(R, \theta, \varphi) = \psi_S(\theta, \varphi) \exp(ikR)/R. \quad (1)$$

В вытянутой сфероидальной системе координат потенциал рассеянной волны Φ_S отыскивается в форме, удовлетворяющей условиям Зоммерфельда на бесконечности:

$$\Phi_S(\xi, \eta, \varphi) = 2 \sum_{n \geq m}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{m,n} \bar{S}_{m,n}(c, \eta) R_{m,n}^{(3)}(c, \xi) \cos m\varphi, \quad (2)$$

где $B_{m,n}$ — неизвестные коэффициенты разложений, определяемые из граничных условий на поверхности сфероидального рассеивателя; $\bar{S}_{m,n}(c, \eta)$ — нормированная угловая сфероидальная функция; $R_{m,n}^{(3)}(c, \xi)$ — радиальная сфероидальная функция 3-го рода [6]; $c = kh_0$; $\theta = \arccos \eta$; $\varepsilon_m = 1, m = 0$; $\varepsilon_m = 2, m \neq 0$.

Для упругого сфероида вектор смещения $\mathbf{u}(u_\xi, u_\eta, u_\varphi)$ представляется в виде комбинации скалярного и векторного потенциалов:

$$\mathbf{u} = -\text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi. \quad (3)$$

Для разделения переменных в векторном уравнении Гельмгольца воспользуемся потенциалами Дебая U и V (подчиняющимися скалярному уравнению Гельмгольца), через которые выражается векторная функция Ψ в соответствии с представлением [5, 10, 18]:

$$\Psi = \text{rot rot}(\mathbf{R}U) + ik_2 \text{rot}(\mathbf{R}V), \quad (4)$$

где: k_2 — волновое число поперечной волны в материале упругого тела.

Компоненты функции $\Psi(\Psi_\xi, \Psi_\eta, \Psi_\varphi)$ в сфероидальной системе координат с помощью формул векторного анализа путем последовательных преобразований получим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi_\xi &= \Psi_R(h_0/h_\xi)\xi(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} + \Psi_{\theta_1}(h_0/h_\xi)(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2}(\partial\theta_1/\partial\xi); \\ \Psi_\eta &= \Psi_R(h_0/h_\eta)\eta(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2} + \Psi_{\theta_1}(h_0/h_\eta)(\xi^2 - 1 + \eta^2)^{1/2}(\partial\theta_1/\partial\eta); \\ \Psi_\varphi &\equiv \Psi_\varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Потенциал $\Phi_1 = \Psi_S(\xi, \eta, \varphi)$, скалярный потенциал Φ_2 , потенциалы Дебая U и V , потенциал Φ_0 плоской падающей волны разложим по собственным функциям уравнения Гельмгольца в вытянутой сфероидальной системе координат [24–26]:

$$\Phi_0(\xi, \eta, \varphi) = 2 \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^{-n} R_{m,n}^{(1)}(c, \xi_0) \bar{S}_{m,n}(c, \eta_0) \bar{S}_{m,n}(c, \eta) \cos m\varphi, \quad (6)$$

$$\Phi_2(\xi, \eta, \varphi) = 2 \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m,n} \bar{S}_{m,n}(c_1, \eta_0) R_{m,n}^{(1)}(c_1, \xi) \cos m\varphi, \quad (7)$$

$$U = 2 \sum_{n \geq m} \sum_{m=1}^{\infty} E_{m,n} \bar{S}_{m,n}(c_2, \eta_0) R_{m,n}^{(1)}(c_2, \xi) \sin m\varphi, \quad (8)$$

$$V = 2 \sum_{n \geq m} \sum_{m=0}^{\infty} G_{m,n} \bar{S}_{m,n}(c_2, \eta_0) R_{m,n}^{(1)}(c_2, \xi) \cos m\varphi, \quad (9)$$

где $R_{m,n}^{(3)}(c, \xi)$ — радиальная сфероидальная функция 3-го рода; $\bar{S}_{m,n}(c, \eta_0)$ — нормированная угловая сфероидальная функция; $c_1 = k_1 h_0$; $c_2 = k_2 h_0$; k_1 — волновое число продольной волны в материале сфероида; $\eta = \cos \theta$.

На поверхности упругого сфероида $\xi = \xi_0$ должны выполняться следующие граничные условия:

1) непрерывность нормальной компоненты u_ξ вектора смещения \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} (h_\xi)^{-1} (\partial/\partial\xi) (\Phi_0 + \Phi_1) = \\ = (h_\xi)^{-1} (\partial\Phi_2/\partial\xi) + (h_\eta h_\varphi)^{-1} [(\partial/\partial\eta) (h_\varphi A_\varphi) - (\partial/\partial\varphi) (h_\eta A_\eta)] \Big|_{\xi=\xi_0}; \end{aligned} \quad (10)$$

2) равенство нормального напряжения в упругом теле оболочке звуковому давлению в жидкости:

$$-\lambda_0 k^2 (\Phi_0 + \Phi_1) = -\lambda_1 k_1^2 \Phi_2 + 2\mu_1 [(h_\xi h_\eta)^{-1} (\partial h_\xi / \partial \eta) u_\eta + (h_\xi)^{-1} (\partial u_\xi / \partial \xi)] \Big|_{\xi=\xi_0}; \quad (11)$$

3) отсутствие касательных напряжений $\tau_{\xi\eta}$ и $\tau_{\xi\varphi}$:

$$(h_\eta/h_\xi) (\partial/\partial\xi) (u_\eta/h_\eta) + (h_\xi/h_\eta) (\partial/\partial\eta) (u_\xi/h_\xi) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0; \quad (12)$$

$$(h_\varphi/h_\xi) (\partial/\partial\xi) (u_\varphi/h_\varphi) + (h_\xi/h_\varphi) (\partial/\partial\varphi) (u_\xi/h_\xi) \Big|_{\xi=\xi_0} = 0. \quad (13)$$

