УДК 004.825

О ЛОГИЧЕСКОЙ РЕДУКЦИИ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С НЕЧЕТКИМИ ПРАВИЛАМИ

С. Д. Махортов, И. В. Клейменов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.07.2017 г.

Аннотация. Алгебраическая теория LP-структур предназначена для моделирования и оптимизации продукционных и подобных им систем в информатике. В ее рамках ранее были получены результаты, позволяющие обосновывать решение ряда задач для логических систем продукционного типа: эквивалентные преобразования, устранение избыточности, верификация, ускорение обратного вывода.

В настоящей работе вводится и исследуется обобщенная LP-структура, выразительные возможности которой охватывают *нечеткие* продукционные системы. Рассмотрены стандартные вопросы, связанные с теорией LP-структур, а именно: замкнутость, эквивалентные преобразования, логическая редукция. В результате возможности теории LP-структур оказываются доступными при построении и исследовании интеллектуальных систем более широкого класса.

Ключевые слова: алгебраическая система, нечеткие продукции, LP-структура, логическое замыкание, логическая редукция.

ON LOGICAL REDUCTION OF AN ALGEBRAIC MODEL OF THE INTELLECTUAL SYSTEM WITH FUZZY RULES

S. D. Makhortov, I. V. Kleymenov

Abstract. The algebraic theory of LP-structures is intended for modeling and optimization of production and similar systems in computer science. In its framework, results there were previously obtained results which allow to substantiate and automate the solution of a number of problems for production-type logical systems: equivalent transformations, elimination of redundancy, verification, acceleration of backward inference.

In this paper, we introduce and study a generalized LP-structure, the expressive capabilities of which cover fuzzy production systems. Standard issues related to the theory of LP-structures are considered, namely: closure, equivalent transformations, logical reduction. As a result, the possibilities of the theory of LP-structures become available in the construction and study of intelligent systems of a wider class.

Keywords: algebraic system, fuzzy productions, LP structure, logical closure, logical reduction.

ВВЕДЕНИЕ

Основу построения и исследования формальных моделей компьютерных систем предоставляют алгебраические структуры [1]. Это в полной мере относится и к инженерии знаний, включающей широко распространенные на практике продукционные системы [2–4].

Ранее был получен ряд результатов, связанных с логическими системами продукционного типа. Разработана основанная на алгебраических решетках теория LP-структур (lattice production structures) [5], которая эффективно решает задачи эквивалентных преобразований, верификации и минимизации баз знаний. Предложен и исследован метод обратного логического вывода (релевантный LP-вывод) [6], снижающий число обращений к внешним источникам информации. Впоследствии теория была обобщена для моделирования распределенных продукционных систем [7].

Особенностью современных интеллектуальных систем является нечеткий характер моделируемых знаний [8]. Поэтому представляется актуальным распространение теории LP-структур на нечеткие продукционные системы. Некоторые шаги в этом направлении были сделаны в работах [9–10]. Введены понятия, характеризующие нечеткость LP-структуры, и изучены некоторые полезные свойства нечеткого LP-вывода. Однако не был затронут ряд важных аспектов теории, таких как замыкание, эквивалентные преобразования и эквивалентная минимизация нечетких LP-структур.

Настоящая работа посвящена обобщению теории LP-структур для управления нечеткими базами знаний и исследования нечеткого логического вывода.

Введена терминология FLP-структур с нечетким логическим отношением (Fuzzy LP-структуры). Дано определение замыкания нечеткого бинарного отношения на решетке, представлена теорема о его существовании. Она позволяет ввести понятие эквивалентных FLP-структур, в приложениях — эквивалентных баз знаний. Сформулирована теорема об эквивалентных преобразованиях FLP-структуры. Ее практическое значение — способ автоматизированных преобразований нечетких баз знаний.

Введено понятие логической редукции FLP-структуры. Доказаны теоремы о ее существовании и способе построения — основные в настоящей работе. Для прикладных систем они обосновывают эквивалентную минимизацию нечетких баз знаний.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19–07–00037.

1. НЕЧЕТКИЕ LP-СТРУКТУРЫ

Вначале введем базовые понятия нечетких LP-структур. Исходные для них основы теории решеток, нечетких множеств и бинарных отношений изложены, например, в [11–12].

Нечеткое множество $A = (F,\mu_F)$ определяется функцией принадлежности $\mu_F : F \to [0,1]$ на некотором (обычном) множестве F. Значение $\mu_F(a)$ называется степенью принадлежности a к S. Нечеткое бинарное отношение R на множестве F — это нечеткое множество упорядоченных пар элементов из F с заданной функцией принадлежности $\mu_R : F \times F \to [0,1]$. Отношение R на множестве F называется *рефлексивным*, если для любого $a \in F$ справедливо $\mu_R(a,a) = 1$.

Для моделирования нечеткого логического вывода будем использовать композицию нечетких отношений в классической семантике, а именно — (max-min)-композицию. Для отношения R на множестве F композиция $R^2 = R \circ R$ определяется так: $\mu_{R^2}(a,c) = \max\limits_b(\min(\mu_R(a,b),\mu_R(b,c)))$, где $a,b,c \in F$.

Нечеткое бинарное отношение R на множестве F называется *транзитивным*, если для любых $a,b,c \in F$ справедливо $\mu_R(a,c) \geqslant \min(\mu_R(a,b),\mu_R(b,c))$. Свойство транзитивности R эквивалентно вложению $R^2 \subseteq R$ в смысле нечетких множеств. Существует замыкание произвольного нечеткого отношения относительно свойств рефлексивности и транзитивности. Обзор алгоритмов его построения представлен в [13].

Известна также задача нахождения транзитивной редукции: для отношения R строится минимальное нечеткое отношение R' такое, что его транзитивное замыкание совпадает с транзитивным замыканием R. Ее решению посвящена, в частности, работа [14].

