УДК 519.63

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ОГРАНИЧЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дж. Т. Ахмедов, Э. М. Мухамадиев, И. Дж. Нуров

Таджикский национальный университет;
Вологодский государственный университет

Поступила в редакцию 05.07.2017 г.

Аннотация. Работа посвящена исследованию вопросов существования периодических и ограниченных решений одного класса нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с главной на бесконечности кусочно-линейной частью. Приведено полное описание множества точек в пространстве коэффициентов, где соответствующие этим точкам кусочно-линейные уравнения имеют ненулевые периодические или ограниченные решения. Методами теория вращения вполне непрерывных векторных полей получены условия существования периодических и ограниченных на всей оси решений уравнения с главной на бесконечности однородной частью.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, периодическое решение, ограниченное решение, топологические методы, вращение вполне непрерывного векторного поля.

PERIODIC AND BOUNDED SOLUTIONS OF QUASILINEAR EQUATIONS SECOND ORDER

J. T. Ahmedov, E. M. Muhamadiev, I. J. Nurov

Abstract. In this article considered the existence of bounded and periodic solutions of a class of nonlinear ordinary differential equations of second order with a major at infinity piecewise-linear part. Given a complete description of the set of points in the space of coefficients, which correspond to these points of piecewise-linear equations have a nonzero periodic or bounded solutions. The methods of the theory of the rotation of completely continuous vector fields derived conditions for the existence of bounded and periodic solutions of the equation on the whole axis of the main part of the uniform at infinity.

Keywords: the differential equation, periodic solution, bounded solution, topological methods, rotation of completely continuous vector field.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$y'' + ay' + by + c|y' + d \cdot y| + f(t, y, y') = 0, \tag{1.1}$$

где a, b, c, d — заданные действительные числа, $f(t, y, z)$ — непрерывная функция, определенная при всех значениях (t, y, z) и удовлетворяющая условию

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sup_{t,|y|+|z|\leqslant r} |f(t, y, z)| = 0. \tag{1.2}$$

В работе изучаются вопросы существования периодических или ограниченных решений уравнения (1.1) при соответствующих условиях периодичности или лишь ограниченности функции $f(t, y, z)$ по переменной t. Отметим, что эти вопросы хорошо изучены для уравнений с "главными" линейными частями, т. е., когда в уравнении (1.1) коэффициент c равен нулю (см., напр. [1, 2]). В этом случае в терминах поведения решения линейного уравнения

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{1.3}$$

справедливы следующие теоремы:

а) (Аналог теоремы Фредгольма.) Если однородное уравнение (1.3) не имеет ненулевых T–периодических решений, а функция $f(t, y, z)$ является T–периодической по t, то уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно T — — периодическое решение;

б) (Аналог теоремы П. Боля.) Если однородное уравнение (1.3) не имеет ненулевых ограниченных на всей оси решений, то уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно ограниченное на всей оси решение.

Однако, как показывает ниже приводимый пример, в случае, когда $c \neq 0$, аналоги приведенных теорем для уравнения (1.1) не имеют места. Например, хотя однородное уравнение $y'' + y + 2|y' + y| = 0$ не имеет ненулевых ограниченных решений, но и уравнение $y'' + y + 2|y' + y| - 1 = 0$ не имеет ограниченных и, следовательно, и периодических решений, что является следствием нелинейности уравнения. Изучение различных эффектов нелинейности дифференциального уравнения является важнейшим предметом исследования качественной теории дифференциальных уравнений (см., напр., [3, 4]).

В связи с этим представляет интерес выделения таких дополнительных ограничений для коэффициентов уравнения (1.1), которые обеспечивают существование периодических (ограниченных) решений уравнения (1.1), когда функция $f(t, y, z)$ периодическая (ограниченная) относительно переменной t.

В настоящей работе проведено полное описание множества точек в пространстве коэффициентов, где соответствующие этим точкам однородные уравнения $y'' + ay' + by + c|y' + d \cdot y| = 0$ имеют ненулевое периодическое или ограниченное решение. Полученные результаты вместе с теорий вращения вполне непрерывных полей позволили получить более точные условия существования периодических и ограниченных на всей оси решений уравнения (1.1).