где λ_0 — коэффициент объемного сжатия жидкости; u_η , u_φ — касательные компоненты вектора смещения \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} u_\xi &= (h_\xi)^{-1} (\partial\Phi_2/\partial\xi) + (h_\eta h_\varphi)^{-1} [(\partial/\partial\eta) (h_\varphi \psi_\varphi) - (\partial/\partial\varphi) (h_\eta \psi_\eta)]; \\ u_\eta &= (h_\eta)^{-1} (\partial\Phi_2/\partial\eta) + (h_\xi h_\varphi)^{-1} [(\partial/\partial\varphi) (h_\xi \psi_\xi) - (\partial/\partial\xi) (h_\varphi \psi_\varphi)]; \\ u_\varphi &= (h_\varphi)^{-1} (\partial\Phi_2/\partial\varphi) + (h_\xi h_\eta)^{-1} [(\partial/\partial\xi) (h_\eta \psi_\eta) - (\partial/\partial\eta) (h_\xi \psi_\xi)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя разложения (2), (6)÷(9) в граничные условия (10)÷(13), получим бесконечную систему уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $E_{m,n}$, $G_{m,n}$. Вследствие ортогональности тригонометрических функций $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ бесконечная система уравнений распадается на бесконечные подсистемы с фиксированным индексом m , каждая из которых решается методом усечения.

На основе полученных решений были выполнены расчеты модулей угловых характеристик излучения $|\psi_s(\theta, \varphi) = \Phi_1(\xi_0, \eta, \varphi)|$ стального вытянутого сфероида с соотношением полуосей 1 : 10 ($\xi_0 = 1,005$) при расположении источника в точке A на оси x ($\eta_0 = \cos \theta_0 = 0^\circ$, $\varphi_0 = 0^\circ$, см. рис. 1), что соответствовало исходной дифракционной задаче при облучении его вдоль малой полуоси ($\theta_0 = 90^\circ$), при этом число удерживаемых членов ряда в разложениях (2), (6)÷(9) увеличивалось пропорционально волновому размеру сфероида. На рис. 2,а представлены в разном масштабе модули угловых характеристик $|\psi_s(\theta, \varphi)|$ стального сфероида для значений $c = 1,5$ (кривая 1) и $c = 7,5$ (кривая 2), а на рис. 2,б — соответствующие кривые для: абсолютно жесткого (кривая 1), стального (кривая 2) и абсолютно мягкого сфероидов (кривая 3) тех же размеров и формы для $c = 10$.

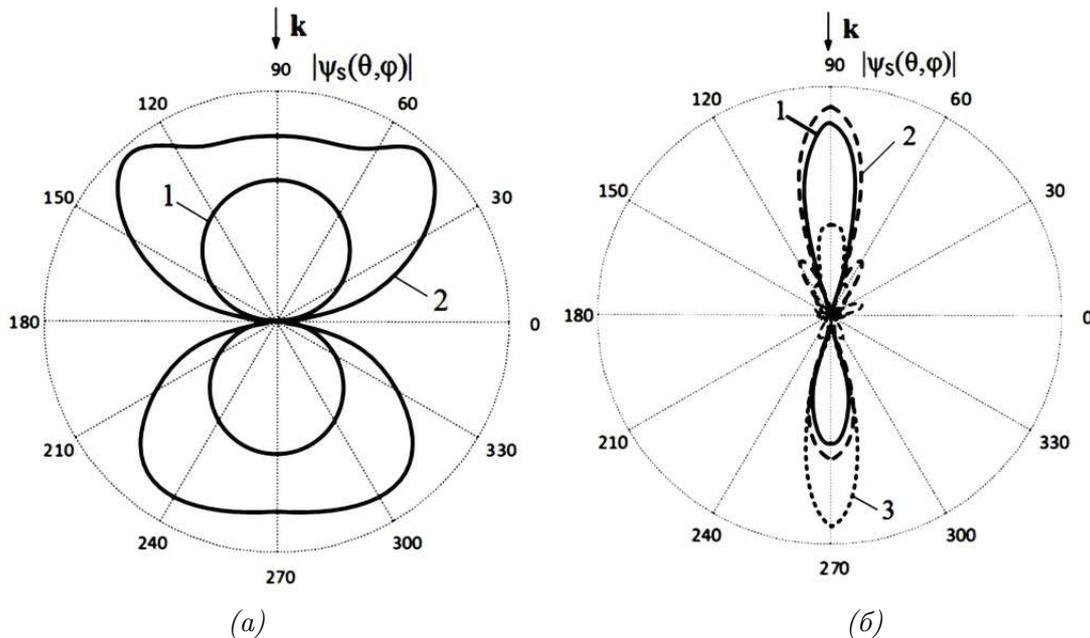


Рис. 2. Модули угловых характеристик излучения звука сфероидами $|\psi_s(\theta, \varphi)|$ при $|\theta = 90^\circ$: а) стальным для $c = 1,5$ (1) и $c = 7,5$ (2); б) идеально жестким (1), стальным (2), идеально мягким (3) для $c = 10$.

Как видно из графиков, характеристики излучения упругого сфероида близки к соответствующим характеристикам для абсолютно жесткого, при этом модуль углового распределения излучения носит дипольный (“силовой”) характер.

Решение внешней трехмерной задачи излучения звука (и эквивалентной ей задачи дифракции) изотропной газонаполненной сфероидальной оболочкой под действием точечных источников на ее поверхности (рис. 3), принципиально не отличается от рассмотренного выше решения для сплошного упругого сфероида.

