

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОЦЕНКИ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИНТЕНСИВНОСТИ

Ю. Э. Корчагин, В. Н. Верещагин, К. Д. Титов

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 18.09.2019 г.

Аннотация. Рассмотрена задача квазиправдоподобной оценки местоположения изображения пространственно протяжённого объекта. Предполагалось, что форма интенсивности изображения неизвестна, а при формировании решающей статистики использовалось предполагаемое распределение интенсивности. Исследовано поведение сигнальной функции в окрестности истинного значения местоположения изображения. Методом локально-марковской аппроксимации найдены выражения для характеристик оценки (смещение и рассеяние), точность которых возрастает с увеличением отношения сигнал/шум. На примере прямоугольного изображения с линейно меняющейся интенсивностью исследовано влияние степени неоднородности интенсивности и формы принимаемого изображения на точность оценки.

Ключевые слова: оценка местоположения, изображение, форма интенсивности, координаты изображения, решающая статистика, квазиправдоподобная оценка, смещение, рассеяние оценки.

EFFICIENCY OF IMAGE LOCATION ESTIMATION WITH UNKNOWN INTENSITY DISTRIBUTION

Yu. E. Korchagin, V. N. Vereshchagin, K. D. Titov

Abstract. The problem of quasi-likelihood estimation of an image location of a spatially extended object is considered. It was assumed that the shape of the image intensity was unknown, and the estimated intensity distributions were used in the formation of the decision statistics. The behavior of the signal function in the vicinity of the true value of the image location is investigated. The local Markov approximation is used to find expressions for estimation characteristics (offset and scattering), the accuracy of which increases with increasing signal-to-noise ratio. On the example of a rectangular image with linearly varying intensity, the influence of the degree of inhomogeneity of the received image intensity and shape of the received image on the estimate accuracy is investigated.

Keywords: estimation of location, image, shape of intensity, image coordinates, decision statistics, quasi-likelihood estimation, offset estimation, scattering estimation.

Задача оценки местоположения пространственно протяжённого объекта по его изображению актуальна в областях радио- и гидролокации, радиоастрономии, дистанционного наблюдения и зондирования и др., где обработке подвергается реализация двумерного случайного поля $\xi(x,y)$, которое в общем случае содержит изображение объекта, фон и пространственный шум [1–7]. Полезное изображение при этом зачастую описывают квазидетерминированной функцией двух переменных $s(x,y)$, смысл которой — зависимость интенсивности изображения от координат (x,y) . Будем называть $s(x,y)$ распределением интенсивности или профилем интенсивности изображения.

В зависимости от природы изображения, а также от разрешающей способности системы его регистрации $s(x,y)$ может быть регулярной или разрывной функцией координат. Разрывные функции описывают объекты с чётко очерченными границами.

Вопросы оптимальной обработки изображений пространственно протяжённых объектов, учитывающие статистическую природу наблюдаемого поля $\xi(x,y)$, рассматривались в работах [1–7] для аддитивной и аппликативной моделей взаимодействия сигнала с фоном при наличии шума. При использовании аддитивной модели предполагалось, что в области, занимаемой изображением, интенсивности квазидетерминированного изображения и фона отличны от нуля. В аппликативной модели изображение затеняет фон, т. е. в области, занимаемой изображением, интенсивность фона равна нулю. В работе [4] исследованы алгоритмы обнаружения квазидетерминированного изображения при наличии фона. В работах [6, 7] синтезированы алгоритмы обработки изображения с неизвестным местоположением, наблюдаемого в присутствии аддитивного гауссовского пространственного белого шума.

В работе [7] рассмотрена эффективность оценки местоположения неоднородного изображения (когда $s(x,y) \neq const$) в предположении априори известного распределения интенсивности изображения. На практике возможны случаи, когда распределение интенсивности изображения априори неизвестно. В связи с этим представляет интерес рассмотрение более общего случая — решение задачи оценки местоположения изображения с неизвестной интенсивностью, меняющейся в пределах изображения. Для оценки местоположения может быть использован квазиравдоподобный (КП) приёмник, синтезированный для некоторого прогнозируемого (предполагаемого) распределения интенсивности изображения той же формы и площади.

В данной работе выполнен синтез и анализ КП алгоритма оценки неизвестного местоположения двумерного сигнала (изображения) с неизвестным распределением интенсивности, а также исследовано влияние априорного незнания параметров изображения на эффективность этой оценки. Изображение с неизвестными интенсивностью и местоположением может быть описано функцией

$$s(x,y,\lambda,\eta) = f(x - \lambda, y - \eta)I(x - \lambda, y - \eta), \quad (1)$$

