УДК 517.95

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С ФИНАЛЬНЫМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЕМ ВТОРОГО РОДА

Алмохамед Муатаз

Московский педагогический государственный университет;
Университет Алеппо, Сирия

Поступила в редакцию 07.07.2017 г.

Аннотация. В банаховом пространстве рассматривается линейное дифференциальное уравнение второго порядка с неизвестной правой частью, не зависящей от времени. Исследуется обратная задача о нахождении правой части при помощи финального переопределения второго рода, когда в финальный момент времени задано значение производной от основной эволюционной функции. Обратная задача является линейной. Поэтому единственность решения в ней эквивалентна отсутствию нетривиальных решений у однородной обратной задачи. Показано, что в некоторых простых ситуациях однородная обратная задача имеет нетривиальные элементарные решения с разделяющимися переменными. Установлен критерий единственности решения обратной задачи. Результат имеет спектральный характер и не требует ограничений на тип абстрактного дифференциального уравнения. Приведены примеры и следствия.

Ключевые слова: абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка, обратная задача, финальное переопределение, элементарные решения, критерий единственности решения.

UNIQUENESS CRITERION FOR LINEAR INVERSE PROBLEM WITH THE FINAL OVERDETERMINATION OF THE SECOND TYPE

Almohamed Muataz

Abstract. We consider a linear differential equation of the second order in a Banach space. A right side of the equation is unknown and independent of time. An inverse problem for finding the right side is studied. A final overdetermination of the second type is given. It is a value of first derivative of a main evolution function at a final point in time. As long as the inverse problem is linear, a uniqueness of the solution and an absence of non-trivial solutions of a homogeneous inverse problem are equivalent. A number of simple examples show that the homogeneous inverse problem may have non-trivial elementary solutions with separable variables. In the paper a universal uniqueness criterion for the inverse problem is established. The result has a spectral character and it does not require restrictions on a type of the differential equation. Examples and consequences are given.

Keywords: abstract differential equation of the second order, inverse problem, final overdetermination, elementary solutions, uniqueness criterion of the solution.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория обратных задач для эволюционных дифференциальных уравнений составляет важную часть общей теории обратных задач (см. [1], [2]). С абстрактной точки зрения эволюционные уравнения часто рассматривают в банаховом пространстве E на конечном отрезке $[\,0,T\,]$. Типичная задача: требуется восстановить неизвестную правую часть уравнения при помощи дополнительного условия в финальный момент времени. Обычно финальное условие имеет вид $u(T) = v_T$, где v_T — заданный элемент из E. Будем называть это *финальным переопределением первого рода.* Задачи с таким условием рассматривались, например, в работе [3] (см. также цитированную там литературу). В работе [4] для обратной задачи с финальным переопределением получен критерий единственности решения в случае дифференциального уравнения первого порядка. Затем, в работе [5], критерий единственности перенесен на уравнение произвольного порядка, в том числе, на уравнение второго порядка. Подчеркнем, что в [4], [5] фигурировало финальное переопределение именно первого рода.

Но для уравнений второго порядка представляет интерес также *финальное переопределение второго рода*, когда при $t = T$ задано значение производной $u'(T) = v_T$. Возможно, что задачи с последним условием еще не изучены с должной подробностью. Отметим лишь результаты [2; п. 8.3], где для уравнений «эллиптического типа» рассматривалась обратная задача с заданной комбинацией $\alpha u(T) + \beta u'(T) = v_T$, включающей в себя оба упомянутых выше переопределения.

В настоящей работе, используя методику [4], [5], мы получим критерий единственности решения в линейной обратной задаче для эволюционного уравнения *второго порядка* в случае финального переопределения *второго рода.* Также, как в [4], [5], наш результат имеет универсальный характер и не налагает ограничений на тип уравнения.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть E — комплексное банахово пространство и A — линейный замкнутый оператор в E с областью определения $D(A) \subset E$ (не обязательно плотной в E). Зафиксируем вещественное число $T > 0$ и на интервале $(\,0,T\,)$ рассмотрим абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''(t) = Au(t) + g, \qquad 0 < t < T, \tag{1}$$

с неизвестным элементом $g \in E$.