Радиальные координаты внешней и внутренней поверхностей оболочки соответственно равны: ξ_0 и ξ_1 . Наличие поверхности контакта упругой оболочки с вакуумом или газом-заполнителем (плотность ρ_2 , скорость звука c_3 , коэффициент объемного сжатия λ_2) приводит к видоизменению разложений для потенциалов Φ_2 , U, V и появлению дополнительного

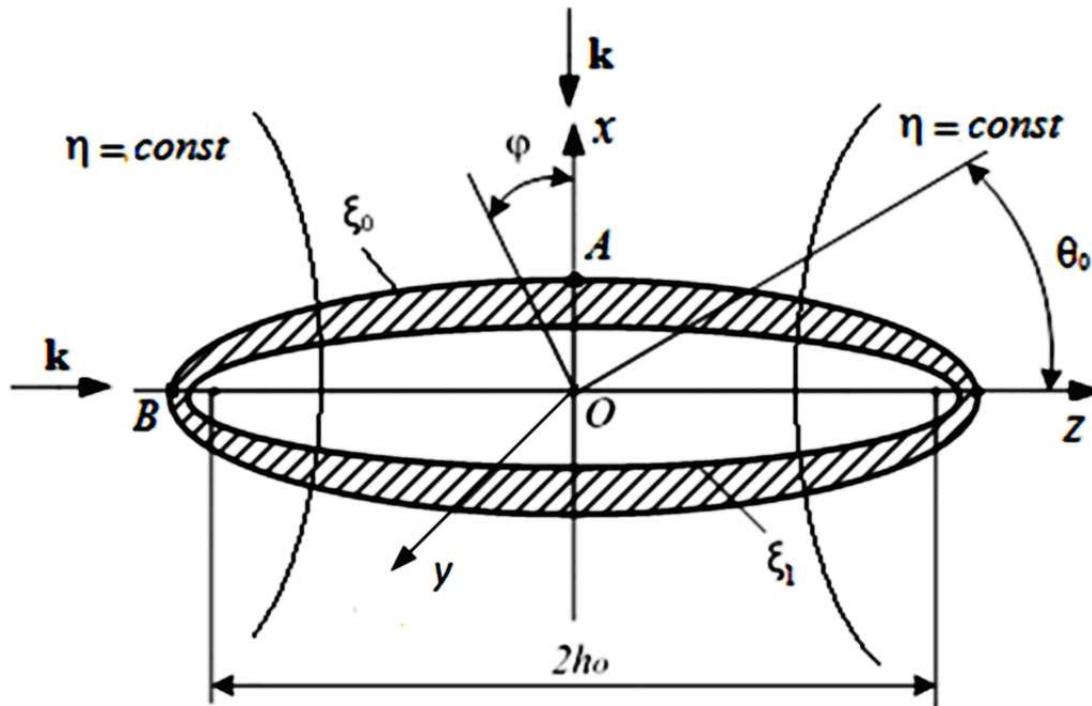


Рис. 3. Упругая сфероидальная оболочка, возбуждаемая точечными источниками A и B на поверхности.

разложения для потенциала газа, заполняющего оболочку Φ_3 :

$$\Phi_2 = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(c_1, \eta) \cos m\varphi \left[C_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(c_1, \xi) + D_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(c_1, \xi) \right]; \quad (15)$$

$$\Phi_3 = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} E_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(c_3, \xi) \bar{S}_{m,n}(c_3, \eta) \cos m\varphi; \quad (16)$$

$$U = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(c_2, \eta) \sin m\varphi \left[F_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(c_2, \xi) + G_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(c_2, \xi) \right]; \quad (17)$$

$$V = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n \geq m}^{\infty} \bar{S}_{m,n}(c_2, \eta) \cos m\varphi \left[H_{m,n} R_{m,n}^{(1)}(c_2, \xi) + I_{m,n} R_{m,n}^{(2)}(c_2, \xi) \right]; \quad (18)$$

где $c_3 = k_3 h_3$; k_3 — волновое число в газе-заполнителе; $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $D_{m,n}$, $E_{m,n}$, $F_{m,n}$, $G_{m,n}$, $H_{m,n}$, $I_{m,n}$ — неизвестные коэффициенты разложений.

Коэффициенты разложений отыскиваются из граничных условий на обеих поверхностях оболочки (ξ_0 и ξ_1 , см. рис. 3):

- 1) непрерывность нормальной компоненты смещения на границах ξ_0 и ξ_1 ;
- 2) равенство нормального напряжения в упругой оболочке звуковому давлению в жидкости (ξ_0) или газе (ξ_1);
- 3) отсутствие касательных напряжений на обеих границах оболочки ξ_0 и ξ_1 .

В соответствии с этим к (10) и (11) добавляются следующие условия:

$$(h_\xi)^{-1} (\partial \Phi_3 / \partial \xi) = (h_\xi)^{-1} (\partial \Phi_2 / \partial \xi) + (h_\eta h_\varphi)^{-1} [(\partial / \partial \eta) (h_\varphi \psi_\varphi) - (\partial / \partial \varphi) (h_\eta \psi_\eta)] \Big|_{\xi=\xi_1}; \quad (19)$$

$$-\lambda_2 k_2^2 \Phi_3 = -\lambda_1 k_1^2 \Phi_2 + 2\mu_1 [(h_\xi h_\eta)^{-1} (\partial h_\xi / \partial \eta) u_\eta + (h_\xi)^{-1} (\partial u_\xi / \partial \xi)] \Big|_{\xi=\xi_1}; \quad (20)$$