Пусть дана атомно-порожденная решетка F [11], представляющая собой множество всех конечных подмножеств универсума F. На F рассматривается (вторичное) нечеткое отношение R, содержащее $\supseteq$, а также обладающее транзитивностью и дистрибутивностью. Второе свойство требует уточнения.

Определение 1.1. Нечеткое бинарное отношение $R = (\mathrm{F},\mu_R)$ называется дистрибутивным, если для любых $A,B_1,B_2 \in \mathrm{F}$ справедливо $\mu_R(A,B_1 \cup B_2) \geqslant \min(\mu_R(A,B_1),\mu_R(A,B_2))$.

Отношение с указанными выше тремя свойствами будем называть *продукционно-логическим*, или, для краткости – просто *логическим.*

Определение 1.2. Под нечеткой LP-структурой (FLP-структурой) подразумевается алгебраическая система, представляющая собой решетку F, на которой задано продукционно-логическое отношение R.

Предлагаемый подход к исследованию продукционных систем основан на представлении множеств фактов и правил FLP-структурой. Каждый факт отображается атомом решетки, предпосылка и заключение правила – соответствующими элементами решетки, а правила представляются парами нечеткого бинарного отношения R.

Далее для введенного класса алгебраических систем обсуждаются стандартные вопросы теории LP-структур: о логическом замыкании, эквивалентных преобразованиях, логической редукции.

2. О ЗАМЫКАНИИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ FLP-СТРУКТУР

Логическим замыканием нечеткого отношения R называется наименьшее логическое отношение, содержащее R. Оно по сути содержит всевозможные логические выводы в моделируемой продукционной системе. Для выяснения вопроса о его существовании вводится отношение логической связи.

Определение 2.1. Пусть задано нечеткое отношение R на решетке F. Отношение $\bar{R}$ логической связи пар $A,B \in \mathrm{F}$ определяется функцией принадлежности $\bar{\mu}_R$, значение $\bar{\mu}_R(A,B)$ которой вычисляется как *максимальное* из следующих вариантов его вычисления:

1) $\bar{\mu}_R(A,B) = \mu_R(A,B)$;

2) если $A \supseteq B$, то $\bar{\mu}_R(A,B) = 1$, иначе $= 0$;

3) $\bar{\mu}_R(A,B) = \min(\bar{\mu}_R(A,B_1),\bar{\mu}_R(A,B_2))(\forall B_1,B_2 : B_1 \cup B_2 = B)$;

4) $\bar{\mu}_R(A,B) = \min(\bar{\mu}_R(A,C),\bar{\mu}_R(C,B))(\forall C \in \mathrm{F})$.

Замечание 2.1. На основании определения 2.1 нетрудно заметить, что если $R_1 \subseteq R_2$, то $\bar{R}_1 \subseteq \bar{R}_2$.

Рекурсивное определение 2.1 по данному R задает новое нечеткое отношение $\bar{R}$ на решетке F, которое содержит R, $\supseteq$, а также обладает дополнительными свойствами. Условия 1)-4) будем также называть правилами вывода (логических связей). Правило 3) естественно назвать *дистрибутивным*, а правило 4) – *транзитивным.*

При вычислении логической связи шагом вывода будем называть применение ровно одного правила, возможно, одновременно к некоторому конечному множеству элементов решетки. Например:

- если $B_{1,t} \cup B_{2,t} = B_t$, $\bar{\mu}_R(A_t,B_{1,t}) > 0,\bar{\mu}_R(A_t,B_{2,t}) > 0$, то $\bar{\mu}_R(A_t,B_t) = \min(\bar{\mu}_R(A_t,B_{1,t}),\bar{\mu}_R(A_t,B_{2,t}))$, $t \in T$;
- если $\bar{\mu}_R(A_t,C_t) > 0$, $\bar{\mu}_R(C_t,B_t) > 0$, то $\bar{\mu}_R(A_t,B_t) = \min(\bar{\mu}_R(A_t,C_t),\bar{\mu}_R(C_t,B_t))$, $t \in T$.

Уровнем рекурсии при вычислении $\bar{\mu}_R(A,B)$ будем называть количество шагов вывода, необходимое для его нахождения. При этом учитываются лишь применения рекурсивных правил 3)-4). Для логической связи, основанной только на правилах 1)-2), уровень рекурсии, очевидно, равен нулю.

К шагам вывода величины $\bar{\mu}_R(A,B)$ будем применять слова "начальный", "последний", а также "предыдущий", "следующий" и так далее. При этом имеется в виду продвижение в направлении прямого логического вывода, то есть от пар исходного отношения $(R \bigcup \supseteq)$ к паре отношения $\bar{R}$.

Лемма 2.1. Пусть R — логическое отношение на решетке F и $A,B \in \mathrm{F}$. Тогда справедливо $\bar{\mu}_R(A,B) = \mu_R(A,B)$, то есть $\bar{R} = R$.

Доказательство. Проведем его с помощью индукции по m — уровню рекурсии в вычислении $\bar{\mu}_R(A,B)$. При $m = 0$ имеет место одно из условий 1)-2) определения 2.1. Случай 1) непосредственно означает справедливость доказываемого утверждения. Если же было применено 2), то и в этом случае $\mu_R(A,B) = 1 = \bar{\mu}_R(A,B)$, поскольку логическое отношение R содержит и $\supseteq$.

Предположим далее, что лемма верна для некоторого $m \geqslant 0$, и докажем ее утверждение при уровне рекурсии $m + 1$. В этом случае новые для рассмотрения варианты могут дать правила 3)-4).