Для одновременного нахождения функции $u\colon [\,0,T\,] \to E$ и элемента g добавим условия

$$u(0) = u_0, \qquad u'(0) = u_1, \qquad u'(T) = u_2, \tag{2}$$

где $u_0, u_1, u_2 \in E$. Задача (1), (2) относится к *обратным задачам* (см. [1], [2]).

Пару $(u(t), g)$ назовем *ослабленным решением* обратной задачи (1), (2), если

$$u \in C^2(\,(\,0,T\,), E\,) \cap C^1(\,[\,0,T\,], E\,), \quad u(t) \in D(A) \;\text{ при }\; 0 < t < T, \quad g \in E, \tag{3}$$

и выполнены все соотношения (1), (2). При этом $Au \in C(\,(\,0,T\,), E\,)$.

При рассмотрении уравнения (1) на всем отрезке $[\,0,T\,]$ пара $(u(t), g)$ называется *классическим решением* обратной задачи (1), (2), если

$$u \in C^2(\,[\,0,T\,], E\,), \qquad u(t) \in D(A) \;\text{ при }\; 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad g \in E. \tag{4}$$

При этом уравнение (1) должно быть выполнено на отрезке $[\,0,T\,]$, а в соотношениях (2) для согласования условий надо считать, что $u_0 \in D(A)$.

Предположим что обратная задача $(1),(2)$ с некоторыми элементами $u_0, u_1,\ u_2 \in E$ разрешима. Поставим вопрос о единственности решения $(u(t), g)$. Понятно, что с общей точки зрения лучше рассматривать ослабленные решения, так как из единственности ослабленного решения будет также следовать единственность классического решения.

Пусть две пары функций $(u^{(1)}(t), g^{(1)})$, $(u^{(2)}(t), g^{(2)})$ являются ослабленными решениями обратной задачи $(1),(2)$. Тогда пара $(u(t),g)$, где

$$u(t) = u^{(1)}(t) - u^{(2)}(t), \qquad g = g^{(1)} - g^{(2)},$$

удовлетворяет уравнению (1) и условиям

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 0, \quad u'(T) = 0. \tag{5}$$

Задача $(1),(5)$ называется *однородной обратной задачей*. Очевидно, что задача $(1),(5)$ всегда имеет *тривиальное решение* $u(t) \equiv 0,\ g = 0$.

Итак, вопрос единственности решения в обратной задаче $(1),(2)$ сводится к вопросу об отсутствии нетривиальных решений у однородной обратной задачи $(1),(5)$. Для поиска возможных нетривиальных решений в $(1),(5)$ применим метод разделения переменных.

3. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Нетривиальные элементарные решения однородной задачи $(1),(5)$ ищем в виде

$$u(t) = y(t)f, \qquad g = g, \tag{6}$$

где $y(t)$ — скалярная комплекснозначная функция, а f, g — некоторые элементы из E. При этом считаем, что

$$y \in C^2\,[\,0,T\,], \quad y(t) \not\equiv 0, \quad f \in D(A), \quad f \neq 0. \tag{7}$$

Требование $g \neq 0$ пока не налагаем, ибо изначально нельзя исключать, что $g = 0$, а $u(t) \not\equiv 0$ на $[\,0,T\,]$. Предположения (7) согласуются с условиями (4), поэтому элементарное решение (6) будет классическим.

Подставляя пару (6) в задачу $(1),(5)$, получим уравнение

$$y''(t)f = y(t)\,Af + g, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

вместе с условиями

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0, \qquad y'(T) = 0, \tag{9}$$

выполненными в силу того, что $f \neq 0$.