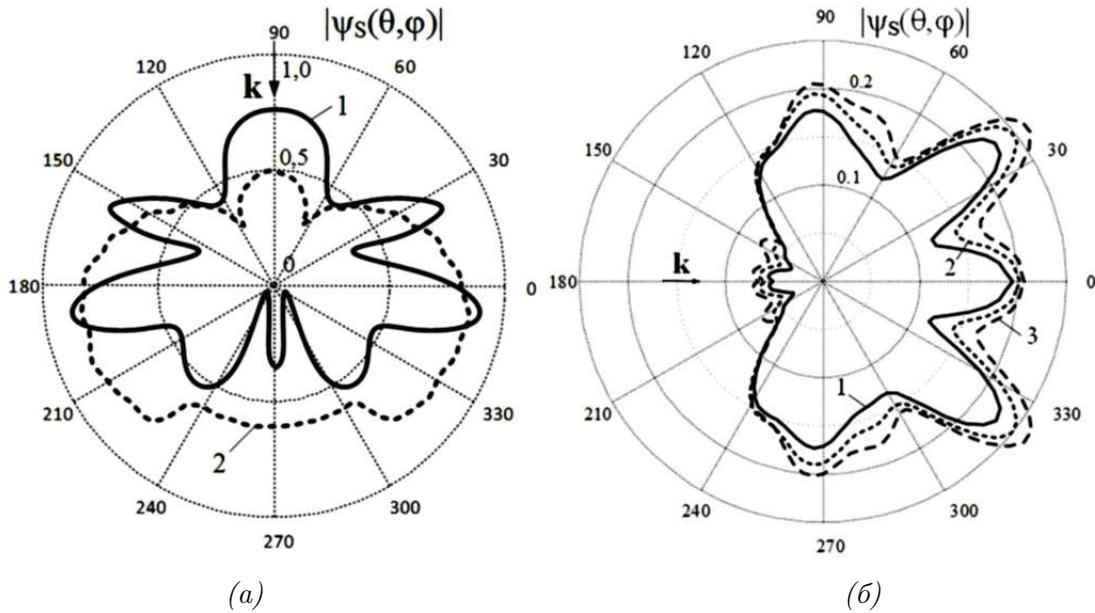


Рис. 4. Модули угловых характеристик излучения звука стальной полый сферической оболочкой $|\psi_s(\theta, \varphi)|$, возбуждаемой снаружи точечным гармоническим источником: а) в точке А; $c = 5,5$; б) в точке В; $c = 5,0$.

а условия (12), (13) изменяются:

$$(h_\eta/h_\xi) (\partial/\partial\xi) (u_\eta/h_\eta) + (h_\xi/h_\eta) (\partial/\partial\eta) (u_\xi/h_\xi) \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \xi = \xi_1}} = 0; \quad (21)$$

$$(h_\varphi/h_\xi) (\partial/\partial\xi) (u_\varphi/h_\varphi) + (h_\xi/h_\varphi) (\partial/\partial\varphi) (u_\xi/h_\xi) \Big|_{\substack{\xi = \xi_0 \\ \xi = \xi_1}} = 0. \quad (22)$$

Подставляя разложения (2), (15)÷(18) в граничные условия (10),(11), (19)-(22), получаем бесконечную систему уравнений для отыскания неизвестных коэффициентов $B_{m,n}$, $C_{m,n}$, $D_{m,n}$, $E_{m,n}$, $F_{m,n}$, $G_{m,n}$, $H_{m,n}$, $I_{m,n}$. Вследствие ортогональности тригонометрических функций $\cos m\varphi$ и $\sin m\varphi$ эта бесконечная система разделяется на бесконечные подсистемы с фиксированным индексом m , каждая из которых решается методом усечения.

На рис. 4 показаны вычисленные модули угловых характеристик излучения $|\psi_s(\theta, \varphi)|$ стальной оболочки при возбуждении в точках А ($\theta_0 = 90^\circ$, рис. 4,а, $c = 5,5$) и В ($\theta_0 = 180^\circ$, рис. 4,б, $c = 5,0$). Кривые 1 и 2 на рис. 4,а относятся соответственно к оболочке и сплошному стальному сфероиду, кривые 1,2,3 на рис. 4,б соответствуют радиальным координатам внешней поверхности оболочки: $\xi_0 = 1,00501$; $1,0051$; $1,0052$. Внутренняя поверхность задана координатой $\xi_1 = 1,005$.

Как видно из представленных результатов, характер излучения оболочки является более сложным, чем у сплошного сфероида, кроме того, при возбуждении в точке В максимум ее модуля с ростом частоты все более смещается в траверсном направлении. С увеличением толщины оболочки и (или) роста волнового размера происходит возрастание значений $|\psi_s(\theta, \varphi)|$ в освещенной области и уменьшение их теневой зоне.

Замена газа-заполнителя вакуумом практически не сказывается на результатах расчетов характеристик рассеяния и излучения в данном диапазоне частот.

