УДК 517.927.4

О ЧИСЛЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПРОИЗВОДНЫМИ ПО МЕРЕ*

С. А. Шабров[1], Е. А. Бородина[2], Ф. В. Голованева[1], М. Б. Давыдова[1]

[1] — *Воронежский государственный университет;*
[2] — *Воронежский государственный университет инженерных технологий*

Поступила в редакцию 01.06.2019 г.

Аннотация. В работе получены достаточные условия существования нескольких решений у нелинейной граничной задачи с производными по мере. При анализе решений краевой задачи четвертого порядка, мы используем поточечный подход, предложенный Ю. В. Покорным и показавший свою эффективность при изучении задач второго порядка. На основе полученных ранее оценок функции Грина граничной задачи удалось показать, что оператор, обращающий изучаемую нелинейную задачу, представимый в виде суперпозиции вполне непрерывного и непрерывного операторов, действует из конуса неотрицательных непрерывных функций в более узкое множество. Последнее и позволяет доказать существование нескольких решений у нелинейной граничной задачи с привлечением теории пространств с конусом.

Ключевые слова: граничная задача, нелинейная задача, число решений, производная по мере, негладкое решение.

ON THE NUMBER OF SOLUTIONS OF THE NONLINEAR BOUNDARY PROBLEM OF THE FOURTH ORDER WITH DERIVATIVES BY MEASURE

S. A. Shabrov, E. A. Borodina, F. V. Golovaneva, M. B. Davidova

Abstract. In this paper we obtain sufficient conditions for the existence of several solutions for a nonlinear boundary value problem with derivatives of the measure. In the analysis of the solutions of the boundary value problem of the fourth order, we use the point approach proposed by Yu. V. Pokorny and showed its effectiveness in the study of second-order boundary value problems. Based on previously obtained estimates of the Green's function of the boundary-value problem, it was possible to show that the operator inverting the studied nonlinear problem, representable as a superposition of completely continuous and continuous operators, acts from a cone of non-negative continuous functions in a narrower set. The latter allows us to prove the existence of several solutions to a nonlinear boundary value problem using the theory of spaces with a cone.

Keywords: boundary value problem, nonlinear problem, number of solutions, measure derivative, non-smooth solution.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время интенсивно изучаются дифференциальные уравнения с производными по мере. Так, для линейных уравнений второго порядка построена точная параллель классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений вплоть до осцилляционных теорем (см. [1–6]), получен ряд результатов для нелинейных краевых задач [7, 8].

* Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РНФ (проект 19–11–00197), выполняемого в Воронежском госуниверситете.

Отметим, что эффективность использования производных по мере объясняется следующим обстоятельством: для применения качественных методов анализа (теорем типа Ролля) решений дифференциальных уравнений необходимо знать значения функции и её производных в каждой точке, что с позиций теории обобщённых функций затруднительно. Здесь можно отметить работу Мышкиса А.Д. [9] — доказательство аналога теоремы Штурма о перемежаемости нулей для уравнения $u'' + qu = 0$ с обобщённым коэффициентом q.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Требуется получить достаточные условия существования нескольких различных решений задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru''_x)''_{\sigma} + uQ'_{\sigma} = f(x,u) \quad (x \in \overline{[0;\ell]}_{\sigma}); \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

с негладкими решениями. Уравнение в (1) задано на $\overline{[0;\ell]}_{\sigma}$ — расширении отрезка $[0;\ell]$ в котором каждая точка ξ, принадлежащая множеству $S(\sigma)$ — точек разрыва функции $\sigma(x)$, заменена на тройку собственных элементов $\{\xi_-, \xi, \xi_+\}$ бывшие ранее предельными.

Для точек ξ, принадлежащих множеству $\in S(\sigma)$, уравнение в (1) принимает вид

$$\Delta(pu''_{x\mu})'_x(\xi) - \Delta(ru'_x)(\xi) + u(\xi)\Delta Q(\xi) = f(\xi, u(\xi)),$$

где $\Delta\varphi(\xi) = \varphi(\xi + 0) - \varphi(\xi - 0)$ — полный скачок функции $\varphi(x)$ в точке ξ.