2. АНАЛИЗ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим кусочно-линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$y'' + ay' + by + c|y' + d \cdot y| = 0. \tag{2.1}$$

Полный анализ фазового портрета траекторий системы двух уравнений, соответствующих уравнению (2.1), проведен в работах [5–8]. Ниже мы выделяем множество точек в пространстве коэффициентов, где соответствующее им уравнение (2.1) имеет ненулевое периодическое или ограниченное решение.

Предположим что коэффициенты удовлетворяют условию единственности стационарного решения, то есть уравнение $by + c|d \cdot y| = 0$ имеет единственное нулевое решение $y = 0$. Это условие эквивалентно тому, что коэффициенты b, c, d удовлетворяют неравенству $|b| - |cd| \neq$ $\neq 0$. Изучим условия существования ненулевого периодического или ограниченного на всей оси решения уравнения (2.1). Отметим, что в силу положительной однородности уравнения (2.1) из условия существования ненулевого периодического решения следует, что все решения уравнения являются периодическими с одним и тем же общим периодом.

В дальнейшем всюду будем предполагать, что коэффициент $c > 0$. Случай $c < 0$ сводится к этому случаю заменой y на $-y$.

Для удобства отдельно рассмотрим два случая: $d = 0$ и $d \neq 0$.

Теорема 1. *Пусть* $d = 0$, $b \neq 0$. *Тогда уравнение (2.1) имеет ненулевое периодическое решение тогда и только тогда, когда* $a = 0$ *и* $4b > c^2$; *при этом величина периода* $T = \frac{4\pi}{\sqrt{4b-c^2}}$.

Очевидно, каждое периодическое решение является и ограниченным на всей оси решением уравнения (2.1). Для линейного уравнения второго порядка с вещественными коэффициентами любое ограниченное решение является и периодическим решением. В отличие от линейного случая, нелинейное уравнение (2.1) может иметь при некоторых значениях коэффициентов ограниченные на всей оси решения, отличное от периодического решения. А именно, справедлива

Теорема 2. *Пусть* $d = 0$, $b \neq 0$. *Тогда уравнение (2.1) имеет ограниченное на всей оси решение, отличное от периодического, тогда и только тогда, когда* $|a| < c$ *и* $0 < 4b \leqslant \leqslant (c - |a|)^2$.

Отметим, что ограниченные решения, существующие в условиях теоремы 2, стремятся к нулю при $|t| \to \infty$.

Теперь предположим, что $d \neq 0$. Замена $y(t) = u(dt)$ в уравнении (2.1) приведет к уравнению вида (2.1) с коэффициентами a/d, b/d^2, $c/|d|$, 1. Поэтому, без ограничения общности, будем рассматривать уравнение вида

$$y'' + ay' + by + c|y' + y| = 0, \tag{2.2}$$

где коэффициенты a, b — произвольные числа, а коэффициент $c > 0$. Уравнение (2.2) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} x_1' = x_2; \\ x_2' = -ax_2 - bx_1 - c|x_2 + x_1|. \end{cases} \tag{2.3}$$

Условие $|b| - c \neq 0$, являющееся условием изолированности стационарного решения уравнения (2.2), обеспечивает изолированность нулевой особой точки системы (2.3). При фиксированном $c > 0$ прямые $b = c$, $b = -c$ и параболы $b = c + (a - c)^2/4$, $b = -c + (a + c)^2/4$ разбивают плоскость коэффициентов a, b на области. В одной из этих областей, где $b > > \max\{c + (a - c)^2/4, -c + (a + c)^2/4\}$ рассмотрим функцию

$$\gamma(a, b, c) = \frac{a + c}{\sqrt{4(b + c) - (a + c)^2}} + \frac{a - c}{\sqrt{4(b - c) - (a - c)^2}}.$$

Функция $\gamma(a, b, c)$ обращается в нуль в точках $b = (c^2 + a^2)/2a$, $0 < a < \min\{2, c\}$.