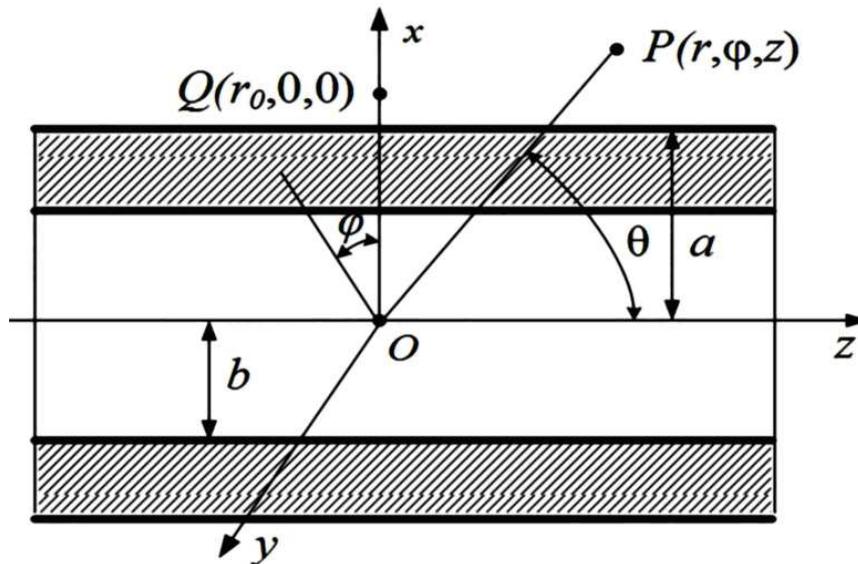


Рис. 5. Цилиндрическая оболочка.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Аналогичный подход был использован также при решении трехмерной задачи излучения звука упругой изотропной бесконечной цилиндрической оболочкой [24, 25]. Гармонический точечный источник $Q(r_0, 0, 0)$ частоты ω находится на расстоянии $r_0 > a$ от оси оболочки z (рис. 5). Оболочка помещена во внешнюю жидкую среду со скоростью звука c_0 , внутри оболочки-вакуум. Используем теорему взаимности и поменяем местами источник Q и точку наблюдения P , т. е. будем искать потенциал $\Phi_s(r, \varphi, z)$ в точке Q , как результат рассеяния оболочкой звукового сигнала от точечного источника с потенциалом $\Phi_i(r, \varphi, z)$, помещенным в точку P .

Потенциал этого источника определяется рядом [1, 19, 25]:

$$\Phi_i(r, \varphi, z) = \frac{i}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\varphi) \varepsilon_n \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\gamma z) H_n^{(1)}(k_\gamma r_0) J_n(k_\gamma r) d\gamma, \quad r < r_0. \quad (23)$$

Потенциал волны, рассеянной оболочкой Φ_s в точке Q может быть представлен как [19, 25]:

$$\Phi_s(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(n\varphi) \int_{-\infty}^{+\infty} A(\gamma) \exp(i\gamma z) H_n^{(1)}(k_\gamma r) d\gamma, \quad (24)$$

где: κ — волновое число поперечной волны в материале оболочки.

Потенциалы Φ , U и V раскладываются в ряды по собственным функциям скалярного уравнения Гельмгольца:

$$\Phi(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\varphi) \left[b_n \int_{-\infty}^{+\infty} B(\gamma) \exp(i\gamma z) J_n(h_\gamma r) d\gamma + b'_n \int_{-\infty}^{+\infty} B'(\gamma) \exp(i\gamma z) N_n(h_\gamma r) d\gamma \right]; \quad (25)$$

$$U(r, \varphi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\varphi) \left[c_n \int_{-\infty}^{+\infty} C(\gamma) \exp(i\gamma z) J_n(\kappa_\gamma r) d\gamma + c'_n \int_{-\infty}^{+\infty} C'(\gamma) \exp(i\gamma z) N_n(\kappa_\gamma r) d\gamma \right]; \quad (26)$$

$$V(r, \varphi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\varphi) \left[d_n \int_{-\infty}^{+\infty} D(\gamma) \exp(i\gamma z) J_n(\kappa_\gamma r) d\gamma + d'_n \int_{-\infty}^{+\infty} D'(\gamma) \exp(i\gamma z) N_n(\kappa_\gamma r) d\gamma \right], \quad (27)$$

где: $h_\gamma = (k_l^2 - \gamma^2)^{1/2}$; $k_l = \omega/c_1$ — волновое число продольной волны; c_1 — скорость продольной волны в материале оболочки; $N_n(\kappa_\gamma r)$ — цилиндрическая функция Неймана; $\kappa_\gamma = (\kappa^2 - \gamma^2)^{1/2}$; $b_n, b'_n, c_n, c'_n, d_n, d'_n$ и $B(\gamma), B'(\gamma), C(\gamma), C'(\gamma), D(\gamma), D'(\gamma)$ — неизвестные коэффициенты и функции соответственно, определяемые из граничных условий, аналогичных приведенным выше для сфероидальной оболочки.

Значения $a_n A(\gamma)$ для потенциала рассеянной волны рассчитываются из полученной алгебраической системы уравнений по правилу Крамера на основе определителей седьмого порядка [18, 25]:

$$a_n A(\gamma) = \Delta' / \Delta, \quad (28)$$

При этом сами определители Δ и Δ' в (28) имеют следующий вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{vmatrix}, \Delta' = \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} & a_{37} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} & a_{47} \\ 0 & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} & a_{57} \\ 0 & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} & a_{67} \\ 0 & a_{72} & a_{73} & a_{74} & a_{75} & a_{76} & a_{77} \end{vmatrix}; \quad (29)$$

где

$$a_{11} = -H_n^{(1)'}(k_\gamma a); a_{12} = J_n'(h_\gamma a); a_{13} = N_n'(h_\gamma a); a_{14} = ni\gamma [aJ_n(\kappa_\gamma a) + 2J_n'(\kappa_\gamma a)];$$

$$a_{15} = ni\gamma [aN_n(\kappa_\gamma a) + 2N_n'(\kappa_\gamma a)]; a_{16} = ik [(n^2 + a\gamma^2) J_n(\kappa_\gamma a) + J_n'(\kappa_\gamma a)];$$

$$a_{17} = ik [(n^2 + a\gamma^2) N_n(\kappa_\gamma a) + N_n'(\kappa_\gamma a)]; a_{21} = \rho_0 \omega^2 H_n^{(1)}(k_\gamma a); \text{ и т. д.}$$

Полностью элементы определителей приведены в [18, 25].