Так как $y(0) = 0$, то при $t = 0$ из (8) следует связь

$$g = \alpha f, \tag{10}$$

где $\alpha \equiv y''(0)$ — некоторое число. Подставляя (10) в уравнение (8) и преобразуя результат, придем к соотношению

$$Af = \frac{y''(t) - \alpha}{y(t)}\, f,$$

выполненному там, где $y(t) \neq 0$. Такое возможно только, если

$$Af = \lambda f, \tag{11}$$

с некоторой константой $\lambda \in \mathbb{C}$.

Итак, элемент $f \neq 0$ должен быть собственным вектором оператора A с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$. Но тогда уравнение (8) с учетом соотношений (10), (11) и при добавлении двух начальных условий из формулы (9) дает задачу Коши

$$\begin{cases} y''(t) = \lambda\, y(t) + \alpha, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Решение задачи Коши (12) может быть записано в виде

$$y(t) = \alpha\, \frac{\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}\, t - 1}{\lambda}, \qquad \left[\, y(t) = \alpha t^2/2 \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \,\right]. \tag{13}$$

При этом

$$y'(t) = \alpha\, \frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, t}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \left[\, y'(t) = \alpha t \quad \text{при} \quad \lambda = 0 \,\right]. \tag{14}$$

Так как $y(t) \not\equiv 0$, то число α в формуле (13) должно быть отлично от нуля. Это значение α $(\equiv y''(0))$ выберем позднее.

Для нахождения подходящих значений $\lambda \in \mathbb{C}$ воспользуемся последним условием $y'(T) = 0$ из набора (9). При подстановке $t = T$ в формулу (14) получим уравнение

$$\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}\, T}{\sqrt{\lambda}} = 0. \tag{15}$$

Корни уравнения (15) выражаются формулой $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$, $k \in \mathbb{N}$ (нахождение корней элементарно). При подстановке таких значений в формулу (13) получаем функции

$$y_k(t) = -\frac{\alpha T^2}{k^2\pi^2}\left(\cos\frac{k\pi t}{T} - 1\right), \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{16}$$

а соотношение (11) дает серию уравнений

$$A f_k = -\frac{k^2\pi^2}{T^2}\, f_k, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

В силу ограничения (7) годятся только нетривиальные решения $f_k \neq 0$.

Допустим, что какое-то из чисел $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$ при некотором $k \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора A, и нетривиальное решение $f_k \neq 0$ существует. Принимая во внимание выражения (10), (16) и выбирая для удобства $\alpha = -k^2\pi^2/T^2$ получим нетривиальное элементарное решение (6) следующего вида

$$u_k(t) = \left(\cos\frac{k\pi t}{T} - 1\right) f_k, \qquad g_k = -\frac{k^2\pi^2}{T^2}\, f_k. \tag{18}$$

Сформулируем установленный результат.

Лемма 1. *Пусть существует* $k \in \mathbb{N}$, *для которого уравнение* (17) *имеет нетривиальное решение* $f_k \neq 0$, *т.е. число* $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$ *является собственным значением оператора* A *с собственном вектором* $f_k \in D(A)$. *Тогда обратная задача* (1), (5) *имеет нетривиальное элементарное решение вида* (18).

Доказательство. Все предыдущие рассуждения данного пункта дают полное обоснование леммы 1. Кроме того, прямая подстановка пары (18) в соотношения (1), (5) (с учетом того, что f_k — собственный вектор оператора A) сразу показывает, что эта пара есть нетривиальное решение однородной обратной задачи (1), (5).

Лемма 1 обеспечивает необходимое условие («необходимость») в следующем критерии единственности решения для однородной обратной задачи (1), (5).

4. КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Установим основной результат настоящей работы, дающий полный ответ на вопрос о единственности решения изучаемой обратной задачи. В следующей теореме речь идет о единственности ослабленного решения $(u(t), g)$, удовлетворяющего ограничениям (3).

Теорема 1. *Пусть A — линейный замкнутый оператор. Для того чтобы однородная обратная задача $(1), (5)$ имела только тривиальное решение $u(t) \equiv 0,\ g = 0,$ необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел*

$$\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{T^2}, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{19}$$

не являлось собственным значением оператора A.

