УДК 517.9

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

С. С. Пономарев

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 11.01.2017 г.

Аннотация. В статье сформулированы условия, гарантирующие существование почти периодического по Бору решения дифференциального включения с диссиаптивным оператором. Условия формулируются в терминах почти периодичности по Степанову. Полученный результат применяется для исследования квазипараболического уравнения.

Ключевые слова: почти периодические по Бору функции, почти периодические по Степанову функции, дифференциальное включение, квазипараболическое уравнение, почти периодическое решение.

ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL INCLUSION

S. S. Ponomarev

Abstract. The article formulates the conditions guaranteeing the existence of an almost periodic solution of differential inclusion according to Bohr. Conditions are formulated in terms of almost periodicity according to Stepanov. The result used to study the quasi-parabolic equation.

Keywords: almost periodic functions, differential inclusion, quasi-parabolic equation.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вопросу существования и единственности почти периодического по Бору решения дифференциального включения в банаховом пространстве, посвящено большое количество работ. В работе [1] устанавливаются условия, гарантирующие существование и единственность почти периодического по Бору решения дифференциального включения

$$\frac{du}{dt}(t) \in A(t)u, \quad t \in \mathbb{R} \tag{EV}$$

заданного в вещественном банаховом пространстве X, при условии, что верна оценка

$$-\left[u - v, -\xi_u(s) + \xi_v(t)\right] \leqslant \theta(s,t) - \omega \|u - v\|, \tag{1}$$

где $\xi_u(s) \in A(s)$, $\xi_v(t) \in A(t)$ и

$$\theta(s,t) = \sum_{k=1}^{l} \|g_k(t) - g_k(s)\|, \quad s,t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

причем, каждая функция $g_k\colon R \to X$ является почти периодической по Бору. Операция $[u,v]$ (см. [2]), определяется следующим образом,

$$[u,v] = \lim_{\lambda \downarrow 0} \frac{\|u + \lambda v\| - \|u\|}{\lambda}, \tag{3}$$

для $u,v \in X$. Кроме того, требуется, чтобы резольвенты $R_\lambda(t) = (I - \lambda A(t))^{-1}$ были компактными операторами. В настоящей работе предпринимается попытка, установить более общие условия, накладываемые на семейство операторов $A(t)$, при выполнении которых дифференциальное включение (EV) имеет единственное почти периодическое по Бору решение. В частности, требуется, чтобы функции $g_k \colon R \to X$ в неравенстве (2) были почти периодическими по Степанову.

Напомним определение почти периодической функции по Бору (см. [3] гл. I.1)

Определение 1. Множество $D \subset \mathbb{R}$ относительно плотно, если существует число $l > 0$, такое, что любой интервал $[a,a+l]$ имеет непустое пересечение с D.

Определение 2. Число τ называется $\varepsilon-$почти периодом функции $f:\mathbb{R} \to X$, если

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\| \leqslant \varepsilon. \tag{4}$$

Определение 3. Непрерывная функция $f:\mathbb{R} \to X$ называется почти периодической по Бору функцией, если для любого $\varepsilon > 0$, множество $\varepsilon-$почти периодов относительно плотно в $\mathbb{R}$.

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to X$ — измеримая в смысле Лебега-Бохнера функция. Тогда при фиксированном $t \in \mathbb{R}$ будет измерима функция, определяемая равенством

$$(\widetilde{f}(t))(s) = f(t+s) \quad (s \in [0,1]).$$

Таким образом, можно определить отображение $\widetilde{f}$, которое каждому числу $t \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие измеримую функцию $f(t+s)(s \in [0,1])$. Через $\mathbb{L}([0,1], X)$ обозначим банахово пространство измеримых функций $\varphi:[0,1] \to X$ с нормой

$$\|\varphi\|_1 = \int_0^1 \|\varphi(s)\|\, ds.$$

Приведем определение почти периодической функции по Степанову ([3]).

Определение 4. Функция $f:\mathbb{R} \to X$ называется почти периодической по Степанову, если определенная указанным выше образом функция $\widetilde{f}$, является почти периодической по Бору функцией заданной на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{L}([0,1], X)$.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть $J = [a,b)$, где $-\infty < a \leqslant b \leqslant +\infty$. Обозначим $C_b(J,X)$ банахово пространство ограниченных непрерывных функций, действующих из J в X, с равномерной нормой $\|\cdot\|_\infty$. Символом I обозначим тождественное отображение из X в X.