Под решением (1) понимается функция $u(x)$, удовлетворяющая граничным условиям $u(0) = u'_x(0) = u(\ell) = u'_x(\ell) = 0$, превращающая в верное равенство (почти всюду относительно меры σ, порождаемой функцией $\sigma(x)$) уравнение в (1).

Решение краевой задачи (1) мы будем искать в классе абсолютно непрерывных на $[0;\ell]$ функций $u(x)$, первая производная $u'_x(x)$ которых μ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, квазипроизводная $pu''_{x\mu}(x)$ — абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$, $\left(pu''_{x\mu}\right)'_x(x)$ — σ–абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Следуя работе [10], однородное уравнение $Lu = 0$ назовем неосциллирующим на $[0;\ell]$, если произвольное нетривиальное решение имеет не более трёх нулей с учетом кратностей.

Функция $f(x,u)$ порождает оператор суперпозиции

$$[Fu](x) = f(x,u(x)),$$

который непрерывно действует из $C[0;\ell]$ в $L_{p,\sigma}[0;\ell]$ — пространство измеримых на $[0;\ell]$ функций, суммируемых с p степенью ($1 \leqslant p < \infty$). Нормой в $L_{p,\sigma}[0;\ell]$ служит величина $\|f\|_{p,\sigma} = \left(\int\limits_0^{\ell} |f(x)|^p \, d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{p}}$. Для того, чтобы F непрерывно действовал из $C[0;\ell]$ в $L_{1,\sigma}[0;\ell]$ достаточно, чтобы $f(x,u)$ была совокупно равномерно $[\sigma \times u]$-непрерывна: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких точек (x_1,u_1) и (x_2,u_2), удовлетворяющих неравенствам $|\sigma(x_1) - \sigma(x_2)| < \delta$ и $|u_1 - u_2| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x_1,u_1) - f(x_2,u_2)| < \varepsilon$.

Будем говорить, что однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $[0;\ell]$, если всякое нетривиальное решение имеет на $[0;\ell]$ не более одного нуля.

Введем обозначение

$$K = \{u(x) \in C[0;\ell] | u(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [0;\ell]\}$$

Множество K является телесным, нормальным конусом в $C[0;\ell]$. В дальнейшем нам понадобится u_0-норма:

$$\|u\|_{u_0} = \sup_{0<x<\ell} \left|\frac{u(x)}{u_0(x)}\right|,$$

где $u_0(x) = \int\limits_0^x (x-\tau)\,d\mu(\tau) \cdot \int\limits_x^\ell (\tau - x)\,d\mu(\tau)$.

Как нетрудно видеть, $\|\cdot\|_{u_0}$ является нормой в пространстве E_{u_0} функций $u(x)$ из $C[0;\ell]$, для каждой из которых $\|u\|_{u_0}$ конечна, более того, E_{u_0} является полным пространством по этой норме. Множество $K_{u_0} = K \cap E_{u_0}$ является телесным конусом. Кроме того, отношение $u \leqslant v$, эквивалентно, по определению, включению $v - u \in K_{u_0}$.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Справедлива

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *однородное уравнение $Lu = 0$ не осциллирует на $[0;\ell]$;*

2) *$f(x,u)$ — равномерно $[\sigma \times u]$-непрерывна на $[0;\ell] \times R^1$;*

3) *функция $f(x,u)$ не убывает по u при каждом $x \in [0;\ell]$ и*

$$f(x,0) \geqslant 0; \tag{2}$$

4) *существует N пар чисел α_i,β_i, удовлетворяющих неравенствам*

$$0 \leqslant \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \alpha_n < \beta_n \tag{3}$$

$$f(x,\beta_k u_0(x)) < \frac{\beta_k}{\int\limits_0^\ell h_2(s)\,d\sigma(s)} \quad (x \in [0;\ell]). \tag{4}$$

5) *для каждого k существует множество $w_k \subset [0;\ell]$ положительной σ-меры такое, что*

$$f(x,\alpha_k u_0(x)) > \frac{1}{\int\limits_{w_k} h_1(s)\,d\sigma(s)} \quad (x \in [0;\ell], k = 1,\ldots,N) \tag{5}$$