где $f(x,y) \geq 0$ — дифференцируемая по обоим аргументам функция, описывающая распределение интенсивности, λ, η — величины, характеризующие местоположение изображения на плоской двумерной области наблюдения Ω . Изображение занимает область $\Omega_s(\lambda, \eta) \subset \Omega$, описываемую индикаторной функцией

$$I(x,y) = \begin{cases} 1; x,y \in \Omega_s(0,0); \\ 0; x,y \notin \Omega_s(0,0); \end{cases} \quad I(x - \lambda, y - \eta) = \begin{cases} 1; x,y \in \Omega_s(\lambda,\eta); \\ 0; x,y \notin \Omega_s(\lambda,\eta). \end{cases}$$

Пусть в области наблюдения Ω доступна наблюдению (обработке) реализация гауссовского случайного поля

$$\xi(x,y) = s(x,y,\lambda_0,\eta_0) + n(x,y) \quad x,y \in \Omega, \quad (2)$$

где $n(x,y)$ — аддитивный пространственный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и односторонней спектральной плотностью N_0 .

В области наблюдения Ω выберем систему координат так, чтобы выполнялось равенство [6, 7]

$$\iint_{\Omega} xI(x,y)dxdy = \iint_{\Omega} yI(x,y)dxdy,$$

то есть начало координат расположим в “центре тяжести” области $\Omega_s(0,0)$, описываемой индикатором $I(x,y)$. Тогда λ, η — координаты “центра тяжести” области $\Omega_s(\lambda, \eta)$, занимаемой изображением и описываемой индикаторной функцией $I(x - \lambda, y - \eta)$, а λ_0, η_0 — неизвестные

истинные координаты “центра тяжести” изображения из реализации наблюдаемых данных, определяющие его местоположение.

Будем считать, что η_0 априори известно. Тогда без потери общности можно положить $\eta_0 = 0$ и переписать (2) как

$$\xi(x, y) = s(x, y, \lambda_0) + n(x, y), \quad x, y \in \Omega, \quad (3)$$

$$s(x, y, \lambda) = f(x - \lambda, y) I(x - \lambda, y). \quad (4)$$

Положим, что абсцисса λ_0 “центра тяжести” области $\Omega_s(\lambda_0, 0) \equiv \Omega_s(\lambda_0)$, занимаемой изображением, априори неизвестна и принимает значения из интервала $[-\lambda_{\max}/2, \lambda_{\max}/2]$. По результатам наблюдения необходимо решить задачу оценки неизвестного местоположения λ_0 изображения $s(x, y, \lambda_0)$ с неизвестным распределением интенсивности $f(x, y)$ из реализации (3) в области Ω .

Если распределение интенсивности $f(x, y)$ изображения (4) известно, то можно найти логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОП) и реализовать максимально правдоподобный (МП) алгоритм оценки. В соответствии с методом МП [8, 9], для получения оценки $\hat{\lambda}$ местоположения λ_0 изображения (4) необходимо формировать логарифм ФОП [4]

$$L_m(\lambda) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega} \xi(x, y) s(x, y, \lambda) dx dy \quad (5)$$

для всех значений λ . Оценка МП местоположения совпадает с положением наибольшего максимума решающей статистики (5) $\lambda_m = \arg \sup L_m(\lambda)$. Если интенсивность изображения $f(x, y)$ априори неизвестна, то будем использовать алгоритм оценки, синтезированный для некоторого предполагаемого распределения интенсивности изображения $g(x, y) \geq 0$. Тогда на выходе приёмника вырабатывается некоторая функция

$$L(\lambda) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega} \xi(x, y) \tilde{s}(x, y, \lambda) dx dy, \quad (6)$$

— выходной сигнал КП приёмника, который подобен логарифму ФОП, но таковым не является. Здесь $\tilde{s}(x, y, \lambda) = g(x - \lambda, y) I(x - \lambda, y)$ — опорное изображение, причём в общем случае $f(x, y) \neq g(x, y)$. КП алгоритм оценки $\hat{\lambda}$ местоположения λ_0 состоит в отыскании положения наибольшего максимума выходного сигнала КП приёмника (6)

$$\hat{\lambda} = \arg \sup L(\lambda), \quad \lambda \in [-\lambda_{\max}/2, \lambda_{\max}/2]. \quad (7)$$

Если функция $f(x, y)$ априори известна, то при $f(x, y) = g(x, y)$ выражение (6) совпадает с логарифмом ФОП при оптимальном приёме (5), а КП оценка (7) совпадает с оценкой МП λ_m .