Определим оператор сдвига следующим образом:

$$T_s f(t) := f(s+t), \quad s,t \in \mathbb{R}$$

и дадим эквивалентное определение почти периодической по Бору функции (см. [3]): непрерывная функция f является почти периодической по Бору функцией тогда, и только тогда, когда множество ее сдвигов $T_s f : t \mapsto f(s+t)$ относительно компактно в пространстве $C_b(\mathbb{R},X)$.

Определение 5. Эволюционный оператор. Пусть $\Gamma = \left\{(s,t) \in \mathbb{R}^2, s \leqslant t\right\}$ и $C(X,X)$ обозначает множество непрерывных отображений из X в себя. Отображение $S : \Gamma \longrightarrow C(X,X)$ будем называть эволюционным оператором на X, если выполняются два следующих условия:

(a) Для любого фиксированного $x \in X$, функция $S(\cdot,\cdot)x$ непрерывна на Γ.

(b) Для любых $(t,s),(s,r) \in \Gamma$, имеет место равенство $S(s,t) \circ S(r,s) = S(r,t)$ и $S(t,t) = I$.

Напомним определение полной траектории (см. [4]).

Определение 6. Полная траектория. Решение (EV). Непрерывную функцию $u : \mathbb{R} \to X$ будем называть полной траекторией эволюционного оператора S если, для любых $s,t \in \mathbb{R}$, верна импликация

$$s \leqslant t \quad \Rightarrow \quad u(t) = S(s,t)u(s)\,.$$

Если функция u является полной траекторией и множество $u(\mathbb{R})$ относительно компактно в X, то u называют компактной полной траекторией. Если же в определении полной траектории $\mathbb{R}$ заменить на $\mathbb{R}_+$, то функция u будет называться положительной траекторией (см. [4]). Если S эволюционный оператор порожденный $A(t)$, (см. определение 7), то такую полную траекторию u будем называть решением (EV)

Пусть $\{A(t)|t \in \mathbb{R}\}$ семейство многозначных операторов на X. Пусть $u_0 \in X$ и $J = [a,b)\,$, где $-\infty < a \leqslant b \leqslant +\infty$. Обозначим $EV(J,u^0)$ эволюционную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) \in A(t)u, \quad t \in J, \\ u(a) = u^0. \end{cases} \tag{5}$$

Под решением $EV(J,u^0)$ здесь и далее подразумевается слабое решение $EV\left(J,u^0\right)$ (см. определение в [2], [4], [5], [6]). Такое решение является непрерывным пределом дискретных схем. Приведем адаптированное из [1] определение дискретной схемы . Пусть $t_0 < t_1 < ... < t_N$ является разбиением отрезка $[t_0,t_N]$. Систему разностных включений

$$\frac{v_i - v_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \in A(t_i)v_i \;\; i = 1,...,N,$$

называют дискретной схемой дифференциального включения $u'(t) \in A(t)u(t)$ и обозначают $D_{A(\cdot)}(t_0,...t_N)$. Решением дискретной схемы $D_{A(\cdot)}(t_0,...t_N)$ называют кусочно-постоянную функцию $v\colon [t_0,t_N] \to X$, чьи значения $v(t_0) = v_0, v(t) = v(t_i) = v_i$ на полуинтервале $(t_{i-1},t_i], i = 1,2,...,N$ удовлетворяют приведенной выше системе разностных включению.

Условия (i — iiii), приведенные ниже, накладываемые нами на семейство многозначных операторов $\{A(t)|t \in \mathbb{R}\}$ позволяют ограничиться случаем равномерных разбиений, использующихся в построении дискретных схем (см. [5]) и гарантируют единственность решения. Заметим, что если $J' = [c,d]$, где $c < d$, компактный подинтервал $J = [a,b)$, и функция u является решением $EV(J,u^0)$, тогда сужение $u|_{J'}$ является решением $EV(J',u(c))$.

Приведенные ниже четыре адаптированных определения взяты из [4].

Определение 7. Если при любом $u^0 \in X$ и любых $s < t$ решение u задачи $EV([s,t],u^0)$ совпадает со значением $S(s,t)u^0$, то оператор $S(t,s)$ порождается оператором $A(t)$.