Рассмотрим вариант, когда величина $\bar{\mu}_R(A,B)$ происходит из правила 3) определения 2.1. При этом величины $\bar{\mu}_R(A,B_1)$,$\bar{\mu}_R(A,B_2)$ найдены с уровнем рекурсии $\leqslant m$ и поэтому по предположению индукции $\bar{\mu}_R(A,B_1) = \mu_R(A,B_1)$,$\bar{\mu}_R(A,B_2) = \mu_R(A,B_2)$. Тогда, в силу дистрибутивности R, получим

$$\mu_R(A,B) \geqslant \min(\mu_R(A,B_1),\mu_R(A,B_2)) = \bar{\mu}_R(A,B). \tag{1}$$

Однако, поскольку отношение R содержится в $\bar{R}$, последнее неравенство может быть выполнено лишь при $\mu_R(A,B) = \bar{\mu}_R(A,B)$.

Случай, когда при вычислении $\bar{\mu}_R(A,B)$ последним было использовано правило 4), рассматривается аналогично.

Теорема 2.1. Для произвольного отношения R на решетке F логическое замыкание существует и совпадает с нечетким отношением логической связи $\bar{R}$, определяемым функцией принадлежности $\mu_{\bar{R}} = \bar{\mu}_R$.

Доказательство. Заметим вначале, что при произвольном R соответствующее ему отношение $\bar{R}$ является логическим. Действительно, в силу условия 2) определения 2.1 оно содержит $\supseteq$, из 3) следует его дистрибутивность, а правило 4) означает транзитивность данного отношения. Далее, в силу условия 1) определения 2.1, отношение $\bar{R}$ содержит R. Для доказательства теоремы осталось показать, что это — наименьшее из логических отношений, обладающих этим свойством.

Пусть R_2 — любое логическое отношение, содержащее R. Тогда (см. замечание 2.1) $R \subseteq R_2 \Rightarrow \bar{R} \subseteq \bar{R}_2$. С другой стороны, по лемме 2.1 имеем $\bar{R}_2 = R_2$. Таким образом, построенное в определении 2.1 отношение $\bar{R}$ содержится в произвольно выбранном R_2, и, таким образом, является наименьшим логическим отношением, содержащим R.

Понятие логического замыкания и доказанная теорема о его существовании позволяют рассмотреть вопросы эквивалентности нечетких LP-структур. Эти результаты в настоящем разделе приведены без доказательств. Они планируются к опубликованию в отдельной статье.

Определение 2.2. Два нечетких отношения R,P называются (*логически*) *эквивалентными* ($R \sim P$), если их логические замыкания совпадают. Эквивалентным преобразованием нечеткого отношения R называется такая модификация его функции принадлежности ($\mu_R \to \mu_P$), что полученное в результате новое отношение P логически эквивалентно R.

Определение 2.3. Пусть R — нечеткое отношение на решетке F с функцией принадлежности μ_R и $M = \{(A_t,B_t)|\, A_t,B_t \in \mathrm{F};\, t \in T\}$ — некоторое множество упорядоченных пар, причем $\min\limits_t(\mu_R(A_t,B_t)) > 0$. Пара (A,B) называется (логически) выводимой из M, если $\bar{\mu}_R(A,B) \geqslant \min\limits_t(\mu_R(A_t,B_t))$.

Замечание 2.2. Пара (A,B), для которой текущее значение функции принадлежности получено на любом шаге вывода с помощью правил 3)-4) определения 2.1 является выводимой из используемых в этом процессе пар.

Следствие 2.1. Пусть R — нечеткое отношение на решетке F с функцией принадлежности μ_R, $M = \{(A_t,B_t) |\, A_t,B_t \in \mathrm{F};\ t \in T\}$ — некоторое множество пар, а пара (A,B) выводима из M. Определим новое отношение R' следующей функцией принадлежности:

$$\mu_{R'}(X,Y) = \begin{cases} \max(\mu_R(A,B), \min\limits_t(\mu_R(A_t,B_t))), \text{ при } X = A, Y = B \\ \mu_R(X,Y), \text{ иначе} \end{cases}. \tag{2}$$

Тогда отношение R' эквивалентно R.

Следствие 2.2. Пусть R — нечеткое отношение на решетке F с функцией принадлежности μ_R, а (A,B) — произвольная пара. Определим новое отношение R' следующей функцией принадлежности:

$$\mu_{R'}(X,Y) = \begin{cases} \bar{\mu}_R(A,B), \text{ при } X = A, Y = B \\ \mu_R(X,Y), \text{ иначе} \end{cases}.$$

Тогда отношение R' эквивалентно R.

Теорема 2.2. Пусть R_1,R_2,R_3,R_4 — нечеткие отношения на общей решетке F. Если при этом $R_1 \sim R_2$ и $R_3 \sim R_4$, то $R_1 \cup R_3 \sim R_2 \cup R_4$.

Следствие 2.3. Пусть R_1,R_2,R_3 — нечеткие отношения на общей решетке F. Если при этом $R_1 \sim R_2$, то $R_1 \cup R_3 \sim R_2 \cup R_3$.

Следствия 2.1–2.3 обосновывают принципы локально-эквивалентных преобразований FLP-структур. Они могут быть, в частности, использованы для эквивалентного упрощения нечетких отношений на решетке.

3. СТРУКТУРА ЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

В предыдущих работах, посвященных исследованию свойств обычных (“четких”) LP-структур [5], было показано, что логическое замыкание отношения R на решетке совпадает с транзитивным замыканием другого отношения $\widetilde{R} \supseteq R$, построенного по R в виде “дистрибутивного многообразия”. Этот факт позволяет свести изучение ряда вопросов о логических отношениях к задачам о транзитивных отношениях.

В следующем разделе будут получены аналогичные результаты для нечетких отношений. Для достижения указанной цели вначале рассмотрим некоторые свойства логических связей в нечеткой LP-структуре.

Лемма 3.1. Если в определении 2.1 дистрибутивное правило 3) заменить на нижеследующее 3’), то по новому определению получится то же самое отношение $\bar{R}$.