Для определения характеристик КП оценки (7) исследуем статистические характеристики решающей статистики (6). Подставляя (2) в (6), представим её в виде суммы сигнальной и шумовой составляющих [8]

$$L(\lambda) = S(\lambda, \lambda_0) + N(\lambda), \quad (8)$$

где

$$S(\lambda, \lambda_0) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega} f(x - \lambda_0, y) g(x - \lambda, y) I(x - \lambda_0, y) I(x - \lambda, y) dx dy, \quad (9)$$

$$N(\lambda) = \frac{2}{N_0} \iint_{\Omega} n(x, y) g(x - \lambda, y) I(x - \lambda, y) dx dy$$

— сигнальная и шумовая составляющие соответственно. Будем аналогично [10] считать, что в окрестности λ_0 сигнальная функция удовлетворяет условиям

$$S(\lambda, \lambda_0) > 0, \quad dS(\lambda, \lambda_0)/d\lambda|_{\lambda=\lambda_0+0} < 0, \quad dS(\lambda, \lambda_0)/d\lambda|_{\lambda=\lambda_0-0} > 0. \quad (10)$$

Тогда положение максимума сигнальной функции $S(\lambda, \lambda_0)$ по переменной λ совпадает с истинным значением λ_0 местоположения изображения, и КП оценка (7) является состоятельной. Обозначим $S_m = \sup_{\lambda} S(\lambda, \lambda_0) = S(\lambda_0, \lambda_0) = \frac{2}{N_0} \int \int_{\Omega_s(0)} f(x, y) g(x, y) dx dy$ — величина максимума сигнальной составляющей (9), $\sigma_N^2 = \langle N^2(\lambda) \rangle = \frac{2}{N_0} \int \int_{\Omega_s(0)} g^2(x, y) dx dy$ — дисперсия шумовой составляющей. Перепишем выражение (8) в виде

$$L(\lambda) = S_m \hat{S}(\lambda, \lambda_0) + \sigma_N \hat{N}(\lambda) = \sigma_N \left[\tilde{z} \hat{S}(\lambda, \lambda_0) + \hat{N}(\lambda) \right], \quad (11)$$

где

$$\hat{S}(\lambda, \lambda_0) = \frac{S(\lambda, \lambda_0)}{S_m} = \int \int_{\Omega_{\min}(\lambda, \lambda_0)} f(x - \lambda_0, y) g(x - \lambda, y) dx dy \Big/ \int \int_{\Omega_s(0)} f(x, y) g(x, y) dx dy, \quad (12)$$

$$\hat{N}(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{\sigma_N} = \sqrt{\frac{2}{N_0}} \int \int_{\Omega_s(\lambda)} n(x, y) g(x - \lambda, y) dx dy \Big/ \sqrt{\int \int_{\Omega_s(0)} g^2(x, y) dx dy}, \quad (13)$$

— нормированные сигнальная (12) и шумовая (13) составляющие, $\Omega_{\min}(\lambda, \lambda_0) = \Omega_s(\lambda) \cap \Omega_s(\lambda_0)$,

$$\tilde{z}^2 = S_m^2 / \sigma_N^2 = z^2 K_{fg}^2$$

— отношение сигнал/шум (ОСШ) при КП приёме,

$$z^2 = \frac{2}{N_0} \int \int_{\Omega_s(0)} f^2(x, y) dx dy$$

— ОСШ на выходе приёмника МП при совпадении распределений интенсивности $f(x, y) = g(x, y)$ изображений,

$$K_{fg} = \int \int_{\Omega_s(0)} f(x, y) g(x, y) dx dy \Big/ \sqrt{\int \int_{\Omega_s(0)} g^2(x, y) dx dy \int \int_{\Omega_s(0)} f^2(x, y) dx dy}$$

— величина, характеризующая различие форм интенсивностей опорного и принимаемого изображений.

Шумовая составляющая $\hat{N}(\lambda)$ (13) является реализацией централизованного гауссовского случайного процесса с корреляционной функцией

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \langle \hat{N}(\lambda_1) \hat{N}(\lambda_2) \rangle = \int \int_{\Omega_{\min}(\lambda_1, \lambda_2)} g(x - \lambda_1, y) g(x - \lambda_2, y) dx dy \Big/ \int \int_{\Omega_s(0)} g^2(x, y) dx dy. \quad (14)$$

В случае оптимального приёма функции (12) и (14) совпадают $\hat{S}(\lambda_1, \lambda_2) \Big|_{f=g} = K(\lambda_1, \lambda_2) \Big|_{f=g}$.

При достаточно больших ОСШ \tilde{z} характеристики алгоритма оценки (7) определяются поведением сигнальной функции в окрестности истинного значения λ_0 местоположения изображения. Разложим сигнальную функцию (12) в ряд Тейлора по параметру λ в окрестности

точки λ_0 и ограничимся членом, содержащим первую производную. Согласно (12), сигнальная функция непрерывно дифференцируема в окрестности λ_0 справа и слева, исключая значение $\lambda = \lambda_0$, где производная терпит разрыв первого рода. Поэтому разложение функции (12) будет иметь вид

$$\widehat{S}(\lambda, \lambda_0) = 1 + \begin{cases} d_1(\lambda - \lambda_0) + o(|\lambda - \lambda_0|), & \lambda < \lambda_0, \\ -d_2(\lambda - \lambda_0) + o(|\lambda - \lambda_0|), & \lambda > \lambda_0. \end{cases} \quad (15)$$

Здесь

$$d_1 = d\widehat{S}(\lambda, \lambda_0)/d\lambda|_{\lambda=\lambda_0-0}, \quad d_2 = -d\widehat{S}(\lambda, \lambda_0)/d\lambda|_{\lambda=\lambda_0+0}. \quad (16)$$

Пусть, к примеру, область $\Omega_s(0,0)$, занимаемая изображением и задаваемая индикатором $I(x,y)$, имеет вид, показанный на рис. 1.