Определение 8. Многозначный оператор $A(s)$, действующий в X, является диссипативным, если оператор $-A(s)$ является акреативным, то есть, для любых $(u,\xi_u\,(s)) \in A\,(s)\,,\;(v,\xi_v\,(s)) \in A\,(s)\,$, верна оценка (1)

Определение 9. Диссипативный оператор $A(t)$ действующий в пространстве X называется m-диссипативным, если $R(I - \lambda A(t)) = X$ для всех $\lambda > 0$.

Определение 10. Множество W. Скажем, что функция $\theta\colon R^1 \times R^1 \to R^1$ принадлежит множеству W, если найдется конечный набор почти периодических по Степанову функций $g_k : \mathbb{R} \to X$, $k = 1, \cdots, l$ таких, что

$$\theta\,(s,t) = \sum_{k=1}^{l} \|g_k(t) - g_k(s)\|, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что, если функции $g_k : \mathbb{R} \to X$, $k = 1, \cdots, l$ почти периодические по Степанову, то и функция $F\colon R \to X^l$, заданная равенством $F(t) = (g_1(t), g_2(t), ..., g_l(t))$ также является почти периодической по Степанову. Всюду в дальнейшем под F будем подразумевать указанную выше функцию.

Следующие три свойства аналогичны приведенным в [4].

(i) Для некоторого $\omega > 0$, каждый оператор $A(t) + \omega I$ является нелинейным, многозначным, m-диссипативным оператором на X с всюду плотной областью определения.

(ii) Для всех s, $t \in \mathbb{R}^+$ и всех $(u,\xi_u(s)) \in A(s)$, $(v,\xi_v(t)) \in A(t)$, выполняется неравенство (1).

(iii)

$$\theta \in W$$

Определение 11. Условия $\mathcal{A}(\theta,\omega)$. Пусть $\omega > 0$. Скажем, что семейство операторов $A(t)$ обладает свойством $\mathcal{A}(\theta,\omega)$, если для него выполняются перечисленные выше условия (i), (ii) и (iii).

Напомним интегральное неравенство Бениляна для слабых решений (см. [7]). Пусть функция u является решением задачи $EV\left([s,T), u^0\right)$, а v является решением задачи $EV\left([s+\tau,T+\tau), v^0\right)$, где $\tau \in \mathbb{R}$ некоторое фиксированное число. Тогда при $t \in [s,T)$ имеет место оценка

$$\|u(t) - v(t+\tau)\| \leqslant e^{-\omega(t-s)}\|u^0 - v^0\| + e^{-\omega(t-s)}\int_0^{t-s} e^{\omega\sigma}\theta(\sigma+s,\sigma+s+\tau)d\sigma. \tag{6}$$

Более того, если $(w_0, \widehat{w_0}) \in A(s)$, то тогда

$$\|u(t) - w_0\| \leqslant e^{-\omega(t-s)}\|u^0 - w^0\| + e^{-\omega(t-s)}\int_0^{t-s} e^{\omega\sigma}\left(\theta(\sigma+s,0) + \|\widehat{w_0}\|\right)d\sigma. \tag{7}$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Сначала сформулируем и докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Предположим, что выполнены условия* $\mathcal{A}(\theta,\omega)$. *Пусть* $u^0 \in X$ *и* $u(t) = S(t,0)u^0$. *Тогда множество* $u(\mathbb{R}^+)$ *предкомпактно.*

Доказательство. Для $t \geqslant 0$ положим $u(t) = S(t,0)u^0$. Из (7) следует, что

$$M := \sup_{t\geqslant 0}\|u(t)\| < +\infty.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем T_ε так, чтобы

$$e^{-\omega T_\varepsilon}M \leqslant \frac{\varepsilon}{4}.$$

Мы можем взять T_ε достаточно большим, чтобы любой интервал $[a,a+T_\varepsilon]$ содержал η-период почти периодической по Степанову функции F, где

$$\eta = \frac{\varepsilon\omega}{2}.$$

В частности, каждый интервал

$$I_k = [kT_\varepsilon, (k+3)T_\varepsilon], \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{N},$$

содержит η-период функции F (см. [3]), т.е.

$$p_{k,\varepsilon} \in I_k.$$

Из (7) также следует, что для $t \geqslant 0$ верна оценка

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t+p_{k,\varepsilon})\| \quad &\leqslant e^{-\omega t}\|u^0 - u(p_{k,\varepsilon})\| \\ &\quad + e^{-\omega t}\int_0^t e^{\omega\sigma}\theta(\sigma,\sigma+p_{k,\varepsilon})d\sigma. \end{aligned}$$