На рис. 6 показаны результаты расчета модулей углового распределения $|\Phi_S(\varphi)|$ стальной (кривая 1) и алюминиевой (кривая 2) оболочек, возбуждаемых снаружи гармоническим источником в точке $Q(a, 0, 0)$ при значениях волнового радиуса $ka = 3,0; 5,0$ и $7,0$ ($a = 1; b = 0.95$).

Как видно из рис. 6, упругие свойства материала оболочки в наибольшей степени проявляются в диапазоне $\sim 3,0 < ka < \sim 7,0$. Ниже этого диапазона характеристики излучения оболочки находятся под влиянием “мягкого” фона внутренней полости, выше-преимущественно определяются “жестким” фоном ее стенки при весьма значительном излучении в поперечных ($\varphi = \pm 90^\circ$) направлениях.

Полученные результаты также показывают, что возрастание уровня излучения в освещенной области и поперечных направлениях при снижении его в теневой зоне с увеличением толщины и волнового размера в целом аналогично тому, что было отмечено для вытянутой сфероидальной оболочки (см. рис. 4, б).

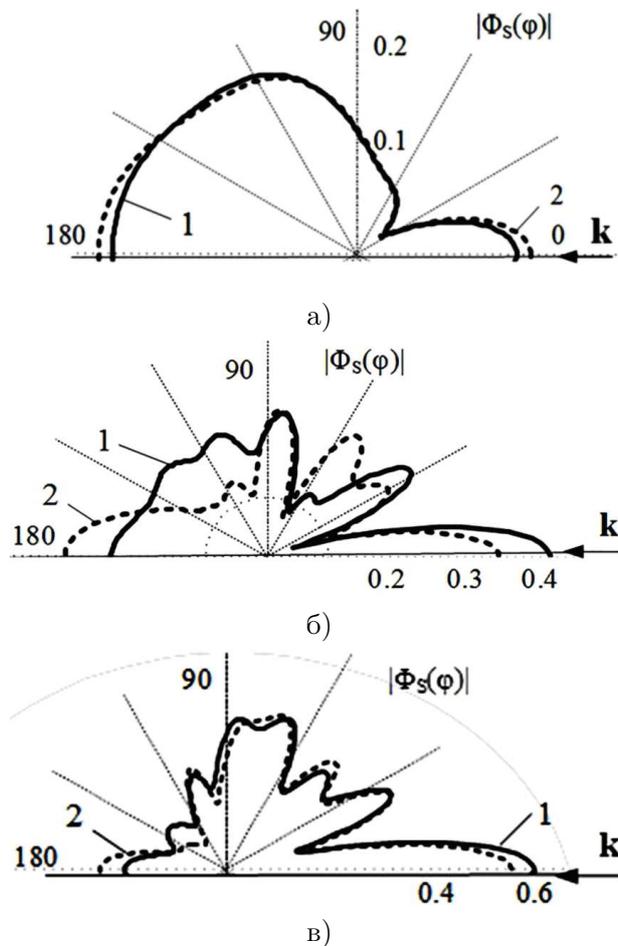


Рис. 6. Модули углового распределения $|\Phi_S(\varphi)|$ бесконечной цилиндрической оболочки (1 – стальной; 2 – алюминиевой), возбуждаемой снаружи точечным гармоническим источником в точке Q : а) $ka = 3,0$; б) $ka = 5,0$; в) $ka = 7,0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Дальнейшим развитием данного исследования может являться моделирование дипольного характера излучения рассматриваемых тел с помощью введения второго источника противоположного знака, расположенного на некотором расстоянии от первого, и вычислением в точке наблюдения полного давления от двух источников. Изложенный в данной работе подход может быть распространен и на решение задач излучения звука упругими телами, возбуждаемыми турбулентными потоками, в которых жидкие частицы являются излучателями второго порядка (квадрупольями). Следует также отметить, что полное поле в среде будет определяться интерференцией поля источника и поля упругого тела, возбуждаемого этим источником.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ: проект 19–08–00941 (Ткаченко С. А.), проект 19–29–06075 (Переселков С. А.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клещев, А. А. Дифракция и распространение волн в упругих средах и телах / А. А. Клещев. — С.-Пб. : Влас, 2001. — 156 с.