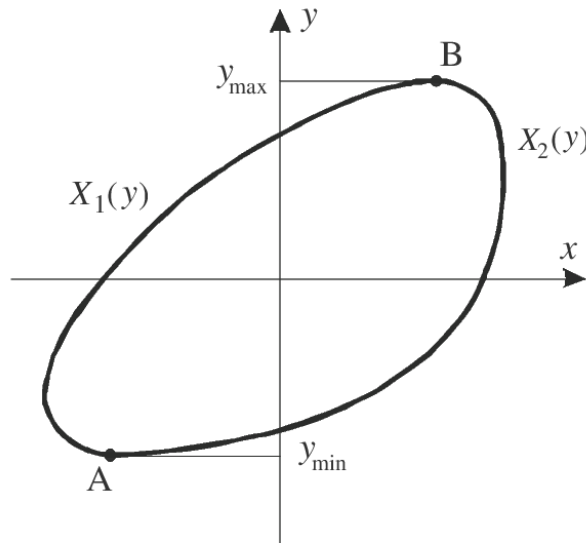


Рис. 1. Вид области, занимаемой изображением

Спроектируем эту область на ось Oy . Здесь y_{\min} — минимальное, а y_{\max} — максимальное значения координаты y проекции области $\Omega_s(0,0)$ на ось ординат. Обозначим через A, B точки на границе области $\Omega_s(0,0)$ с минимальным и максимальным значениями координаты по оси Oy соответственно, а через $X_1(y), X_2(y)$ — параметрические описания левой и правой частей границы области, занимаемой изображением относительно прямой AB . Используя обозначения на рис. 1, перепишем сигнальную функцию (12) в виде

$$\widehat{S}(\lambda, \lambda_0) = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} f(x - \lambda_0, y) g(x - \lambda, y) dx dy \Big/ \int \int_{\Omega_s(0)} f(x, y) g(x, y) dx dy. \quad (17)$$

Дифференцируя (17) по параметру λ с учётом конечной области существования изображения, получаем выражения для коэффициентов разложения (15)

$$d_i = (-1)^{i+1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\{ - \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} f(x, y) \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} dx + f(X_2(y), y) g(X_2(y), y) \delta_{i1} - \right. \\ \left. - f(X_1(y), y) g(X_1(y), y) \delta_{2i} \right\} dy / \int \int_{\Omega_s(0)} f(x, y) g(x, y) dx dy, \quad (18)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. На практике возможны различные комбинации видов распределения интенсивности истинного и предполагаемого (опорного) изображений. Поэтому, выполнив интегрирование по частям, представим коэффициенты разложения (18) в альтернативном виде

$$d_i = (-1)^{i+1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \left\{ - \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} g(x,y) \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + f(X_1(y),y) g(X_1(y),y) \delta_{1i} - \right. \\ \left. - f(X_2(y),y) g(X_2(y),y) \delta_{2i} \right\} dy / \int \int_{\Omega_s(0)} f(x,y) g(x,y) dx dy. \quad (19)$$

Рассмотрим несколько частных случаев распределения интенсивности. Если $g(x,y) = const$, а $f(x,y) \neq const$, то для коэффициентов разложения (16) удобна форма записи (18), поскольку интеграл по dx обращается в ноль

$$d_i = (-1)^{i-1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \{ f(X_2(y),y) g(X_2(y),y) \delta_{1i} - \\ - f(X_1(y),y) g(X_1(y),y) \delta_{2i} \} dy / \int \int_{\Omega_s(0)} f(x,y) g(x,y) dx dy. \quad (20)$$

Когда $f(x,y) = const$, а $g(x,y) \neq const$ удобна форма записи (19) коэффициентов разложения (16) сигнальной функции

$$d_i = (-1)^{i+1} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \{ f(X_1(y),y) g(X_1(y),y) \delta_{1i} - \\ - f(X_2(y),y) g(X_2(y),y) \delta_{2i} \} dy / \int \int_{\Omega_s(0)} f(x,y) g(x,y) dx dy. \quad (21)$$

В случае оптимального приёма распределения интенсивностей принятого и опорного изображений совпадают $f(x,y) = g(x,y)$, а коэффициенты разложения (16) сигнальной функции принимают вид

$$d_1 = d_2 = \frac{1}{2} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} [f^2(X_2(y),y) + f^2(X_1(y),y)] dy / \int \int_{\Omega_s(0)} f^2(x,y) dx dy, \quad (22)$$

что совпадает с результатом, полученным в [7].