Тогда задача (1) имеет $2N-1$ нетривиальных решений $\{u_i(x)\}_{i=1}^{i=2N-1}$, удовлетворяющих неравенствам

$$u_i(x) \geqslant 0 \quad (i = 1,2,\ldots,2N-1) \tag{6}$$

и

$$u_{2i-1}(x) \leqslant u_{2i+1}(x) \quad (i = 1,2,\ldots,N-1).$$

Неравенства (6) связывают лишь решения $u_i(x)$ с нечетными номерами. По отношению к этим решениям остальные расположены «между» ними в следующем смысле: при каждом $k = 1,2,\ldots,N-1$ существуют точки x'_k и x''_k такие, что

$$u_{2k-1}(x'_k) < u_{2k}(x'_k) \quad \text{и} \quad u_{2k}(x''_k) \leqslant u_{2k+1}(x''_k).$$

Доказательство. Вопрос о разрешимости краевой задачи (1) можно заменить вопросом о разрешимости нелинейного интегрального уравнения

$$u(x) = \int\limits_0^\ell G(x,s) f(s,u(s))\, d\sigma(s), \tag{7}$$

где $G(x,s)$ — функция влияния граничной задачи

$$\begin{cases} Lu \equiv (pu''_{x\mu})''_{x\sigma} - (ru''_x)''_\sigma + uQ'_\sigma = {F^*}'_\sigma(x) \quad (x \in \overline{[0;\ell]}_\sigma); \\ u(0) = u'_x(0) = 0; \\ u(\ell) = u'_x(\ell) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

здесь $F^*(x)$ — σ-абсолютно непрерывна на $[0;\ell]$.

Уравнение (7) можно записать в виде

$$u = GFu, \tag{9}$$

где G — интегральный оператор с ядром $G(x,s)$:

$$(GF^*)(x) = \int\limits_0^\ell G(x,s) \frac{d}{d\sigma} F^*(s)\, d\sigma(s)$$

и F — оператор суперпозиции: $(Fu)(x) = f(x,u(x))$.

Уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$\frac{u(x)}{u_0(x)} = \int\limits_0^l \frac{G(x,s)}{u_0(x)} f\left(s, \frac{u(s)}{u_0(s)} \cdot u_0(s)\right) d\sigma(s),$$

или

$$\widehat{u}(x) = (\widehat{G}\widehat{F}\widehat{u})(x),$$

где $\widehat{G}$ — интегральный оператор с ядром $\dfrac{G(x,s)}{u_0(x)}$, $\widehat{F}$ — оператор суперпозиции $(\widehat{F}u)(x) = f(x,u(x) \cdot u_0(x))$ и $\widehat{u}(x) = \dfrac{u(x)}{u_0(x)}$.

По условию теоремы $\widehat{F}$ непрерывно действует из E_{u_0} в $L_{1,\sigma}[0;\ell]$; $\widehat{G}$ — действует и вполне непрерывен из $L_{1,\sigma}[0;\ell]$ в E_{u_0}. Поэтому, $\widehat{G}\widehat{F}$ действует и вполне непрерывен из E_{u_0} в E_{u_0}.

Покажем, что $\widehat{G}\widehat{F}$ удовлетворяет всем условиям теоремы из [11], § 45, стр. 373 (при соответствующем выборе E и K). Для удобства читателя приведем формулировку этой теоремы.

Теорема. *Пусть K — нормальный телесный конус в банаховом пространстве E и A — действующий в E монотонный вполне непрерывный оператор. Пусть существует N пар элементов*

$$u_1 \leqslant v_1 \leqslant u_2 \leqslant v_2 \leqslant \ldots \leqslant u_N \leqslant v_N. \tag{10}$$

таких, что

$$u_i \ll Au_i, \quad Av_i \ll v_i \quad (i = 1,2,\ldots,N). \tag{11}$$

Тогда существует $2N-1$ неподвижных точек $x_1,x_2,\ldots,x_{2N+1}$ оператора A, удовлетворяющих неравенствам

$$u_i \leqslant x_{2i-1} \leqslant v_i, \quad u_i \leqslant x_{2i} \leqslant v_{i+1}$$

$$u_{i+1} \nleqslant x_{2i}, \quad x_{2i} \nleqslant v_i$$

при всех $i = 1,2,\ldots,N$.