Доказательство. Необходимость. Пусть число $\lambda_k = -k^2\pi^2/T^2$ с некоторым $k \in \mathbb{N}$ является собственным значением оператора A, и пусть $f_k \neq 0$ — соответствующий собственный вектор из $D(A)$. Тогда (см. лемму 1) пара (18) служит нетривиальным решением однородной обратной задачи (1), (5). Указанное решение (18) является не только ослабленным, но и классическим, удовлетворяя ограничения (4).

Докажем теперь достаточность. Предположим, что ни одно из чисел (19) не является собственным значением оператора A, и пусть $(u(t), g)$ — некоторое ослабленное решение однородной обратной задачи (1), (5). Покажем, что $u(t) \equiv 0$ и $g \equiv 0$.

Определим векторные коэффициенты

$$f_k = \int\limits_0^T u(t)\,\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Поскольку поведение функции $u(t)$ вблизи границ отрезка $[\,0, T\,]$ может «портиться» (см. условия (3)), зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим аппроксимации

$$f_{k,\varepsilon} = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} u(t)\,\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt, \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Учитывая замкнутость оператора A и уравнение (1), имеем соотношения

$$Af_{k,\varepsilon} = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} Au(t)\,\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt = \int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} u''(t)\,\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt - g\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} \cos\frac{k\pi t}{T}\,dt. \tag{22}$$

Проинтегрируем (22) по частям и получим

$$\begin{aligned} Af_{k,\varepsilon} &= u'(t)\,\cos\frac{k\pi t}{T}\,\Big|_\varepsilon^{T-\varepsilon} + \frac{k\pi}{T}\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} u'(t)\,\sin\frac{k\pi t}{T}\,dt - g\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon}\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt = \\ &= \left(u'(t)\,\cos\frac{k\pi t}{T} + \frac{k\pi}{T}\,u(t)\,\sin\frac{k\pi t}{T}\right)\Bigg|_\varepsilon^{T-\varepsilon} - \frac{k^2\pi^2}{T^2}\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon} u(t)\,\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt - \\ &- g\int\limits_\varepsilon^{T-\varepsilon}\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt \;\equiv\; h_{k,\varepsilon}. \end{aligned}$$

Устремим теперь $\varepsilon \to 0+$. Тогда

$$f_{k,\varepsilon} \to \int\limits_0^T u(t)\,\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt \,\equiv f_k\,, \qquad Af_{k,\varepsilon} = h_{k,\varepsilon} \to -\frac{k^2\pi^2}{T^2}\int\limits_0^T u(t)\,\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt \,\equiv \lambda_k\, f_k$$

с числами λ_k из формулы (19). В предельном переходе для $h_{k,\varepsilon}$ были использованы элементарные свойства тригонометрических функций и краевые условия (5).

Вновь учитывая замкнутость оператора A, приходим к соотношениям

$$f_k \in D(A), \qquad Af_k = \lambda_k\, f_k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

выполненным для элементов f_k из формулы (20) с числами λ_k вида (19). По предположению ни одно из чисел (19) не является собственным значением оператора A. Но тогда $f_k = 0$ для всех векторных коэффициентов (20).

Итак, установили, что

$$\int\limits_0^T u(t)\,\cos\frac{k\pi t}{T}\,dt \,= 0, \qquad \forall\; k \in \mathbb{N}.$$

Применяя линейный непрерывный функционал $f^* \in E^*$, получаем непрерывную скалярную функцию $\psi(t) = f^*(u(t))$, ортогональную на $[\,0,T\,]$ всем функциям $\cos\,(k\pi t/T)$ со значениями $k \in \mathbb{N}$. Такая функция $\psi(t)$ может быть только константой. Но

$$\psi(0) = f^*(u(0)) = 0$$

в силу условия $u(0) = 0$ (см. (5)). В результате $\psi(t) = f^*(u(t)) \equiv 0$ всюду на $[\,0,T\,]$. Выбор функционала $f^* \in E^*$ был произвольным. По теореме Хана–Банаха заключаем, что $u(t) \equiv 0$ на $[\,0,T\,]$. Здесь $u(t)$ — первый и, как мы установили, равный нулю компонент взятого решения $(u(t),g)$. Но тогда $g = 0$ автоматически (см. уравнение (1)). Решение однородной обратной задачи (1), (5) может быть только тривиальным. Теорема доказана.