Следовательно, в силу выбора T_ε и $p_{k,\varepsilon}$, при $t \in [T_\varepsilon, 3T_\varepsilon]$, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \|u(t) - u(t+p_{k,\varepsilon})\| \quad &\leqslant \varepsilon/2 + \eta/\omega \\ &\leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned} \tag{8}$$

Но из оценок

$$p_{k,\varepsilon} + T_\varepsilon \leqslant (k+2)T_\varepsilon \quad \text{и} \quad (k+3)T_\varepsilon \leqslant p_{k,\varepsilon} + 3T_\varepsilon$$

следует включение

$$[(k+2)T_\varepsilon,(k+3)T_\varepsilon] \subset [p_{k,\varepsilon} + T_\varepsilon, p_{k,\varepsilon} + 3T_\varepsilon], \quad k \in \mathbb{N},$$

а значит и включение

$$u\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty}[(k+2)T_\varepsilon,(k+3)T_\varepsilon]\right) \subset u\left(\bigcup_{k=0}^{k=+\infty} u\,[p_{k,\varepsilon}+T_\varepsilon,p_{k,\varepsilon}+3T_\varepsilon]\right),$$

переписав которое в другом виде, получим

$$u\,([2T_\varepsilon, +\infty[) \subset u\left(\bigcup_{k=0}^{k=+\infty}[p_{k,\varepsilon}+T_\varepsilon,p_{k,\varepsilon}+3T_\varepsilon]\right). \tag{9}$$

Так как функция u непрерывна, то множество

$$K := u\,([0,3T_\varepsilon]),$$

является компактом в X. Из (8) и (9) следует, что

$$x \in u\left(\mathbb{R}^+\right) \ \Rightarrow\ \operatorname{dist}(x, K) \leqslant \varepsilon,$$

где, $\operatorname{dist}(x, K)$ обозначает расстояние от x до множества K. Из компактности множества K следует, что множество $u\,(\mathbb{R}^+)$ предкомпактно. Доказательство леммы 1 завершено.

Сформулируем наш основной результат.

Теорема 12. ***Существование почти периодического по Бору решения.*** *Предположим, что для $(A(t))_{t\in\mathbb{R}}$ выполняется условие $\mathcal{A}(\theta,\omega)$, тогда (EV) имеет почти периодическое по Бору решение.*

Доказательство Теоремы 12 опирается на следующие утверждения.

Предложение 13. *Существует строго возрастающая последовательность положительных вещественных чисел $\{r_k\}$ таких, что $\lim_k r_k = +\infty$ и*

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \int_0^1 \theta(t+s, t+s+r_k)ds \leqslant \frac{1}{2^k}. \tag{10}$$

Доказательство: для любого $k \in \mathbb{N}$, найдется вещественное число r_k, являющееся 2^{-k}-почти периодом одновременно для всех $g_i, i = 1..l$. Используя определение почти периодичности по Степанову функций $g_i, i = 1..l$ и применяя индукцию, получим требуемый результат. ▫

Предложение 14. ***Подходящий сдвиг.*** *Зафиксируем $u^0 \in X$. Пусть $u(t) = S(0,t)u^0$ при $t \geqslant 0$ является решением $EV(0,+\infty,u^0)$ и пусть $\{r_k\}$ является последовательностью построенной в Предложении 13. Тогда найдется строго возрастающая последовательность положительных вещественных чисел $\{p_k\}$ таких, что*

- *(i) $\{p_k\}$ является подпоследовательностью $\{r_k\}$;*
- *(ii) $\{u(p_k - m) \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ сходится в X при всех $m \in \mathbb{N}$ (если $p_k - m < 0$ можно считать $u(n_k - m) = 0$).*

Доказательство предложения 14: диагональный процесс. В силу Леммы 1, $u(\mathbb{R}^+)$ предкомпактно в X. Применяя принцип математической индукции, для любового $m \in \mathbb{N}$, найдем строго возрастающую последовательность $\{\sigma_m(j)\}$ вещественных чисел такую, что последовательность $\{u(\sigma_m(j) - q) \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ сходится в X при любом $q \in \{0,1,\cdots,m\}$: для этого в качестве $\{\sigma_q(j)\}$ выберем подходящую последовательность $\{\sigma_{q-1}(j)\}$, начинающуюся с

$$\{\sigma_{-1}(k)\} := \{r_k\}.$$

Применение диагонального процесса

$$\{\sigma_k(k)\} := \{p_k\}$$

гарантирует выполнение сформулированных условий (i) и (ii) Предложения 14. Таким образом доказательство Предложения 14 завершено. ▫

Предложение 15. ***Существование предкомпактной полной траектории.*** *Пусть $u(t) = S(t,0)u^0$ при $t \geqslant 0$ является положительной траекторией. Тогда существует полная компактная траектория для S.*

Доказательство.