Положим $E = E_{u_0}$ и в качестве конуса K возьмем множество K_{u_0}. Телесность и нормальность этого конуса очевидны, причем $u \gg 0$ эквивалентно $u(x) > 0$ при всех $x \in [0;\ell]$. По условию теоремы, $f(x,u)$ монотонна по u. Отсюда и из неотрицательности $\dfrac{G(x,s)}{u_0(x)}$ следует монотонность оператора $\widehat{G}\widehat{F}$. Компактность установлена ранее.

Введем в рассмотрение функции

$$u_i(x) \equiv \alpha_i \quad \text{и} \quad v_i(x) \equiv \beta_i \quad (i = 1,2,\ldots,N).$$

Из (3) вытекает, что функции $u_i(x)$ и $v_i(x)$ удовлетворяют неравенствам (10). Докажем выполнимость (11).

Интегральный оператор $\widehat{G}$ с ядром $\widehat{G}(x,s)$ обладает свойством сильной положительности: для любой неотрицательной нетривиальной функции $f(x)$ ее образ $(\widehat{G}f)(x)$ есть функция строго положительная. По условию теоремы функция

$$w(x) = \beta_i - \int\limits_0^\ell h_2(s)\,d\sigma(s)\cdot f(x,\beta_i u_0(x))$$

неотрицательна и отлична от тождественного нуля. Поэтому $(\widehat{G}\widehat{F}w)(x) \gg 0$, что означает

$$\beta_i \int\limits_0^\ell \frac{G(x,s)}{u_0(x)}\,d\sigma(s) > \int\limits_0^\ell h_2(s)\,d\sigma(s)\cdot(\widehat{G}\widehat{F})v_i(x). \tag{12}$$

Так как $\dfrac{G(x,s)}{u_0(x)} \leqslant h_2(s)$ и $\displaystyle\int\limits_0^\ell h_2(s)\,d\sigma(s) > 0$, то из (12) вытекает

$$\beta_i > (\widehat{G}\widehat{F}v_i)(x)$$

для $x \in [0;\ell]$. Последнее и означает что

$$(\widehat{G}\widehat{F}v_i) \ll v_i.$$

Докажем теперь неравенство $\widehat{G}\widehat{F}u_k \geqslant u_k$. При фиксированном k рассмотрим функцию

$$u(x) = \begin{cases} f(x,\alpha_k u_0(x)) - \dfrac{\alpha_k}{\displaystyle\int\limits_{w_k} h_1(s)\,d\sigma(s)}, & x \in w_k, \\ 0, & x \notin w_k \end{cases}$$

По условию $u(x) \geqslant 0$ и положительна на множестве положительной меры. Сильно положительным оператором $\widehat{G}\widehat{F}$ эта функция переводится в строго положительную функцию $(\widehat{G}\widehat{F}u) > 0$ на $[0;\ell]$, другими головами, $\widehat{G}\widehat{F}u \gg 0$. Так как

$$G(x,s) \geqslant u_0(x)h_1(s),$$

то

$$\int\limits_{w_k} \frac{G(x,s)}{u_0(x)} f(s,\alpha_k u_0(s))\,d\sigma(s) \geqslant \frac{\alpha_k \displaystyle\int\limits_{w_k} \frac{G(x,s)}{u_0(x)}\,d\sigma(s)}{\displaystyle\int\limits_{w_k} h_1(s)\,d\sigma(s)} \geqslant \alpha_k = u_k(x). \tag{13}$$

С другой стороны, из (2) и монотонности по u функции $f(x,u)$ вытекает неотрицательность функции $f(x;\alpha)$ при любом $\alpha \geqslant 0$. Поэтому

$$(\widehat{G}\widehat{F}u_k)(x) \geqslant \int\limits_{w_k} \frac{G(x,s)}{u_0(x)} f(s,\alpha_k u_0(s))\, d\sigma(s).$$

Отсюда и из (13) следует $\widehat{G}\widehat{F}u_k \gg u_k$.