Вернемся к неоднородной обратной задаче (1), (2) и сформулируем следующий завершающий результат.

Теорема 2. *Пусть A — линейный замкнутый оператор. Для того чтобы обратная задача* (1), (2) *при любом выборе элементов u_0,u_1,$u_2 \in E$ имела не более одного ослабленного решения $(u(t),g)$, необходимо и достаточно, чтобы ни одно из чисел λ_k вида* (19) *не являлось собственным значением оператора A.*

Теорема 2 прямо следует из теоремы 1 и дает критерий единственности решения обратной задачи (1), (2) без всяких ограничений на природу оператора A, т. е. без всяких ограничений на тип эволюционного уравнения (1). Кроме того, из теоремы 2 выводим удобное достаточное условие единственности решения обратной задачи (1), (2).

Теорема 3. *Пусть A — линейный замкнутый оператор, не имеющий собственных значений на луче $(\,-\infty,0\,)$. Тогда обратная задача* (1), (2) *при любом выборе значения $T > 0$ и элементов $u_0,u_1,u_2 \in E$ имеет не более одного ослабленного решения.*

Доказательство. Все числа вида (19) являются вещественными и отрицательными. Поэтому, по теореме 2, если у оператора A нет собственных значений на луче $(\,-\infty,0\,)$, то обратная задача (1), (2) не может иметь более одного ослабленного решения $(u(t),g)$.

Дадим несколько иллюстраций на применение полученных результатов.

5. ПРИМЕРЫ

В качестве модельных примеров к доказанным теоремам, рассмотрим три обратные задачи в прямоугольнике $(\,0,l\,) \times (\,0,T\,)$, где $l > 0, T > 0$ — фиксированные числа.

Ввиду простоты ситуации, ее «одномерности» по переменной x, выбор основного банахова пространства E представляется не слишком принципиальным. Для определенности будем считать, что $E = L_2(0,l)$ и $D(A) = H^2(0,l) \cap H_0^1(0,l)$, предполагая, что все последующие действия соответствуют абстрактной схеме.

Возьмем одно из следующих дифференциальных уравнений: 1) уравнение вынужденных колебаний струны

$$u_{tt}(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x), \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t < T\,; \tag{23}$$

2) эллиптическое уравнение типа Пуассона

$$u_{tt}(x,t) = -u_{xx}(x,t) + g(x), \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t < T\,; \tag{24}$$

3) уравнение с комплексным параметром

$$u_{tt}(x,t) = i\,u_{xx}(x,t) + g(x), \qquad 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \tag{25}$$

где i — мнимая единица. Независимо от типа уравнения, переменную t считаем условным эволюционным «временем».

При выборе того или иного уравнения будем добавлять к нему краевые условия

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \tag{26}$$

а также условия Коши

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \tag{27}$$

и финальное переопределение

$$u_t(x,T) = u_2(x). \tag{28}$$

Функции $u_0(x), u_1(x), u_2(x)$ предполагаем заданными. Неизвестной каждый раз является пара функции $u(x,t)$ и $g(x)$. Для уравнения Пуассона (24) разделение условий на «краевые», «начальные» и «финальное» представляется, конечно, немного искусственным, и весь набор (26)–(28) можно интерпретировать как одну общую комбинацию краевых условий.