2. Клещев, А. А. Дифракция, излучение и распространение упругих волн // А. А. Клещев. — С.-Пб. : Профпринт, 2006. — 160 с.
3. Клещев, А. А. Волновые процессы в твердых телах / А. А. Клещев, Ф. Ф. Легуша, В. Л. Маслов. — Изд. СПбГМТУ, 2010. — 216 с.
4. Клещев, А. А. Дисперсионные уравнения векторов смещения различных мод упругих волн в изотропных и анизотропных цилиндрических стержнях / А. А. Клещев // Сб. трудов 13-ой сессии РАО. — 2002. — Т. 4. — С. 255–257.
5. Клещев, А. А. Потенциалы Дебая и “типа Дебая” в задачах дифракции, излучения и распространения упругих волн / А. А. Клещев // Акустический журнал. — 2011. — Вып. 58, № 34. — С. 338–344.
6. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1977. — 830 с.
7. Шендеров, Е. Л. Волновые задачи гидроакустики / Е. Л. Шендеров. — Л. : Судостроение, 1971. — 348 с.
8. Шендеров, Е. Л. Излучение и рассеяние звука / Е. Л. Шендеров. — Л. : Судостроение, 1989.
9. Хёнл, Х. Теория дифракции / Х. Хёнл, А. Мауэ, К. Вестпфаль. — М. : Мир, 1964. — 427 с.
10. Морз, Ф. Методы математической физики. Т. 1 / Ф. Морз, Г. Фешбах. — М. : Иностранная литература, 1960.
11. Скучик, Е. Основы акустики. Т. 4 / Е. Скучик. — М. : Мир, 1975. — 520 с.
12. Фелсен, Л. Излучение и рассеяние волн Л. Фелсен, Н. Маркувиц. — М. : Мир, 1978.
13. Юбералл Х. Акустика оболочек (обзор) / Х. Юбералл // Акустический журнал. — 2004. — Вып. 47, № 1. — С. 147–149.
14. Клещев, А. А. Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидом / А. А. Клещев, Л. С. Шейба. // Акустический журнал. — 1970. — Вып. 16, № 1. — С. 264–268.
15. Гутман, Т. Л. Дифракция упругих волн на упругом сфероиде / Т. Л. Гутман, А. А. Клещев // Сб. научн. тр. ЛКИ. — 1974. — Вып. 94. — С. 31–37.
16. Клещев, А. А. Рассеяние звука упругой и жидкой эллипсоидальными оболочками вращения / А. А. Клещев, Д. М. Ростовцев // Акустический журнал. — 1986. — Вып. 31, № 5. — С. 691–694.
17. Клещев, А. А. Основы гидроакустики / А. А. Клещев, И. И. Клюкин. — Л. : Судостроение, 1987. — 224 с.
18. Клещев, А. А. Гидроакустические рассеиватели / А. А. Клещев // СПб. : Прима, 2011. — 267 с.
19. Клещев, А. А. Дифракция звука от точечного источника на упругой цилиндрической оболочке / А. А. Клещев // Акустический журнал. — 2004. — Вып. 50, № 4. — С. 86–89.
20. Buchwald, V. T. Rayleigh waves in transversely isotropic media / V. T. Buchwald // Quart. Journ. Mech. and Applied. Math. — 1964. — V. XIV, part. 2. — P. 293–317.
21. Ahmad F. Guided waves in a transversely isotropic cylinder immersed in a fluid / F. Ahmad // J.A.S.A. — 2004. — V. 109, № 2. — P. 886–890.
22. Fan, Y. Scattering of a plane acoustic wave from a transversely isotropic cylinder encased in a solid elastic medium / Y. Fan, A. N. Sinclair, F. Honarvar // JASA. — 1999. — V. 106, № 2, part 4. — P. 1229–1236.
23. Миниович, И. Я. Гидродинамические источники звука / И. Я. Миниович, А. Д. Перник, В. С. Петровский. — Л. : Судостроение, 1971. — 480 с.
24. Клещев, А. А. Физическая модель излучения звука цилиндрической и сфероидальной оболочками, возбуждаемыми турбулентными пульсациями потока жидкости / А. А. Клещев // Сб. трудов 14-ой сессии РАО. — 2004. — С. 271–275.

25. Ильменков, С. Л. Физическая модель излучения звука под действием турбулентных пульсаций / С. Л. Ильменков, А. А. Клещев // Сб. трудов научн. конф. “Бубновские чтения”. — С-Пб., 2004. — С. 102–103.

26. Ильменков, С. Л. Трехмерная задача излучения звука упругой сфероидальной оболочкой под действием точечного источника / С. Л. Ильменков, А. А. Клещев, С. Б. Румянцев // Тезисы докл. 8 научно-техн. конф. по авиационной акустике. — Москва, 1986.

REFERENCES

1. Kleshchev A.A. Diffraction and propagation of waves in elastic media and bodies. [Kleshchev A.A. Difrakciya i rasprostranenie voln v uprugih sredah i telah]. St. Petersburg, 2001, 156 p.

2. Kleshchev A.A. Diffraction, emission and propagation of elastic waves. [Kleshchev A.A. Difrakciya, izluchenie i rasprostranenie uprugih voln]. St. Petersburg, 2006, 160 p.

3. Kleshchev A.A., Legusha F.F., Maslov V.L. Wave processes in solids. [Kleshchev A.A., Legusha F.F., Maslov V.L. Volnovye processy v tverdyh]. St. Petersburg, 2010, 216 p.

4. Kleshchev A.A. Dispersion equations of displacement vectors of various modes of elastic waves in isotropic and anisotropic cylindrical rods. [Kleshchev A.A. Dispersionnye uravneniya vektorov smeshcheniya razlichnyh mod uprugih voln v izotropnyh i anizotropnyh cilindricheskikh sterzhnyah]. Proceedings of the 13th session of RAO, 2002, vol. 4, pp. 255–257.

5. Kleshchev A.A. Debye and Debye potentials in problems of diffraction, radiation, and propagation of elastic waves. [Kleshchev A.A. Potencialy Debaya i “tipa Debaya” v zadachah difrakcii, izlucheniya i rasprostraneniya uprugih voln]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustical Physics*, 2011, iss. 58, no. 34, pp. 338–344.

6. Korn G., Korn T. Mathematics Handbook for Scientists and Engineers. [Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov]. Moscow: Nauka, 1977, 830 p.

7. Shenderov E.L. Wave problems of hydroacoustics. [Shenderov E.L. Volnovye zadachi gidroakustiki]. Leningrad, 1971, 348 p.

8. Shenderov E.L. Sound emission and scattering. [Shenderov E.L. Izluchenie i rasseyanie zvuka]. Leningrad, 1989.

9. Hyunl H., Maue A., Westpfal K. Diffraction Theory. [Hyunl H., Maueh A., Vestpfal’ K. Teoriya difrakcii]. Moscow: Mir, 1964, 427 p.

10. Morse F., Feshbach G. Methods of Mathematical Physics. Vol. 1. [Morz F., Feshbah G. Metody matematicheskoy fiziki. T. 1]. Moscow, 1960.