Итак, для оператора $\widehat{G}\widehat{F}$ выполнены все условия теоремы 45.3 из [11]. Теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покорный, Ю. В. Осцилляционная теория Штурма–Лиувилля для импульсных задач / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, С. А. Шабров // Успехи математических наук. — 2008. — Т. 63, № 1. — С. 111–154.

2. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Ю. В. Покорный и др. — М. : Физматлит, 2004. — 272 с.

3. Осцилляционный метод Штурма в спектральных задач / Ю. В. Покорный, Ж. И. Бахтина, М. Б. Зверева, С. А. Шабров. — М. : Физматлит, 2009. — 192 с.

4. Pokornyi, Yu. V. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients / Yu. V. Pokornyi, S. A. Shabrov // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 119, № 6. — P. 769–787.

5. О нерегулярном расширении осцилляционной теории спектральной задачи Штурма-Лиувилля / Ю. В. Покорный, М. Б. Зверева, А. С. Ищенко, С. А. Шабров // Математические заметки. — 2007. — Т. 82, № 4. — С. 578–582.

6. Pokornyi, Yu. V. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters / Yu. V. Pokornyi, M. B. Zvereva, S. A. Shabrov // Ukrainian Mathematical Journal. — 2008. — V. 60, iss. 1. — P. 108–113.

7. Давыдова, М. Б. О числе решений нелинейной краевой задачи с интегралом Стилтьеса / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11. № 4. — С. 13–17.

8. Давыдова, М. Б. О нелинейных теоремах сравнения для дифференциальных уравнений второго порядка с производными Радона-Никодима / М. Б. Давыдова, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 155–160.

9. Мышкис, А. Д. О решениях линейного однородного двумерного дифференциального неравенства второго порядка с обобщенными коэффициентами / А. Д. Мышкис // Дифференциальные уравнения. — 1996. — Т. 32, № 5. — С. 615–619.

10. Шабров, С. А. Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2015. — № 2. — С. 168–179.

11. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М. : Наука, 1975. — 512 с.

12. Шабров, С. А. Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями / С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 232–250.

13. Шабров, С. А. О необходимом условии минимума одного квадратичного функционала с интегралом Стилтьеса / С. А. Шабров // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия : Математика. Механика. Информатика. — 2012. — Т. 12, № 1. — С. 52–55.

14. Об одной математической модели шестого порядка с негладкими решениями / А. Д. Баев, Е. А. Бородина, Ф. В. Голованева, С. А. Шабров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 93–105.

REFERENCES

1. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillation theory of the Sturm-Liouville problem for impulsive problems. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnaya teoriya Shturma–Liuvillya dlya impul'snyx zadach]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 2008, vol. 63, iss. 1, pp. 111–154.

2. Pokorny Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev B.L. et al. Differential equations for geometric graphs. [Pokornyj Yu.V., Penkin O.M., Pryadiev V.L. i dr. Differencial'nye uravneniya na geometricheskix grafax]. Moscow: Phizmatlit, 2004, 272 p.

3. Pokorny Yu.V., Bakhtina G.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Sturm oscillation method in spectral problems. [Pokornyj Yu.V., Baxtina Zh.I., Zvereva M.B., Shabrov S.A. Oscillyacionnyj metod Shturma v spektral'nyx zadach]. Moscow: Phizmatlit, 2009, 192 p.

4. Pokornyi Yu.V., Shabrov S.A. Toward a Sturm-Liouville theory for an equation with generalized coefficients. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 119, no. 6, pp. 769–787.

5. Pokorny Yu.V., Zvereva M.B., Ishchenko A.S., Shabrov S.A. Irregular Extension of oscillation theory of spectral problem Sturm-Liouville. [Pokornyj Yu.V., Zvereva M.B., Ishhenko A.S., Shabrov S.A. O neregulyarnom rasshirenii oscillyacionnoj teorii spektral'noj zadachi Shturma-Liuvillya]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2007, vol. 82, no. 4, pp. 578–582.