Теорема 3. *Пусть* $|b| - c \neq 0$. *Тогда уравнение (2.2) имеет ненулевое периодическое решение, тогда и только тогда, когда* $b = (c^2 + a^2)/2a$ *и* $0 < a < \min\{2, c\}$; *при этом величина периода*

$$T = \frac{4\pi c}{c^2 - a^2}\sqrt{\frac{a}{2 - a}}.$$

Для уравнения (2.1) теорема 3 примет следующий вид:

Теорема 3′. *Пусть* $|b| - c|d| \neq 0$. *Тогда уравнение (2.1) имеет ненулевое периодическое решение, тогда и только тогда, когда* $b = d(c^2 + a^2)/2a$ *и* $0 < \frac{a}{d} < 2$, $a| < c$; *при этом величина периода*

$$T = \frac{4\pi c}{c^2 - a^2}\sqrt{\frac{a}{2d - a}}.$$

Для уравнения вида (2.2) при некоторых значениях коэффициента $c > 0$ существует множество точек в плоскости коэффициентов a, b, для которых уравнение имеет ненулевое ограниченное на всей оси решение, отличное от периодического решения. Более точное утверждение о существовании ограниченных решений уравнения (2.2) содержится в следующей теореме.

Теорема 4. *Пусть $|b| - c \neq 0$. Тогда уравнение (2.2) имеет ограниченное на всей оси решение, отличное от периодического решения, тогда и только тогда, когда коэффициенты a, b, c удовлетворяют неравенствам*

$$4c < 4b \leqslant a^2 + c^2 - 2c|2 - a|. \tag{2.4}$$

В условиях (2.4), ограниченное решение уравнения (2.2), удовлетворяет условию $|y(t)| + |y'(t)| \to 0$ при $|t| \to \infty$.

Несложный анализ показывает, что неравенство (2.4) при заданном $c > 0$ относительно a и b имеет решение, тогда и только тогда, когда $c > 2$.

Для уравнения (2.1) теорема 4 примет следующий вид:

Теорема 4$'$. *Пусть $|b| - c|d| \neq 0$. Тогда уравнение (2.1) имеет ограниченное на всей оси решение, отличное от периодического решения тогда и только тогда, когда коэффициенты a, b, c, d удовлетворяют неравенствам*

$$4c|d| < 4b \leqslant a^2 + c^2 - 2c|2d - a|. \tag{2.5}$$

В условиях (2.5), ограниченное решение уравнения (1.1), удовлетворяет условию $|y(t)| + |y'(t)| \to 0$ при $|t| \to \infty$.

Нас интересует условия отсутствия периодических или ограниченных решений уравнения (2.1). Эти условия можно получать как следствия вышеприведенных теорем 1–4. В плоскости (a, b) определим множества

$$I(c) = \{(a, b) : a = 0, 4b > c^2\},$$

$$I(c, d) = \{(a, b) : ad > 0, 2ab = d(c^2 + a^2)\},$$

$$\Delta(c) = \{(a, b) : 2\sqrt{2c} - c \leqslant a \leqslant c, 0 \leqslant 4b \leqslant (c - |a|)^2\},$$

$$\Delta(c, d) = \{(a, b) : 2\sqrt{2c} - c \leqslant a \leqslant c, 4c|d| \leqslant 4b \leqslant a^2 + c^2 - 2c|2d - a|\}.$$

Отметим, что множества $\Delta(c)$, $\Delta(c, d)$ пустые, если $c < 2$.

Следствие 1. *Пусть $d = 0$, $b \neq 0$. Тогда уравнение (2.1) не имеет ненулевого $T-$периодического решения, если $(a, 4a - c^2) \neq (0, 16\pi^2 k^2/T^2)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$.*

Пусть $d \neq 0$ и $|b| - c|d| \neq 0$. Тогда уравнение (2.1) не имеет ненулевого T-периодического решения, если $a/d \notin (0, 2)$ или $0 < a/d < 2$ и

$$\left(2ab - d(c^2 + a^2), \frac{c^2 - a^2}{c}\sqrt{\frac{2d}{a} - 1}\right) \neq \left(0, \frac{4k\pi}{T}\right)$$

для всех $k = 1, 2, \ldots$.