11. Skuchik E. Fundamentals of Acoustics. Vol. 4. [Skuchik E. Osnovy akustiki. T. 4]. Moscow: Mir, 1975, 520 p.

12. Felsen L., Markuwitz N. Radiation and scattering of waves. Vol. 1. [Felsen L., Markuvic N. Izluchenie i rasseyanie voln. T. 1]. Moscow: Mir, 1978.

13. Hubertall H. Acoustics of Shells (Review). [Yuberall H. Akustika obolochek (obzor)]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustical Physics*, 2004, iss. 47, no. 1, pp. 147–149.

14. Kleshchev A.A., Sheyba L.S. Scattering of a sound wave by ideal elongated spheroids. [Kleshchev A.A., Shejba L.S. Rasseyanie zvukovoj volny ideal’nymi vytyanutymi sferoidami]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustical Physics*, 1970, iss. 16, no. 1, pp. 264–268.

15. Gutman T.L., Kleshchev A.A. Diffraction of elastic waves by an elastic spheroid. [Gutman T.L., Kleshchev A.A. Difrakciya uprugih voln na uprugom sferoide]. Collection of scientific works LCI. 1974, iss. 94, pp. 31–37.

16. Kleshchev A.A., Rostovtsev D.M. Sound scattering by elastic and liquid ellipsoidal shells of revolution. [Kleshchev A.A., Rostovcev D.M. Rasseyanie zvuka uprugoj i zhidkoj ehllipsoidal’nymi obolochkami vrashcheniya]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustical Physics*, 1986, iss. 31, no. 5, pp. 691–694.

17. Kleshchev A.A., Klyukin I.I. Acoustic Basics. [Kleshchev A.A., Klyukin I.I. Osnovy gidroakustiki]. Leningrad, 1987, 224 p.
18. Kleshchev A.A. Hydroacoustic Diffusers. [Kleshchev A.A. Gidroakusticheskie rasseivateli]. St. Petersburg, 2011, 267 p.
19. Kleshchev A.A. Diffraction of sound from a point source on an elastic cylindrical shell. [Kleshchev A.A. Difrakciya zvuka ot tochechnogo istochnika na uprugoj cilindricheskoj obolochke]. *Akusticheskij zhurnal — Acoustical Physics*, 2004, iss. 50, no. 4, pp. 86–89.
20. Buchwald V. T. Rayleigh waves in transversely isotropic media. *Quart. Journ. Mech. and Applied. Math.*, 1964, vol. XIV, part 2, pp. 293–317.
21. Ahmad F. Guided waves in a transversely isotropic cylinder immersed in a fluid. *J.A.S.A.*, 2004, vol. 109, no. 2, pp. 886–890.
22. Fan Y., Sinclair A.N., Honarvar F. Scattering of a plane acoustic wave from a transversely isotropic cylinder encased in a solid elastic medium. *JASA*, 1999, vol. 106, no. 2, part 4, pp. 1229–1236.
23. Miniovich I.Ya., Pernik A.D., Petrovsky V.S. Hydrodynamic sound sources. [Miniovich I.Ya., Pernik A.D., Petrovskij V.S. Gidrodinamicheskie istochniki zvuka]. Leningrad, 1971, 480 p.
24. Kleshchev A.A. Physical model of sound emission by cylindrical and spheroidal shells excited by turbulent pulsations of a fluid flow. [Kleshchev A.A. Fizicheskaya model' izlucheniya zvuka cilindricheskoj i sferoidal'noj obolochkami, vzbuzhdaemymi turbulentnymi pul'sაციями potoka zhidkosti]. Proceedings of the 14th session of RAO, 2004, pp. 271–275.
25. Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A. Physical model of sound radiation under the influence of turbulent pulsations. [Il'menkov S.L., Kleshchev A.A. Fizicheskaya model' izlucheniya zvuka pod dejstviem turbulentnyh pul'sაციj]. Proceedings of the scientific conference «Bubnov readings», 2004, pp. 102–103.
26. Ilmenkov S.L., Kleshchev A.A., Rumyantsev S.B. Three-dimensional problem of sound emission by an elastic spheroidal shell under the action of a point source. [Il'menkov S.L., Kleshchev A.A., Rumyantsev S.B. Trekhmernaya zadacha izlucheniya zvuka uprugoj sferoidal'noj obolochkoj pod dejstviem tochechnogo istochnika]. Abstracts of the 8th scientific and technical conference on aviation acoustics, 1986.

Ильменков Сергей Львович, кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры судовой автоматизации и измерений СПбГМТУ, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ilms@rambler.ru

Ilmenkov Sergey Lvovich, Associate Professor, Department of Marine Automation and Measurement, Saint-Petersburg State Marine Technical University, Saint-Petersburg, Russia
E-mail: ilms@rambler.ru

Пересёлков Сергей Алексеевич, доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математической физики и информационных технологий ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: pereselkov@yandex.ru

Pereselkov Sergey Alexeevich, Head of the Department of Mathematical Physics and Information Technology, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: pereselkov@yandex.ru

Ткаченко Сергей Александрович, аспирант кафедры математической физики и информационных технологий ВГУ, Воронеж, Россия

E-mail: sega-tk@mail.ru

Тел.: +7(473)220-87-48

Tkachenko Sergey Alexanderovich, Postgraduate Student, Department of Mathematical Physics and Information Technology, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: sega-tk@mail.ru

Tel.: +7(473)220-87-48

Рыбьянец Павел Викторович, аспирант кафедры математической физики и информационных технологий ВГУ, Воронеж, Россия

E-mail: pavel-rybjanec@rambler.ru

Тел.: +7(473)220-87-48

Rybyanets Pavel Viktorovich, Postgraduate Student, Department of Mathematical Physics and Information Technology, Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: pavel-rybjanec@rambler.ru

Tel.: +7(473)220-87-48