Рассмотрим теперь корреляционную функцию (14). Учитывая равенство сигнальной функции (12) и корреляционной функции (14) при $f(x,y) = g(x,y)$ можем получить асимптотическое разложение (14) при $|\lambda_1 - \lambda_2| \rightarrow 0$ как частный случай выражения (15). Подставляя $g(x,y)$ вместо $f(x,y)$ в формулу (22), получаем

$$d_0 = d_1 = d_2 = \frac{1}{2} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} [g^2(X_2(y),y) + g^2(X_1(y),y)] dy / \int \int_{\Omega_s(0)} g^2(x,y) dx dy \quad (23)$$

— коэффициент разложения (15), причём $d_0 > 0$. Следовательно, корреляционная функция (14) при $|\lambda_1 - \lambda_2| \rightarrow 0$ допускает асимптотическое представление

$$K(\lambda_1, \lambda_2) = \hat{S}(\lambda_1, \lambda_2) \Big|_{f=g} = 1 + d_0 |\lambda_1 - \lambda_2| + o(|\lambda_1 - \lambda_2|). \quad (24)$$

Если опорное изображение имеет постоянную интенсивность $g(x,y) = const$, то $d_0 = l_y/G_s$, где $l_y = y_{\max} - y_{\min}$ — длина проекции изображения на ось Oy (рис.1), G_s — площадь изображения [7]. С увеличением $|\lambda_1 - \lambda_2|$ корреляционная функция (14) убывает и при $|\lambda_1 - \lambda_2| > l_x$ обращается в ноль. Здесь l_x — длина проекции изображения на ось Ox .

Таким образом, решающая статистика (11) КП алгоритма оценки (7) является гауссовским случайным процессом, математическое ожидание и корреляционная функция которого в условиях высокой апостериорной точности допускают представления (15) и (24) соответственно. Статистические свойства такого процесса достаточно подробно изучены в [7,10]. С учётом (15) условия состоятельности (10) КП оценки можно переписать в более удобном виде $S_m > 0, d_i > 0, i = 1,2$. Следовательно, условия (10) выполняются и КП оценка состоятельна, если выполняются условия

$$\int \int_{\Omega_s(0)} f(x,y) g(x,y) dx dy > 0,$$

$$-f(X_1(y),y) g(X_1(y),y) < \int_{X_1(y)}^{X_2(y)} g(x,y) \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx < f(X_2(y),y) g(X_2(y),y).$$

Найдём теперь характеристики оценки (7) местоположения изображения, полагая, что оценка состоятельна. С учётом свойств сигнальной (15) и корреляционной (24) функций методом локально марковской аппроксимации можно найти смещение и рассеяние надёжной КП оценки местоположения изображения [9, 11]

$$b(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \langle \hat{\lambda} - \lambda_0 \rangle = \frac{z_1^2 R(R+2) - z_2^2(2R+1)}{z_1^2 z_2^2 (R+1)^2}, \tag{25}$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle = 2 \frac{z_1^4 R(2R^2 + 6R + 5) + z_2^4 (5R^2 + 6R + 2)}{z_1^4 z_2^4 (R+1)^3}, \tag{26}$$

где

$$R = d_1/d_2, \quad z_1^2 = \tilde{z}^2 \frac{d_1^2}{d_0}, \quad z_2^2 = \tilde{z}^2 \frac{d_2^2}{d_0}. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (25) и (26), для смещения и рассеяния соответственно получаем

$$b(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \langle \hat{\lambda} - \lambda_0 \rangle = \frac{d_0 (d_1^2 - d_2^2)}{\tilde{z}^2 d_1^2 d_2^2}, \tag{28}$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \langle (\hat{\lambda} - \lambda_0)^2 \rangle = \frac{2d_0^2 2(d_1^6 + d_2^6) + 4d_1 d_2 (d_1^4 + d_2^4) + d_1^2 d_2^2 (d_1^2 + d_2^2) - d_1^3 d_2^3}{\tilde{z}^4 d_2^4 d_1^4 (d_1 + d_2)^2}. \tag{29}$$

Если форма опорного изображения совпадает с формой принимаемого $f(x,y) = g(x,y)$, то согласно (22), $d_1 = d_2 = d_0$, а для смещения (28) и рассеяния (29) получаем выражения

$$b(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 0, \quad V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 13/2z^4 d_0^2, \tag{30}$$

которые совпадают с характеристиками МП оценки местоположения изображения, полученными в [7].