Случай 1. Рассмотрим уравнение колебаний струны (23) с условиями (26)–(28). На отрезке $[0,l]$ собственные значения оператора $A = d^2/dx^2$ с краевыми условиями первого рода (см. (26)) имеют вид

$$\mu_m^{(1)} = -\frac{m^2\pi^2}{l^2}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{29}$$

т. е. $e_m''(x) = \mu_m^{(1)}\, e_m(x)$ с собственными функциями $e_m(x) = \sin(m\pi x/l)$.

В случае рационального отношения T/l множества чисел (19) и (29) будут пересекаться, и среди чисел λ_k вида (19) обязательно найдутся собственные значения оператора A. Соответственно, по теореме 2, в поставленной обратной задаче (23), (26)–(28) нет свойства единственности решения.

Поясним подробнее. Пусть $T/l = p/q$, где p/q — несократимая рациональная дробь. Возникает связь $k/m = p/q$, при которой числа из множества (19) попадают в множество (29). Полагая $k = np$, $m = nq$ с параметром $n \in \mathbb{N}$ и учитывая, что $q/l = p/T$, получаем нужные собственные значения

$$\mu_m^{(1)} = \mu_{nq}^{(1)} = -\left(\frac{nq\pi}{l}\right)^2 = -\left(\frac{np\pi}{T}\right)^2 = \lambda_{np} = \lambda_k$$

с соответствующими собственными функциями

$$e_m(x) = e_{nq}(x) = \sin\frac{nq\pi x}{l} = \sin\frac{np\pi x}{T} = f_{np}(x) = f_k(x).$$

Применяя теперь формулу (18), имеем бесконечный набор элементарных решений

$$u_{np}(x,t) = \left(\cos\frac{np\pi t}{T} - 1\right)\sin\frac{np\pi x}{T}, \qquad g_{np}(x) = -\frac{n^2p^2\pi^2}{T^2}\sin\frac{np\pi x}{T}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

удовлетворяющих однородной обратной задаче (23), (26)–(28) при выборе однородных условий $u_0(x) \equiv 0$, $u_1(x) \equiv 0$, $u_2(x) \equiv 0$. Единственность решения обратной задачи, тем самым, нарушается.

Если же отношение T/l иррационально, то множества чисел (19) и (29) не пересекаются, и ни одно из чисел (19) не является собственным значением оператора A. Но тогда, по теореме 2, задача (23), (26)–(28) при любом выборе данных $u_0(x)$, $u_1(x)$, $u_2(x)$ имеет не более одного решения $(u(x,t), g(x))$.

Как видим, ситуация подобна той, что обычно встречается в задачах Дирихле для уравнений гиперболического типа (см. [6], [7]; см. также [1, с. 140–143] и [3, с. 1619–1620]).

Случай 2. Рассмотрим теперь уравнение Пуассона (24) с условиями (26)–(28). На отрезке $[0, l]$ собственные значения оператора $A = -d^2/dx^2$ с краевыми условиями первого рода (см. (26)) имеют вид

$$\mu_m^{(2)} = \frac{m^2\pi^2}{l^2}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{30}$$

т. е. $(-e_m''(x)) = \mu_m^{(2)} e_m(x)$ с собственными функциями $e_m(x) = \sin(m\pi x/l)$.

Ни одно из чисел (30) не попадает на луч $(-\infty, 0)$. Следовательно, по теореме 3, обратная задача (24), (26)–(28) всегда имеет не более одного решения.

Случай 3. Рассмотрим, наконец, уравнение (25) с теми же условиями (26)–(28). На отрезке $[0, l]$ собственные значения оператора $A = i\,d^2/dx^2$ с краевыми условиями первого рода (см. (26)) имеют вид

$$\mu_m^{(3)} = -i\,\frac{m^2\pi^2}{l^2}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{31}$$

т. е. $i e_m''(x) = \mu_m^{(3)} e_m(x)$ с прежними собственными функциями $e_m(x) = \sin(m\pi x/l)$.

Подобно случаю 2, ни одно число (31) не попадает на луч $(-\infty, 0)$, и по теореме 3 обратная задача (25), (26)–(28) всегда имеет не более одного решения.