Следствие 2. *Пусть $d = 0$ и коэффициенты a, b удовлетворяют условиям $b \neq 0$ и $(a, b) \notin I(c) \cup \Delta(c)$. Тогда уравнение (2.1) не имеет ненулевое ограниченное на всей оси решение.*

Пусть $d \neq 0$ и коэффициенты a, b удовлетворяют условиям, $|b| - c|d| \neq 0$ и $(a, b) \notin I(c, d) \cup \Delta(c, d)$. Тогда уравнение (2.1) не имеет ненулевое ограниченное на всей оси решение.

3. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ И ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

Прежде чем перейти к изучению вопросов существования периодических или ограниченных решений уравнения (1.1), приведем некоторые результаты из работ [2, 9]. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений первого порядка вида

$$x' = P(x) + F(t, x), \; x \in R^n, \tag{3.1}$$

где вектор-функция $P(x)$ непрерывна и положительно однородна порядка $m = 1$ ($P(\lambda x) \equiv \lambda P(x)$, $\forall\, \lambda \geqslant 0$), а вектор-функция $F(t,x)$ непрерывна по совокупности переменных (t,x) и удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sup_{t,|x|\leqslant r} |F(t,x)| = 0.$$

Топологические методы и теория вращения вполне непрерывных векторных полей являются удобным аппаратом доказательства существования периодических и ограниченных решений системы дифференциальных уравнений. Ниже приведем результаты применения этих методов применительно к системе (3.1) (более подробно см. [2,3]).

Пусть вектор-функция $F(t,x)$ T–периодична по t. Тогда T–периодическое решение уравнения (3.1) определяется нулями вполне непрерывного векторного поля $(\Phi x)(t) = x(t) - (Ax)(t)$ в пространстве $C[0,T]$ непрерывных на отрезке $[0,T]$ вектор-функций, где вполне непрерывный оператор $(Ax)(t)$ определяется равенством

$$(Ax)(t) = x(T) + \int_0^t [P(x(s)) + F(s,x(s))]\, ds.$$

Справедливы следующие утверждения о вычислении вращения $\gamma(\Phi, S(R))$ поля $(\Phi x)(t)$ на сфере $S(R)$ радиуса R с центром в нуле пространства $C[0,T]$ и о его приложении к вопросу существования периодических решений уравнения (3.1).

1) *Если однородное уравнение $x' = P(x)$ не имеет ненулевых T–периодических решений, то векторное поле $(\Phi x)(t)$ не имеет нулевых векторов на границе $S(R)$ шара достаточно большого радиуса с центром в нуле пространства $C[0,T]$, а его вращение $\gamma(\Phi_0, S(R))$ на этой сфере совпадает с вращением $\gamma(\Phi_0, S(R))$ поля $(\Phi_0 x)(t) = x(t) - (A_0 x)(t)$, где*

$$(A_0 x)(t) = x(T) + \int_0^t P(x(s))\, ds;$$

2) если дополнительно уравнение $x' = P(x)$ не имеет ненулевых T_1–периодических решений для любого $0 < T_1 < T$, то вращение $\gamma(\Phi_0, S(R))$ поля $(\Phi_0 x)(t)$ совпадает с вращением $\gamma(\Psi, S)$ конечномерного поля $\Psi x = -P(x)$, на единичной сфере S с центром в нуле пространства R^n;

3) если выполнены условия пунктов 1), 2) и $\gamma(\Psi, S) \neq 0$, то система (3.1) имеет по крайней мере одно T–периодическое решение.

Пусть вектор-функция $F(t,x)$ не является периодической. В этом случае имеет место аналог приведенных утверждений о существовании ограниченных на всей оси $(-\infty, \infty)$ решений системы (3.1). А именно справедливо следующее утверждение.

4) *Если однородное уравнение $x' = P(x)$ не имеет ненулевых ограниченных на всей оси решений и вращение $\gamma(\Psi, S)$ конечномерного поля $\Psi x = -P(x)$, на единичной сфере S с центром в нуле пространства R^n отлично от нуля, то система (3.1) имеет по крайней мере одно ограниченное на всей оси решение.*

Перейдем к приложениям существования периодических или ограниченных решений уравнения (1.1) приведенных выше общих теорем.