Рассмотрим в качестве примера оценку местоположения изображения прямоугольной формы. Пусть в области наблюдения присутствует изображение, имеющее форму прямоугольника со сторонами l_x и l_y , параллельными осям Ox и Oy . Выберем систему координат так, чтобы начало координат находилось в точке пересечения диагоналей прямоугольника. Положим, что интенсивность изображения описывается линейной функцией, которая возрастает в направлении, составляющим угол θ со стороной l_x (осью Ox)

$$f(x,y) = AS_0 \left[\frac{(q-1)(x \cos \theta + y \sin \theta)}{l_x \cos \theta + l_y \sin \theta} + \frac{q+1}{2} \right], \tag{31}$$

где множитель $A = \left[\frac{(q-1)^2}{12} \frac{l_x^2 \cos^2 \theta + l_y^2 \sin^2 \theta}{(l_x \cos \theta + l_y \sin \theta)^2} + \left(\frac{q+1}{2} \right)^2 \right]^{-1/2}$ обеспечивает постоянство энергии изображения при различных значениях q и θ . Величина $q = s_{\max}/s_{\min}$ характеризует наклон, S_0 – амплитуду изменения интенсивности изображения, $s_{\max} = \max s(x,y)$, $s_{\min} = \min s(x,y)$, $x,y \in \Omega_s$ – максимальное и минимальное значения интенсивности соответственно. Для однородного изображения с теми же площадью и формой, что у неоднородного наклон равен единице ($q = 1$), так что $f(x,y) = S_0$. Выберем в качестве ожидаемого однородное изображение $g(x,y) = S_0$. Это соответствует случаю, когда приёмник, синтезированный для оценки местоположения однородного изображения используется для оценки местоположения неоднородного изображения (1), (31). Подставляя (31), а также $g(x,y) = S_0$ в (20), находим выражения для коэффициентов разложения (15), (24)

$$d_0 = 1/l_x, \quad d_1 = (1+a)/l_x, \quad d_2 = (1-a)/l_x, \quad a = \frac{q-1}{q+1} \cdot \frac{\cos \theta}{\cos \theta + \gamma \sin \theta}, \quad \gamma = l_y/l_x. \quad (32)$$

С учетом (32) выражения для характеристик оценки (28), (29) приобретают вид

$$b(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{4al_x}{z^2(a^2-1)^2}, \quad (33)$$

$$V(\hat{\lambda}|\lambda_0) = \frac{l_x^2}{2z^4} \cdot \frac{13 + 15a^4 + 101a^2 - a^6}{a^8 - 4a^6 + 6a^4 - 4a^2 + 1}. \quad (34)$$

Если в (32) – (35) положить $q = 1$, то получим совпадающие с (30) смещение и рассеяние МП оценки местоположения однородного изображения

$$b(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 0, \quad V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0) = 13l_x^2/2z^4. \quad (35)$$

Сопоставляя выражения (33), (34) с (35) можно оценить влияние неоднородности распределения яркости изображения на точность КП оценки его местоположения. В отличие от МП оценки, согласно (33) КП оценка является смещённой. По мере отклонения параметра q от единицы, модуль смещения оценки возрастает. Когда смещение оценки составляет существенную долю среднеквадратической ошибки, оно заметно снижает её точность. Поэтому введём в рассмотрение нормированное смещение

$$\beta(\hat{\lambda}|\lambda_0) = b(\hat{\lambda}|\lambda_0) / \sqrt{V_q(\hat{\lambda}|\lambda_0)}, \quad (36)$$

которое показывает, какую долю среднеквадратической ошибки занимает смещение КП оценки.

На рис. 2 представлены графики зависимости нормированного смещения (36) КП оценки от параметра q при $\theta = \pi/4$ и различных значениях параметра γ (сплошная кривая соответствует значению $\gamma = 0,1$, штриховая – $\gamma = 0,5$, штрих-пунктирная – $\gamma = 2$, пунктирная – $\gamma = 10$).

Чтобы охарактеризовать проигрыш в точности КП оценки по сравнению с оценкой МП введём в рассмотрение отношение

$$\chi(\hat{\lambda}|\lambda_0) = V(\hat{\lambda}|\lambda_0) / V_0(\hat{\lambda}|\lambda_0). \quad (37)$$

На рис. 3 представлены графики зависимости проигрыша (37) в точности КП оценки от параметра q при $\theta = \pi/4$ и различных значениях параметра γ (сплошная кривая соответствует значению $\gamma = 0,1$, штриховая – $\gamma = 0,5$, штрих-пунктирная – $\gamma = 2$, пунктирная – $\gamma = 10$).

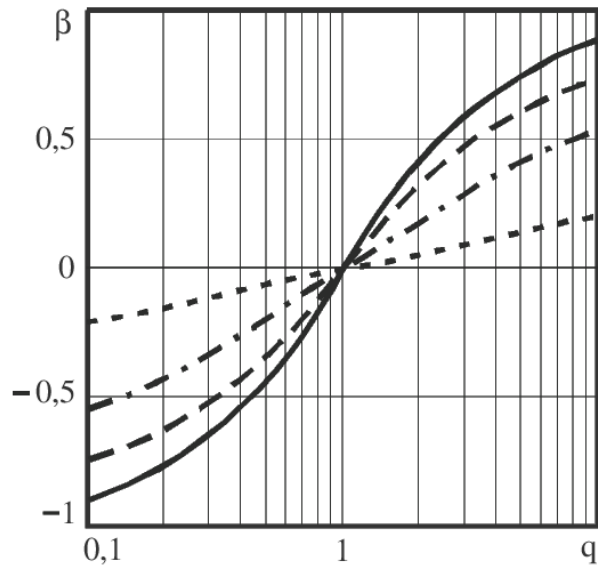


Рис. 2. Зависимость нормированного смещения КП оценки $\beta(q)$ от параметра q при $\theta = \pi/4$ и при различных значениях параметра γ .