3’) $\bar{\mu}_R(A,B) = \min(\bar{\mu}_R(A_1,B_1),\bar{\mu}_R(A_2,B_2))$ $(A_1 \cup A_2 = A;\ B_1 \cup B_2 = B)$.

Доказательство. Утверждение леммы следует из того факта, что получаемое в результате модифицированного определения отношение $\bar{R}$ по-прежнему представляет собой логическое замыкание R. Указанный факт, как и прежде, обосновывается леммой 2.1 и теоремой 2.1, доказательства которых получат минимальные изменения. В доказательстве леммы 2.1 вместо (1) достаточно учесть следующие неравенства для логического отношения R:

$$\mu_R(A,B) \geqslant \min(\mu_R(A,B_1),\mu_R(A,B_2)) \geqslant \min(\mu_R(A_1,B_1),\mu_R(A_2,B_2)) = \bar{\mu}_R(A,B).$$

В доказательстве теоремы 2.1 следует отметить, что условие 3’) (как и прежняя его версия) порождает дистрибутивность отношения $\bar{R}$, если учесть случай $A_1 = A_2 = A$.

Очевидно, что правило вывода 3) определения 2.1 является частным случаем нового правила 3').

Следствие 3.1. Пусть R — нечеткое отношение на решетке F с функцией принадлежности μ_R и $\{(A_t,B_t) | A_t,B_t \in \mathrm{F};\ t \in T\}$ — конечное множество пар. Обозначим $A = \bigcup A_t$, $B = \bigcup B_t$. Определим новое отношение R' функцией принадлежности в равенстве (2). Тогда отношение R' эквивалентно R.

Доказательство данного утверждения состоит в последовательном применении конечное число раз обоснованного в лемме 3.1 правила вывода 3'), а также следствия 2.1.

Лемма 3.2. Пусть R — нечеткое отношение на решетке. Тогда при выводе произвольной логической связи $\bar{\mu}_R(A,B)$ любое применение дистрибутивного правила 3') может быть произведено без участия в его компонентах правила 2) со строгим вложением. Все применения последнего можно свести лишь к присутствию в качестве части для транзитивного правила 4) определения 2.1.

Доказательство. Предположим, что при выводе величины $\bar{\mu}_R(A,B)$ на некотором его шаге должно быть использовано правило 3'). Пусть для определенности $A_1 \supset B_1$, а A_2,B_2 аналогичным соотношением не связаны. Отсутствие хотя бы одного из этих двух фактов представляет тривиальный случай. Тогда вначале применим правило 3') к величинам $\bar{\mu}_R(B_1,B_1) = 1$ и $\bar{\mu}_R(A_2,B_2)$, то есть положим $\bar{\mu}_R(B_1 \cup A_2,B) = \min(1,\bar{\mu}_R(A_2,B_2)) = \bar{\mu}_R(A_2,B_2)$.

Возвращаясь к вложению $A_1 \supset B_1$, заметим, что в силу свойств решетки F из него следует вложение $A_1 \cup A_2 \supseteq B_1 \cup A_2$. По этой причине, применяя к $\bar{\mu}_R(A_1 \cup A_2,B_1 \cup A_2) = 1$ и $\bar{\mu}_R(B_1 \cup A_2,B_1 \cup B_2)$ транзитивное правило 4), приходим к соотношению $\bar{\mu}_R(A,B) = \bar{\mu}_R(B_1 \cup A_2,B_1 \cup B_2)$. Применяя здесь вновь правило 3'), получим $\bar{\mu}_R(A,B) = \bar{\mu}_R(A_2,B_2)$, что в рассматриваемом случае эквивалентно равенству $\bar{\mu}_R(A,B) = \min(\bar{\mu}_R(A_1,B_1),\bar{\mu}_R(A_2,B_2))$. Таким образом, на текущем шаге вывода мы получили аналогичный исходному результат, но при этом исключили в применяемом правиле 3') участие строгих вложений, которые присутствовали только в транзитивном правиле 4).

Лемма 3.3. Пусть R — нечеткое отношение на решетке. Тогда при выводе произвольной связи $\bar{\mu}_R(A,B)$ все применения транзитивного правила 4) могут быть исключены либо перенесены в заключительную стадию.

Доказательство. Докажем утверждение леммы с помощью индукции по m — уровню рекурсии в вычислении $\bar{\mu}_R(A,B)$. При $m = 0$ для получения этой величины использовано одно из условий 1)–2) определения 2.1. В этом случае вывод не содержит транзитивных связей, то есть лемма уже выполнена.

Предположим далее, что она верна для некоторого $m \geqslant 0$, и докажем это утверждение при уровне рекурсии $m + 1$. По предположению индукции, первые m шагов вывода можно организовать так, что транзитивное правило 4) будет применяться лишь в конце процесса. В этом случае все зависит от того, какое рекурсивное правило вывода должно быть применено на последнем $(m + 1)$ шаге. Если последним применяется правило 4), то утверждение леммы сразу оказывается выполненным — все транзитивные связи использованы на заключительной стадии вывода. Таким образом, остается исследовать случай, когда на $m + 1$ шаге требуется применение правила вывода 3').