Теорема 5. *Пусть $d = 0$, $b \neq 0$, $(a, 4b - c^2) \neq (0, 16\pi^2 k^2/T^2)$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ и функция $f(t,y,z)$ T–периодическая по переменной t. Тогда уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно T–периодическое решение.*

Следует отметить, что теорема 5 в случае, когда $a = 0$, $4b - c^2 > 0$ и $4b - c^2 \neq 16\pi^2 k^2 T^2$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ и $4b - c^2 > 16\pi^2 k_0^2/T^2$ не является следствием выше приведенных общих теорем. В этом случае соответствующая однородная система $x' = P(x)$, где $x = (x_1, x_2)$,

$P(x) = (x_2, -bx_1 - c|x_2|)$ имеет периодическое решение периода $T_1 < T$ и поэтому невозможно применять утверждение 2) о совпадении вращения $\gamma(\Phi_0, S(R))$ поля $(\Phi_0 x)(t)$ с вращением $\gamma(\Psi, S)$ двумерного поля $\Psi x = -P(x)$ на единичной окружности S. Но векторное поле $(\Phi_1 x)(t) = x(t) - (A_1 x)(t)$, где

$$(A_1 x)(t) = x(T) + \int\limits_0^t P_1(x(s))\,ds, \quad P_1(x) = (x_2, -\varepsilon x_2 - bx_1 - c|x_2|)$$

при достаточно малом ненулевом ε гомотопно полю $(\Phi_0 x)(t)$ и удовлетворяет условиям утверждения 2). Поэтому $\gamma(\Phi_0, S(R)) = \gamma(\Phi_1, S(R)) = \gamma(-P_1, S)$. Не трудно видеть, что вращение $\gamma(-P_1, S)$ поля $-P_1(x)$ на окружности S равно вращению линейного поля $(-x_2, bx_1)$ и, следовательно, $\gamma(-P_1, S) = 1$.

Теорема 6. *Пусть $d \neq 0$, $|b| - c|d| \neq 0$ и коэффициенты a, b удовлетворяют одному из условий: либо $a/d \notin (0{,}2)$, либо $0 < a/d < 2$ и*

$$\left(2ab - d(c^2 + a^2), \frac{c^2 - a^2}{c}\sqrt{\frac{2d}{a} - 1}\right) \neq \left(0, \frac{4k\pi}{T}\right), k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть функция $f(t, y, z)$ T–периодическая по переменной t. Тогда уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно T–периодическое решение.

Теорема 7. *Пусть $d = 0$ и коэффициенты a, b удовлетворяют условиям $b \neq 0$ и $(a, b) \notin I(c) \cup \Delta(c)$. Тогда уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно ограниченное на всей оси решение.*

Пусть $d \neq 0$ и коэффициенты a, b удовлетворяют условиям $|b| - c|d| > 0$ и $(a, b) \notin I(c, d) \cup \Delta(c, d)$. Тогда уравнение (1.1) имеет по крайней мере одно ограниченное на всей оси решение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — М., 1967. — 472 с.

2. Красносельский, М. А. Геометрические методы нелинейного анализа / М. А. Красносельский, П. П. Забрейко. — М., 1975. — 510 с.

3. Филиппов, А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений / А. Ф. Филиппов. — М. : УРСС, 2004. — 239 с.

4. Баутин, Н. Н. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости / Н. Н. Баутин, Е. А. Леонтович. — М., 1976. — 496 с.

5. Мухамадиев, Э. М. Предельные циклы кусочно-линейных дифференциальных уравнений второго порядка / Э. М. Мухамадиев, И. Д. Нуров, М. Ш. Халилова // Уфимский математический журнал. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 84–93.

6. Ахмедов, Дж. Т. Анализ периодических решений негладкой динамической системы с вынужденным колебанием / Дж. Т. Ахмедов, С. Х. Мирзоев, И. Дж. Нуров // Вестник ТНУ. — 2016. — вып. 1–3. — С. 14–17.

7. Leine, R. I. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical system / R. I. Leine, D. H. Van. Campen // European Journal of Mechanigs Solids. — 2006. — P. 595–616.

8. Мухамадиев, Э. М. Анализ рождения предельных циклов одного класса нелинейной уравнений второго порядка / Э. М. Мухамадиев, А. М. Гулов, И. Д. Нуров // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 1. — С. 118–125.