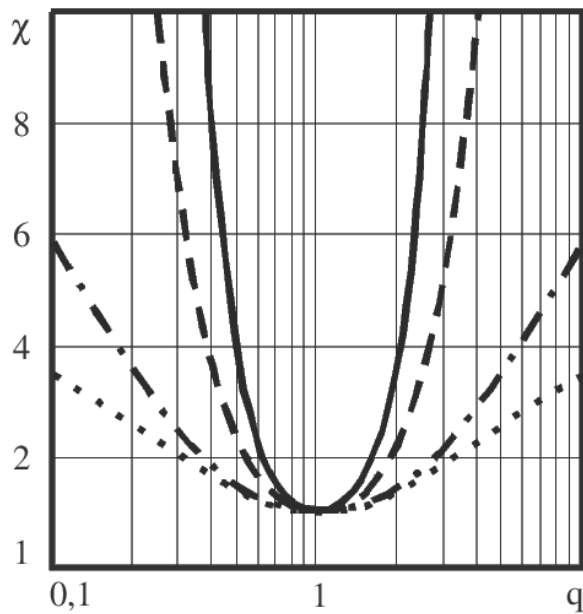


Рис. 3. Зависимость проигрыша в точности КП оценки $\chi(q)$ от параметра q при $\theta = \pi/4$ и при различных значениях параметра γ .

Из рисунков 2 и 3 видно, что максимальная точность оценки обеспечивается при $q = 1$ (что соответствует МП оценке), причём, если $q = 1$, то и $\theta = 0$. Если $q \neq 1$, то при одном и том же значении q точность оценки уменьшается при уменьшении γ , что соответствует “вытягиванию” изображения вдоль оси Ox .

Таким образом, выполнены синтез и анализ КП алгоритма оценки местоположения изображения с неизвестным распределением интенсивности. Найдено разложение сигнальной функции в окрестности истинного значения местоположения изображения. Получены выражения для смещения и рассеяния оценки. На примере изображения с заданным распределением интенсивности исследована зависимость характеристик оценки (эффективности оценки) от неравномерности распределения интенсивности изображения, а также от формы изображения. Полученные результаты позволяют определить потери в точности оценки местоположения изображения вследствие априорного незнания распределения его интенсивности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Островитянов, Р. В. Статистическая теория радиолокации протяжённых объектов / Р. В. Островитянов, В. Ф. Басалов. — М. : Радио и связь, 1982. — 232 с.
2. Красильников, Н. Н. Теория передачи и восприятия изображений / Н. Н. Красильников. — М. : радио и связь, 1986. — 248 с.
3. Трифонов, А. П. Характеристики обнаружения и оценки положения источника сигнала, модулирующего пуассоновское случайное поле / А. П. Трифонов, А. В. Зюльков // Радиоэлектроника. — 1981. — Т. 26, № 12. — С. 32–38.
4. Трифонов, А. П. Обнаружение квазидетерминированного изображения при наличии фона с неизвестными параметрами / А. П. Трифонов, Ю. Н. Прибытков // Автометрия. — 2002. — Т. 38, № 4. — С. 19–31.
5. Бычков, А. А. Обнаружение изображений пространственно-протяжённых затеняющих фон объектов / А. А. Бычков, В. А. Понькин // Автометрия. — 1992. — № 4. — С. 33–40.
6. Трифонов, А. П. Эффективность обнаружения изображения с неизвестным местоположением / А. П. Трифонов, С. А. Савин // Радиоэлектроника. — 2006. — Т. 49, № 9. — С. 3–13.
7. Трифонов, А. П. Эффективность обнаружения и оценки местоположения неоднородного изображения / А. П. Трифонов, С. А. Савин // Радиоэлектроника. — 2007. — Т. 50, № 12. — С. 3–15.
8. Куликов, Е. И. Оценка параметров сигналов на фоне помех / Е. И. Куликов, А. П. Трифонов. — М. : Сов. Радио, 1978. — 296 с.
9. Трифонов А.П., Шинаков Ю.С. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех. — М.: Радио и связь, 1986. — 264 с.
10. Трифонов А.П., Сморгонский А.В. Квазиправдоподобная оценка времени прихода финитного сигнала // Радиоэлектроника. — 2008. — т. 51, №1, С. 60-71. (Изв. вузов).
11. Трифонов, А. П. Статистические свойства высоты и положения абсолютного максимума марковского случайного процесса типа Башелье / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, М. Б. Беспалова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 54–65.