Автор выражает благодарность научному руководителю Тихонову И. В. за ценные советы при планировании исследования и рекомендации по оформлению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Денисов, А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. — М. : Изд-во МГУ, 1994. — 208 с.

2. Prilepko, A. I. Methods for solving inverse problems in mathematical physics / A. I. Prilepko, D. G. Orlovsky, I. A. Vasin. — N.Y., Basel : Marcel Dekker, 2000. — 744 p.

3. Орловский, Д. Г. К задаче определения параметра эволюционного уравнения / Д. Г. Орловский // Дифференц. уравнения. — 1990. — Т. 26, № 9. — С. 1614 – 1621.

4. Тихонов, И. В. Единственность решения двухточечной обратной задачи для абстрактного дифференциального уравнения с неизвестным параметром / И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 8. — С. 1132 – 1133.

5. Тихонов, И. В. Обратная задача для дифференциального уравнения в банаховом пространстве и распределение нулей целой функции типа Миттаг-Леффлера / И. В. Тихонов, Ю. С. Эйдельман // Дифференц. уравнения. — 2002. — Т. 38, № 5. — С. 637–644.

6. Bourgin, D. G. The Dirichlet problem for the vibrating string equation / D. G. Bourgin, R. Duffin // Bull. Amer. Math. Soc. — 1939. — V. 45, № 12, Part 1. — P. 851–858.

7. Сабитов, К. Б. Задача Дирихле для уравнений с частными производными высоких порядков / К. Б. Сабитов // Матем. заметки. — 2015. — Т. 97, вып. 2. — С. 262–276.

REFERENCES

1. Denisov A.M. Introduction to Inverse Problem Theory. [Denisov A.M. Vvedeniye v teoriyu obratnykh zadach]. Moscow: MSU, 1994, 208 p.

2. Prilepko A.I. Orlovskii D.G., Vasin I.A. Methods for solving inverse problems in mathematical physics. N.Y., Basel: Marcel Dekker, 2000, 744 p.

3. Orlovskii D.G. On a problem of determining the parameter of an evolution equation. [Orlovskii D.G. K zadache opredeleniya parametra evolyucionnogo uravneniya]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 1990, vol. 26, no. 9, pp. 1614 – 1621.

4. Tikhonov I.V., Eidel'man Yu.S. The unique solvability of a two-point inverse problem for an abstract differential equation with an unknown parameter. [Tikhonov I.V., Eidel'man Yu.S. Edinstvennost' resheniya dvuxtochechnoyj obratnoyj zadachi dlya abstraktnogo differencial'nogo uravneniya s neizvestnym parametrom]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2000, vol. 36, no. 8, pp. 1132–1133.

5. Tikhonov I.V., Eidel'man Yu.S. An inverse problem for a differential equation in Banach space and the distribution of zeros of an entire Mittag-Leffler function. [Tikhonov I.V., Eidel'man Yu.S. Obratnaya zadacha dlya differencial'nogo uravneniya v banaxovom prostranstve i raspredelenie nuleyj celoyj funkcii tipa Mittag-Lefflera]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2002, vol. 38, no. 5, pp. 637–644.

6. Bourgin D.G., Duffin R. The Dirichlet problem for the vibrating string equation. Bull. Amer. Math. Soc., 1939, vol. 45, no. 12, part 1, pp. 851–858.

7. Sabitov K.B. The Dirichlet problem for higher-order partial differential equations. [Sabitov K.B. Zadacha Dirixle dlya uravneniyj s chastnymi proizvodnymi vysokix poryadkov]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 2, pp. 262–276.

Алмохамед Муатаз, Аспирант кафедры математического анализа, Московский Педагогический Государственный Университет, Москва, Российская Федерация
E-mail: mssrmtz@gmail.com

Almohamed Muataz, Postgraduate Student of Mathematical Analysis Department, Moscow State Pedagogical University, Moscow, Russian Federation
E-mail: mssrmtz@gmail.com