9. Мухамадиев, Э. М. К теории периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Э. М. Мухамадиев // Доклады АН СССР. — 1970. — Т. 194, № 3. — С. 510–513.

10. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

11. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 162–172.

REFERENCES

1. Demidovich B.P. Lectures on the Mathematical Theory of Stability. [Demidovich B.P. Lekcii po matematicheskoyj teorii ustoyjchivosti]. Moscow, 1967, 472 p.

2. Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P. Geometrical methods of nonliner analysis. [Krasnoselskii M.A., Zabreiko P.P. Geometricheskie metody nelineyjnogo analiza]. Moscow, 1975, 510 p.

3. Filippov A.F. Introduction to the theory of differential equations. [Filippov A.F. Vvedenie v teoriyu differencial'nyx uravneniyj]. Moscow, 2004, 239 p.

4. Bautin N.N., Leontovich E.A. Methods and techniques of qualitative study of dynamic systems on a plane. [Bautin N.N., Leontovich E.A. Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskix sistem na ploskosti]. Moscow, 1976, 496 p.

5. Muhamadiev E.M., Nurov I.J., Khalilova M.Sh. Limiting cycles of piecewise-linear second order differential equations. [Muhamadiev E.M., Nurov I.J., Khalilova M.Sh. Predel'nye cikly kusochno-lineyjnyx differencial'nyx uravneniyj vtorogo poryadka]. *Ufimskiyj matematicheskiyj zhurnal — Ufa Mathematical Journal*, 2014, vol. 6, no. 1, pp. 84–93.

6. Ahmedov J.T., Mirzoev S.H., Nurov I.J. Analysis of periodic solutions of non-smooth dynamical systems with forced oscillations. [Ahmedov J.T., Mirzoev S.H., Nurov I.J. Analiz periodicheskix resheniyj negladkoyj dinamicheskoyj sistemy s vynuzhdennym kolebaniem]. *Vestnik TNU — Proceedings of TNU*, 2016, iss. 1–3, pp. 14–17.

7. Leine R.I., Van. Campen D.H. Bifurcation phenomena in non-smooth dynamical system. European Journal of Mechanigs Solids, 2006, pp. 595–616.

8. Muhamadiev E.M., Gulov A.M., Nurov I.J. Analysis of limit cycle appearing for one class of non-linear second order differential equation. [Muhamadiev E.M., Gulov A.M., Nurov I.J. Analiz rozhdeniya predel'nyx ciklov odnogo klassa nelineyjnoyj uravneniyj vtorogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 1, pp. 118–125.

9. Muhamadiev E.M. On the theory of periodical solutions of systems of ordinary differential equations. [Muxamadiev E.M. K teorii periodicheskix resheniyj sistem obyknovennyx differencial'nyx uravneniyj]. *Doklady AN SSSR — Reports of Academy of Sciences of the USSR*, 1970, vol. 194, no. 3, pp. 510–513.

10. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

11. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On An A Priori Estimate Of The Solutions Of A Boundary Value Problem In A Strip For A Degenerate High Order Elliptic Equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 162–172.

Ахмедов Джовидон Толибович, аспирант Таджикского национального университета, г. Душанбе, Республика Таджикистан
E-mail: jovidon-a.90@mail.ru

Ahmedov Jovidon Tolibovich, Post-graduate student of the Tajik National University, Dushanbe, Republic of Tajikistan
E-mail: jovidon-a.90@mail.ru

Мухамадиев Эргашбой Мирзоевич, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и технологий, Вологодский государственный университет, Вологда, Российская Федерация
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Muhamadiev Ergashboi Mirzoevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Information System and Technology , Vologda State University, Vologda, Russian Federation
E-mail: emuhamadiev@rambler.ru

Нуров Исхокбой Джумаевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой моделирования, Таджикский национальный университет, г. Душанбе, Республика Таджикистан
E-mail: nid1@mail.ru

Nurov Ishokboi Jumaevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor of the Department of Modeling, Tajik National University, Dushanbe, Republic of Tajikistan
E-mail: nid1@mail.ru