Итак, пусть для получения величины $\bar{\mu}_R(A,B)$ последним должно быть применено правило 3'). При этом вычисление каждой из базовых величин $\bar{\mu}_R(A_1,B_1),\bar{\mu}_R(A_2,B_2)$ имеет уровень рекурсии $\leqslant m$ и по предположению индукции все свои транзитивные связи использует лишь в конце вывода. Другими словами, при каждом $t = 1{,}2$ существует транзитивная цепочка связей $\bar{\mu}^t_R(C^{i-1}_t,C^i_t)$, $i = 1,\ldots,N_t$; $C^0_t = A_t, C^{N_t}_t = B_t$, при выводе которых не используется транзитивное правило 4). При этом, очевидно,

$$\bar{\mu}_R(A_t,B_t) = \min_i(\bar{\mu}^t_R(C^{i-1}_t,C^i_t)). \tag{3}$$

Будем считать обе указанные цепочки равными по длине (N), при необходимости дополнив в конце более короткую из них повторяющимся элементом $\bar{\mu}_R^t(B_t,B_t)$. Тогда рассмотрим логические связи

$$\bar{\mu}_R(C_1^{i-1} \cup C_2^{i-1}, C_1^i \cup C_2^i),\ i = 1,...,N;\ C_1^0 \cup C_2^0 = A, C_1^N \cup C_2^N = B.$$

К каждой из них (еще до использования транзитивностей) можно применить дистрибутивное правило 3'), то есть получаем

$$\bar{\mu}_R(C_1^{i-1} \cup C_2^{i-1}, C_1^i \cup C_2^i) = \min(\bar{\mu}_R(C_1^{i-1}, C_1^i), \bar{\mu}_R(C_2^{i-1}, C_2^i)),\ i = 1,...,N.$$

Отсюда, применяя $N-1$ раз транзитивное правило 4), приходим к соотношениям

$$\bar{\mu}_R(A,B) = \min_i(\bar{\mu}_R(C_1^{i-1} \cup C_2^{i-1}, C_1^i \cup C_2^i)) =$$
$$\min_i(\min(\bar{\mu}_R(C_1^{i-1}, C_1^i), \bar{\mu}_R(C_2^{i-1}, C_2^i))) = \min(\min_i(\bar{\mu}_R(C_1^{i-1}, C_1^i)), \min_i(\bar{\mu}_R(C_2^{i-1}, C_2^i))).$$

Последнее равенство с учетом (3) означает, что $\bar{\mu}_R(A,B) = \min(\bar{\mu}_R(A_1,B_1), \bar{\mu}_R(A_2,B_2))$. Итак, на $m+1$ шаге вывода мы получили аналогичный исходному результат, но при этом переместили применение правила 3') на стадию вывода, предшествующую любым использованиям транзитивного правила 4).

4. ЛОГИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ FLP-СТРУКТУР

Вначале рассмотрим вопрос о связи логического замыкания отношения на решетке с операцией построения транзитивного замыкания. Для нечеткого отношения R на решетке F введем отношение $\widetilde{R} \supseteq R$ (с функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{R}} = \widetilde{\mu}_R$), построенное по данному R последовательным выполнением следующих действий (шагов).

Объединить R с отношением рефлексивности на решетке F и обозначить новое отношение R_1.

Расширить R_1 всевозможными парами (A,B), где $A = \bigcup A_t$, $B = \bigcup B_t, t \in T$ — объединения элементов F, и обозначить новое отношение R_2. Точнее, для каждой такой пары доопределить функцию принадлежности μ_{R_1} отношения R_1 следующим образом:

$$\mu_{R_2}(X,Y) = \begin{cases} \max(\mu_{R_1}(A,B), \min\limits_t(\mu_{R_1}(A_t,B_t))), \text{ при } X = A, Y = B \\ \mu_{R_1}(X,Y), \text{ иначе} \end{cases}.$$

Полученное отношение R_2 объединить с отношением $\supseteq$.

Замечание 4.1. Применяя следствие 3.1, нетрудно убедиться в том, что отношение $\widetilde{R}$ логически эквивалентно R.

Лемма 4.1. Пусть R — нечеткое отношение на решетке F. Тогда, если логическая связь $\bar{\mu}_R(A,B)$ может быть вычислена без использования транзитивного правила 4) определения 3.1, то $\bar{\mu}_R(A,B) \leqslant \widetilde{\mu}_R(A,B)$.

Доказательство. В случае, когда величина $\bar{\mu}_R(A,B)$ может быть найдена из правила 1) определения 2.1, сразу имеем $\bar{\mu}_R(A,B) = \mu_R(A,B) \leqslant \widetilde{\mu}_R(A,B)$. Если же связь $\bar{\mu}_R(A,B)$ порождается условием 2), то $\bar{\mu}_R(A,B) = 1, \widetilde{\mu}_R(A,B) = 1$. Остается рассмотреть нетривиальный случай – применение правил 1), 2), 3').

Поскольку при выводе правило 4) не используется, то по лемме 3.2 не применяется и правило 2) со строгим вложением. Следовательно, в нашем случае правило 3') завершает этот процесс.

Если сопоставить порядок вычисления $\bar{\mu}_R(A,B)$ с построением отношения $\widetilde{R}$, то этот вывод представляет собой построение некоторого подмножества $\widetilde{R}$, что и доказывает неравенство $\bar{\mu}_R(A,B) \leqslant \widetilde{\mu}_R(A,B)$.

Теорема 4.1. Логическое замыкание нечеткого отношения R совпадает с транзитивным замыканием $\widetilde{R}^*$ соответствующего отношения $\widetilde{R}$.

Доказательство. Как было отмечено выше, отношение $\widetilde{R}$ эквивалентно R. Следовательно, по определению логического замыкания, имеем $\widetilde{R} \subseteq \bar{R}$. Отсюда, поскольку отношение $\bar{R}$ транзитивно, получаем $\widetilde{R}^* \subseteq \bar{R}$.