REFERENCES

1. Ostrovitianov R.V., Basalov V.F. Statistical theory of radar of extended objects. [Ostrovitianov R.V., Basalov V.F. Statisticheskaiia teoriia radiolokatcii protiazhyonnykh ob'ektov]. Moscow: Radio and communications, 1982, 232 p.
2. Krasil'nikov N.N. Theory of image transmission and perception. [Krasil'nikov N.N. Teoriia peredachi i vospriiatiia izobrazhenii']. Moscow: Radio and communications, 1986, 248 p.
3. Trifonov A.P., Ziul'kov A.V. Characteristics of detection and evaluation of the position of

the signal source modulating the Poisson random field. [Trifonov A.P., Ziulkov A.V. Harakteristiki obnaruzheniia i ochenki polozheniia istochnika signala, moduliruiushchego puassonovskoe sluchai'noe pole]. *Radioelektronika — Radioelektronika*, 1981, vol. 26, no. 12, pp. 32–38.

4. Trifonov A.P., Pribytkov Iu.N. Detection of a quasi-deterministic image in the presence of a background with unknown parameters. [Trifonov A.P., Pribytkov Iu.N. Obnaruzhenie kvazideterminirovannogo izobrazheniia pri nalichii fona s neizvestny'mi parametrami]. *Avtometriya — Autometry*, 2002, vol. 38, no. 4, pp. 19–31.

5. Bychkov A.A., Ponkin V.A. Detection of spatially extended background shading images. [Bychkov A.A., Ponkin V.A. Obnaruzhenie izobrazhenii prostranstvenno-protiazhyonnykh zateniaiushchikh fon ob'ektov]. *Avtometriya — Autometry*, 1992, № 4, pp. 33–40.

6. Trifonov A.P., Savin S.A. Efficiency of image detection with unknown location. [Trifonov A.P., Savin S.A. Effektivnost' obnaruzheniya izobrazheniya s neizvestnym mestopolozhением]. *Radioelektronika — Radioelectronics and Communications Systems*, 2006, vol. 49, no. 9, pp. 1–8.

7. Trifonov A.P., Savin S.A. Effectiveness of detection and estimation of position of heterogeneous image. [Trifonov A.P., Savin S.A. Effektivnost' obnaruzheniya i ochenki mestopolozheniya neodnorodnogo izobrazheniya]. *Radioelektronika — Radioelectronics and Communications Systems*, 2007, vol. 50, no. 12, pp. 647–656.

8. Kulikov E.I., Trifonov A.P. Estimation of signal parameters against noise background. [Kulikov E.I., Trifonov A.P. Ocenka parametrov signalov na fone pomeh]. Moscow, 1978, 296 p.

9. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. The joint assessment of the distinction between signals and their parameters on the background noise. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i ochenka ih parametrov na fone pomeh]. Moscow, 1986, 264 p.

10. Trifonov A.P., Smorgonsky A.V. Quasiprobable estimation of arrival instant of finite signal. [Trifonov A.P., Smorgonskiy A.V. Kvazipravdopodobnaya ochenka vremeni priхода finitnogo signala]. *Radioelektronika — Radioelectronics and Communications Systems*, 2008, vol. 51, no. 1, pp. 60–71.

11. Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Bepalova M.B. Statistical properties of height and provisions of absolute maximum markov processes Bachelier type. [Trifonov A.P., Korchagin Yu.E., Bepalova M.B. Statistich-eskie svoistva vysoty i polozeniya absolyutnogo maksimuma markovskogo sluchainogo processa tipa Bachel'e]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 4, pp. 54–65.

Корчагин Юрий Эдуардович, доктор физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой радиоп физики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Тел.: +7(473)220-89-16

Korchagin Yuri Eduardovich, Doctor of physico-mathematical sciences, Head of the Department of radiophysic of Voronezh State University, Voronezh, Russia,
E-mail: korchagin@phys.vsu.ru
Tel.: +7(473)220-89-16

Верещагин Вячеслав Николаевич, инженер-конструктор 2 категории АО "Воронежский научно-исследовательский институт "Вега", г. Воронеж, Россия
E-mail: slawa-w@mail.ru

Vereshchagin Viacheslav Nicolaevich, Joint-stock company "Voronezh scientific-research institute "Vega Voronezh, Russia
E-mail: slawa-w@mail.ru

Титов Константин Дмитриевич, кандидат физико-математических наук, ассистент кафедры радиоп физики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Россия

E-mail: titovkd@bk.ru

Тел.: +7(473)220-89-16

Titov Konstantin Dmitrievich, Candidate of physico-mathema sciences, Assistant of the Departament of radiophysic of Voronezh State University. Voronezh, Russian Federation

E-mail: titovkd@bk.ru

Tel.: +7(473)220-89-16