6. Pokornyi Yu.V., Zvereva M.B., Shabrov S.A. On Extension of the Sturm-Liouville Oscillation Theory to Problems with Pulse Parameters. Ukrainian Mathematical Journal, 2008, vol. 60, iss. 1, pp. 108–113.

7. Davydova M.B., Shabrov S.A. On the number of solutions of a nonlinear boundary value problem with a Stieltjes integral. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O chisle reshenij nelinejnoj kraevoj zadachi s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanic. Computer*, 2011, vol. 11, no. 4, pp. 13–17.

8. Davydova M.B., Shabrov S.A. Nonlinear comparison theorems for differential equations second-order derivatives of the Radon-Nikodym. [Davydova M.B., Shabrov S.A. O nelinejnyx teoremax sravneniya dlya differencial'nyx uravnenij vtorogo poryadka s proizvodnymi Radona-Nikodima]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 1, pp. 155–160.

9. Myshkis A.D. On solutions of linear homogeneous two-dimensional second-order differential inequality with generalized coefficients. [Myshkis A.D. O resheniyax linejnogo odnorodnogo dvumernogo differencial'nogo neravenstva vtorogo poryadka s obobshhennymi koe'fficientami]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 5, pp. 615— 619.

10. Shabrov S. A. About the estimates of the function influence of a mathematical model fourth order. [Shabrov S. A. Ob ocenkax funkcii vliyaniya odnoj matematicheskoj modeli chetvertogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2015, no. 2, pp. 168–179.

11. Krasnoselsky M.A., Zabreiko P.P. Geometric Nonlinear Analysis Methods. [Krasnosel'skiyj M.A., Zabreyjko P.P. Geometricheskie metody nelineyjnogo analiza]. Moscow, 1975, 512 p.

12. Shabrov S.A. Mathematical model of small deformations of a bar system with internal features. [Shabrov S.A. Ob odnoj matematicheskoj modeli malyx deformacij sterzhnevoj sistemy s vnutrennimi osobennostyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013. no. 1, pp. 232–250.

13. Shabrov S.A. On a necessary condition of at least one quadratic functional with an

integral Stieltjes. [Shabrov S.A. O neobxodimom uslovii minimuma odnogo kvadratichnogo funkcionala s integralom Stilt'esa]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mexanika. Informatika — Proceedings of the University of Saratov. New series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2012, vol. 12, no. 1, pp. 52–55.

14. Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. About the mathematical model of sixth order with nonsmooth solutions. [Baev A.D., Borodina E.A., Golovaneva F.V., Shabrov S.A. Ob odnoyj matematicheskoyj modeli shestogo poryadka s negladkimi resheniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 93–105.

Шабров Сергей Александрович, доктор физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Тел.: (473)220–86–90

Shabrov Sergey Alexandrovich, doctor of physical-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: shabrov_s_a@math.vsu.ru
Tel.: (473)220–86–90

Бородина Е. А., ассистент кафедры высшей математики и информационных технологий, Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия
E-mail: eaborodina@inbox.ru

Borodina E. A., assistant of the department of higher mathematics and information technologies, Voronezh state University of engineering technologies, Voronezh, Russia
E-mail: eaborodina@inbox.ru

Голованёва Фаина Валентиновна, доцент кафедры уравнений в частных производных и теории вероятностей математического факультета Воронежского государственного университета, кандидат физико-математических наук, г. Воронеж, Россия
E-mail: gfainav@mail.ru

Golovaneva Faina Valentinovna, Associate Professor of partial differential equations and probability theory, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Candidate of Physics and Mathematics, Voronezh, Russia
E-mail: gfainav@mail.ru

Давыдова Майя Борисовна, кандидат физико-математических наук, доцент каф. математического анализа ВГУ, Воронеж, Россия
E-mail: mbd@vsu.ru
Тел.: (473)220–86–90

Dabidova Maiya Borisovna, Candidate of physical-mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: mbd@vsu.ru
Tel.: (473)220–86–90