Докажем обратное включение. Предположим, что вычислена произвольная логическая связь $\bar{\mu}_R(A,B)$. Согласно лемме 3.3, при ее выводе все применения транзитивного правила 4) определения 2.1 могут быть перенесены в заключительную стадию процесса. Этот факт означает следующее: существует цепочка элементов $A = C_0, C_1, ..., C_n = B$ такая, что вычислены и используются логические связи $\bar{\mu}_R(C_{i-1}, C_i)$, $i = 1,...,n$, при выводе которых правило 4) не применялось. Тогда по лемме 4.1 имеем $\bar{\mu}_R(C_{i-1}, C_i) \leqslant \widetilde{\mu}_R(C_{i-1}, C_i)$, откуда получаем

$$\bar{\mu}_R(A,B) = \min_i(\bar{\mu}_R(C_{i-1}, C_i)) \leqslant \min_i(\widetilde{\mu}_R(C_{i-1}, C_i)) \leqslant \mu_{\widetilde{R}^*}(A,B), \text{ то есть } \bar{R} \subseteq \widetilde{R}^*.$$

Переходим непосредственно к вопросу о существовании и построении логической редукции нечетких LP-структур. *Логической редукцией* нечеткого отношения R на решетке называется любое минимальное отношение, эквивалентное R.

Заметим, что множество всех нечетких отношений является частично упорядоченным, поэтому различаются понятия минимального и наименьшего отношений [11]. В определении логической редукции речь идет о минимальном отношении, поэтому оно может оказаться не единственным.

Ниже под исключением элемента C из нечеткого множества R ($R \backslash \{C\}$) подразумевается модификация функции μ_R, заменяющая $\mu_R(C)$ нулем.

Лемма 4.2. Пусть R — нечеткое отношение. Оно является логической редукцией в том и только том случае, если для любой пары (A,B) выполнено

$$\bar{\mu}_{R \backslash \{(A,B)\}}(A,B) \geqslant \mu_R(A,B) \Rightarrow \mu_R(A,B) = 0. \tag{4}$$

Менее формально, такое отношение не содержит пары, выводимые из остального множества пар с не меньшим значением функции принадлежности.

Доказательство. Пусть R представляет собой логическую редукцию. Предположим противное, что существует пара (A,B), для которой условие леммы не выполнено, то есть $\bar{\mu}_{R \backslash \{(A,B)\}}(A,B) \geqslant \mu_R(A,B) > 0$. Тогда пару (A,B) можно исключить из R, получив при этом меньшее отношение, которое в силу следствия 2.2 эквивалентно исходному. Таким образом, при сделанном предположении отношение R не может быть логической редукцией.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что для любой пары (A,B) справедливо (4). Покажем, что в этом случае R есть логическая редукция. Предположим противное: есть отношение $R_0 \subset R$, $R_0 \sim R$, и $\mu_R(A,B) > \mu_{R_0}(A,B)$ для некоторой пары (A,B). Тогда в силу эквивалентности рассматриваемых отношений справедливо $\bar{\mu}_R(A,B) = \bar{\mu}_{R_0}(A,B)$, то есть

$$\bar{\mu}_{R_0}(A,B) \geqslant \mu_R(A,B) > 0; \tag{5}$$

$$\bar{\mu}_{R_0}(A,B) > \mu_{R_0}(A,B). \tag{6}$$

Рассмотрим неравенство (6). При нем логическая связь $\bar{\mu}_{R_0}(A,B)$ не могла быть получена из правил 1)-2) определения 2.1. Первое непосредственно противоречит (6). Если бы применялось второе, то в силу (4) мы имели бы $\mu_R(A,B) = 0$, что противоречит предполагаемому $\mu_R(A,B) > \mu_{R_0}(A,B)$. Поскольку для вывода $\bar{\mu}_{R_0}(A,B)$ остается лишь применение правил 3)-4), в этом процессе не могла участвовать сама пара (A,B) с ее значением функции принадлежности $\mu_{R_0}(A,B)$. Дело в том, что $\bar{\mu}_{R_0}(A,B)$ вычисляется как минимальная из участвующих величин, поэтому оказалось бы нарушенным (6). То есть результат $\bar{\mu}_{R_0}(A,B)$ не изменится при $\mu_{R_0}(A,B) = 0$. Итак, получено

$$R_0 = R_0 \backslash \{(A,B)\} \subseteq R \backslash \{(A,B)\}. \tag{7}$$

Тогда в силу замечания 2.1 имеем $\bar{\mu}_{R\backslash\{(A,B)\}}(A,B) \geqslant \bar{\mu}_{R_0\backslash\{(A,B)\}}(A,B)$. Отсюда с учетом (7) и (5): $\bar{\mu}_{R\backslash\{(A,B)\}}(A,B) \geqslant \bar{\mu}_{R_0\backslash\{(A,B)\}}(A,B) = \bar{\mu}_{R_0}(A,B) \geqslant \mu_R(A,B) > 0$, что противоречит сформулированному в лемме условию (4).

Для нечеткого отношения R на решетке F введем отношение $\underset{\sim}{\to} R$, построенное по данному R последовательным выполнением действий (шагов), в некотором смысле обратных построению $\widetilde{R}$, а именно – следующих.

Исключить из R все пары вида $A \supset B$ и обозначить результат R_{-1}.

Исключить из R_{-1} все пары (A,B), где $A = \bigcup A_t$, $B = \bigcup B_t, t \in T$, причем $\mu_{R_{-1}}(A,B) \leqslant \min\limits_t(\mu_{R_{-1}}(A_t,B_t))$ и (A,B) не совпадает ни с одной парой (A_t,B_t), и обозначить новое отношение R_{-2}.

Исключить из R_{-3} все пары вида (A,A) (рефлексивные пары).

Замечание 4.2. Так же с помощью следствия 3.1 нетрудно убедиться в том, что отношение $\underset{\sim}{\to} R$ логически эквивалентно R.

Следующая теорема указывает достаточное условие существования и способ построения логической редукции данного отношения.

Теорема 4.2. Пусть для нечеткого отношения R построено соответствующее $\widetilde{R}$. Тогда, если для $\widetilde{R}$ существует транзитивная редукция R^0, то соответствующее ей отношение $\underset{\sim}{\to} R^0$ представляет собой логическую редукцию исходного отношения R.

Доказательство. Из замечаний 4.1-4.2 следует, что указанное в теореме отношение $\underset{\sim}{\to} R^0$ логически эквивалентно R. Осталось показать, что $\underset{\sim}{\to} R^0$ является логической редукцией вообще. Для этого достаточно проверить выполнение для $\underset{\sim}{\to} R^0$ условия леммы 4.2.

Пусть (A,B) — произвольная пара элементов решетки F. По условию теоремы достаточно доказать, что выполнено (4). Предположим противное, а именно, что имеет место $\bar{\mu}_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(A,B) \geqslant \mu_{\underset{\sim}{\to} R_0}(A,B) > 0$. Тогда в силу следствия 2.2 отношение $\underset{\sim}{\to} R^0\backslash\{(A,B)\}$ эквивалентно $\underset{\sim}{\to} R^0$. Сразу заметим, что применение правила 1) определения 2.1 для вывода $\bar{\mu}_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(A,B)$ невозможно, поскольку $\mu_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(A,B) = 0$. Применение же правила 2) исключается благодаря шагам 1, 3 процесса построения отношения $\underset{\sim}{\to} R^0$. Остается рассмотреть нетривиальные случаи вывода связи $\bar{\mu}_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(A,B)$.

По лемме 3.3 любая логическая связь может быть вычислена таким образом, что все транзитивности будут использоваться лишь в завершающей стадии ее вывода. Это означает, что есть цепочка $A = C_0, C_1, ..., C_n = B$ такая, что вычислены и используются логические связи $\bar{\mu}_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(C_{i-1},C_i) > 0$, $i = 1,...,n$, при выводе которых правило 4) не применялось. По лемме 4.1 имеем $0 < \bar{\mu}_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(C_{i-1},C_i) \leqslant \widetilde{\mu}_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(C_{i-1},C_i)$, откуда получаем

$$0 < \bar{\mu}_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(A,B) = \min_i(\bar{\mu}_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(C_{i-1},C_i)) \leqslant \min_i(\widetilde{\mu}_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(C_{i-1},C_i)) \leqslant \mu_{\widetilde{R}}(A,B).$$

Таким образом, при $n > 1$ пара (A,B) оказывается транзитивной в $\widetilde{R}$. Следовательно, не может выполняться $\bar{\mu}_{\underset{\sim}{\to} R_0\backslash\{(A,B)\}}(A,B) \geqslant \mu_{\underset{\sim}{\to} R_0}(A,B) > 0$ для $\underset{\sim}{\to} R^0$, являющегося подмножеством транзитивной редукции отношения $\widetilde{R}$. Таким образом, получено противоречие исходному предположению.

Остается исследовать случай $n = 1$. В этой ситуации рассматриваемая логическая связь $\bar{\mu}_{\underset{\sim}{\rightarrow} R_0 \setminus \{(A,B)\}}(A,B)$ может содержать применения правила 3') только в заключительной стадии вывода. Любая полученная так пара (A,B) описывается шагом 2 построения $\widetilde{R}$. При нахождении $\underset{\sim}{\rightarrow} R^0$ (обратный процесс) она будет исключена. Согласно лемме 3.2, все строгие вложения могут быть исключены на предыдущем — 1-ом шаге. Таким образом, снова приходим к противоречию исходному предположению $\bar{\mu}_{\underset{\sim}{\rightarrow} R_0 \setminus \{(A,B)\}}(A,B) \geqslant \mu_{\underset{\sim}{\rightarrow} R_0}(A,B) > 0$.

Итак, исследованы все варианты предполагаемого вывода логической связи $\bar{\mu}_{\underset{\sim}{\rightarrow} R_0 \setminus \{(A,B)\}}(A,B)$. В результате установлено, что в каждом таком случае опровергается допущенное предположение. Следовательно, оно неверно, а отношение $\underset{\sim}{\rightarrow} R^0$ представляет собой логическую редукцию исходного R.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бениаминов, Е. М. Алгебраические методы в теории баз данных и представлении знаний / Е. М. Бениаминов. — М. : Научный мир, 2003. — 184 с.

2. Жожикашвили, А. В. Алгебраическая теория продукционных систем / А. В. Жожикашвили, В. Л. Стефанюк // VIII нац. конф. по искусственному интеллекту с международным участием КИИ-2002 : Труды конференции. Т. 1. — М. : Физматлит, 2002. — С. 428–436.

3. Maciol, A. An application of rule-based tool in attributive logic for business rules modeling / A. Maciol // Expert Systems with Applications. — 2008. — V. 34, № 3. — P. 1825–1836.

4. Дородных, Н. О. Использование диаграмм классов UML для формирования продукционных баз знаний / Н. О. Дородных, А. Ю. Юрин // Программная инженерия. — 2015. — № 4. — С. 3–9.

5. Махортов, С. Д. Математические основы искусственного интеллекта : теория LP-структур для построения и исследования моделей знаний продукционного типа / С. Д. Махортов; под ред. В. А. Васенина. — М. : Издательство МЦНМО, 2009. — 304 с.

6. Болотова, С. Ю. Алгоритмы релевантного обратного вывода, основанные на решении продукционно-логических уравнений / С. Ю. Болотова, С. Д. Махортов // Искусственный интеллект и принятие решений. — 2011. — № 2. — С. 40–50.

7. Махортов, С. Д. Алгебраическая модель распределенной логической системы продукционного типа / С. Д. Махортов // Программная инженерия. — 2015. — № 12. — С. 32–38.

8. Нечеткие гибридные системы : Теория и практика / И. З. Батыршин [и др.]; под ред. Н. Г. Ярушкиной. — М. : Физматлит, 2007. — 208 с.

9. Махортов, С. Д. Оптимизация метода LP-вывода / С. Д. Махортов, А. Н. Шмарин // Нейрокомпьютеры. Разработка, применение. — 2013. — № 9. — С. 59–63.

10. Махортов, С. Д. Нечеткий LP-вывод и его программная реализация / С. Д. Махортов, А. Н. Шмарин // Программная инженерия. — 2013. — № 12. — С. 34–38.

11. Биркгоф, Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. — М. : Наука, 1984. — 568 с.

12. Рыжов, А. П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений / А. П. Рыжов. — М. : Диалог-МГУ, 2003. — 81 с.

13. An Algorithm to Compute the Transitive Closure, a Transitive Approximation and a Transitive Opening of a Fuzzy Proximity / L. Garmendia, R. G. Del Campo, V. López, J. Recasens // Mathware & Soft Computing. — 2009. — № 16. — P. 175–191.

14. Hashimoto, H. Reduction of a Nilpotent Fuzzy Matrix / H. Hashimoto // Information Sciences. — 1982. — № 27. — P. 233–243.

REFERENCES

1. Beniaminov E.M. Algebraic methods in the theory of databases and knowledge representation. [Beniaminov E.M. Algebraicheskie metody v teorii baz dannyx i predstavlenii znaniyj]. Moscow,

2003, 184 p.

2. Zhozhikashvili A.V., Stefanjuk V.L. Algebraic theory of production systems. [Zhozhikashvili A.V., Stefanjuk V.L. Algebraicheskaya teoriya produkcionnyx sistem]. VIII nac. konf. po iskusstvennomu intellektu s mezhdunarodnym uchastiem KII-2002 : Trudy konferencii. T. 1, Moscow, 2002, pp. 428–436.

3. Maciol A. An application of rule-based tool in attributive logic for business rules modeling, Expert Systems with Applications, 2008, vol. 34, no. 3, pp. 1825–1836.

4. Dorodnykh N.O., Yurin A.Yu. The Use of Diagrams of UML Classes for Production Knowledge Bases Formation. [Dorodnykh N.O., Yurin A.Yu. Ispol'zovanie diagramm klassov UML dlya formirovaniya produkcionnyx baz znaniyj]. *Programmnaya inzheneriya — Programmnaya Ingeneria*, 2015, no. 4, pp. 3–9.

5. Makhortov, S.D. Mathematical Foundations of Artificial Intelligence: The LP structures theory for the knowledge models of production type construction and research. Edts. by V.A. Vasenin. [Maxortov, S. D. Matematicheskie osnovy iskusstvennogo intellekta : teoriya LP-struktur dlya postroeniya i issledovaniya modeleyj znaniyj produkcionnogo tipa. pod red. V. A. Vasenina]. Moscow, 2009. 304 p.

6. Bolotova S.Yu., Makhortov S.D. Algorithms of the relevant backward inference that is based on production-logic equations solving. [Bolotova S.Yu., Makhortov S.D. Algoritmy relevantnogo obratnogo vyvoda, osnovannye na reshenii produkcionno-logicheskix uravneniyj]. *Iskusstvennyyj intellekt i prinyatie resheniyj — Iskusstvennyyj intellekt i prinyatie resheniyj*, 2011, no. 2, pp. 40–50.

7. Makhortov S.D. The algebraic model of the distributed logical system of the production type. [Makhortov S.D. Algebraicheskaya model' raspredelennoyj logicheskoyj sistemy produkcionnogo tipa]. *Programmnaya inzheneriya — Programmnaya inzheneriya*, 2015, no. 12, p. 32–38.

8. Batyrshin I.Z. et. al. The Fuzzy Gibrid Systems: Theory and Practice. [Batyrshin I.Z. et. al. Nechetkie gibridnye sistemy : Teoriya i praktika]. Moscow, 2007, 208 p.

9. Makhortov S.D., Shmarin A.N. Optimizing LP-inference method. [Makhortov S.D., Shmarin A.N. Optimizaciya metoda LP-vyvoda]. *Neyjrokomp'yutery. Razrabotka, primenenie — Neyjrokomp'yutery. Razrabotka, primenenie*, 2013, no. 9, pp. 59–63.

10. Makhortov S.D., Shmarin A.N. Fuzzy LP-inference and its software implementation. [Makhortov S.D., Shmarin A.N. Nechetkiyj LP-vyvod i ego programmnaya realizaciya]. *Programmnaya inzheneriya — Programmnaya inzheneriya*, 2013, no. 12, pp. 34–38.

11. Birkhoff G. Lattice Theory. [Birkgof G. Teoriya reshetok]. Moscow, 1984, 568 p.

12. Ryzhov A.P. Elements of the Theory of Fuzzy Sets and of its Applications. [Ryzhov A.P. Elementy teorii nechetkix mnozhestv i ee prilozheniyj]. Moscow, 2003, 81 p.

13. Garmendia L., Del Campo R.G., López V., Recasens J. An Algorithm to Compute the Transitive Closure, a Transitive Approximation and a Transitive Opening of a Fuzzy Proximity, Mathware & Soft Computing, 2009, no. 16, pp. 175–191.

14. Hashimoto H. Reduction of a Nilpotent Fuzzy Matrix. Information Sciences, 1982, no. 27, pp. 233–243.

Махортов Сергей Дмитриевич, заведующий кафедрой программирования и информационных технологий, д.ф.-м.н., Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская федерация
E-mail: msd_exp@outlook.com

Makhortov S. D., Head of the Programming and Information Technologies Department, Doctor of Science, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: msd_exp@outlook.com

Клейменов Илья Валерьевич, аспирант кафедры программирования и информационных технологий, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская федерация
E-mail: alenor96@gmail.com

Kleymenov I. V., postgraduate student of the Programming and Information Technologies Department, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alenor96@gmail.com