Пусть $\{p_k\}$ последовательность из Предложения 14. Покажем, что существует функция $w \in C(\mathbb{R}, X)$, такая, что последовательность $\{T_{p_k}u \,|\, k \in \mathbb{N}\}$ равномерно сходится к w на любом компактном подмножестве $\mathbb{R}$.

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ определим $I_m := [-m, +\infty[$ и положим

$$v_k(t) := u(p_k + t), \quad t \geqslant -p_k.$$

Пусть $m \in \mathbb{N}$. Для $t \in I_m$ и $i,j \in \mathbb{N}$ таких, что $p_i \geqslant m$ и $p_j \geqslant m$, будем иметь

$$\begin{aligned}
\|v_i(t) - v_j(t)\| &= \|S(0,t+p_i)u^0 - S(0,t+p_j)u^0\| \\
&= \|S(0,t+m+p_i-m)u^0 - S(0,t+m+p_j-m)u^0\| \\
&\leqslant \|S(p_i-m,t+m+p_i-m) \circ S(0,p_i-m)u^0 \\
&\qquad -S(p_j-m,t+m+p_j-m) \circ S(0,p_j-m)u^0\| \\
&\leqslant \|S(p_i-m,(t+m)+p_i-m)u(p_i-m)- \\
&\qquad S(p_j-m,(t+m)+p_j-m)u(p_j-m)\| \\
&\leqslant e^{-\omega(t+m)}\|u(p_i-m) - u(p_j-m)\| \\
&\qquad +e^{-\omega(t+m)}\int_0^{t+m} e^{\omega s}\theta(-m+s+p_i,-m+s+p_j)ds \\
&\leqslant e^{-\omega(t+m)}\|v_i(-m) - v_j(-m)\| \\
&\qquad +e^{-\omega(t+m)}\int_0^{t+m} e^{\omega s}\left(\theta(-m+s+p_i,-m+s)\right. \\
&\qquad\quad \left.+\,\theta(-m+s,-m+s+p_j)\right)ds \\
&\leqslant e^{-\omega(t+m)}\|v_i(-m) - v_j(-m)\| + \left(\frac{1}{2^i}+\frac{1}{2^j}\right)\frac{1-e^{-\omega(t+m)}}{1-e^{-\omega}}.
\end{aligned}$$

Приведенная выше цепочка неравенств следует из неравенства Бениляна и (10) (при $p_k \geqslant r_k$).

Заметим, что из (14) следует фундаментальность последовательности $(v_k)_k$ в $C_b(I_m,X)$. Следовательно для всех $m \in \mathbb{N}$, последовательность $(v_k)_k$ сходится к некоторой функции w_m в $C_b(I_m,X)$. Так как $w_m(t) = w_p(t)$ при $m \leqslant p$ и $t \in I_m$, мы можем определить $w : \mathbb{R} \to X$ как

$$w(t) := w_m(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

где $m := m(t)$ любое положительное целое число такое, что $t \geqslant -m$.

Пусть $\tau, t \in \mathbb{R}$ причем $\tau \leqslant t$. Из непрерывности $x \mapsto S(\tau,t)x$ следует, что

$$\begin{aligned}
w(t) &= \lim_k S(0,t+p_k)u^0 \\
&= \lim_k S(\tau+p_k,t+p_k) \circ S(0,\tau+p_k)u^0 \\
&= \lim_k S(\tau+p_k,t+p_k)\left(v_k(\tau)\right).
\end{aligned} \tag{11}$$

Но, в силу неравенства Бениляна верна оценка

$$\begin{aligned}
&\|S(\tau+p_k,t+p_k)v_k(\tau) - S(\tau,t)w(\tau)\| \\
&\quad\leqslant e^{-\omega(t-\tau)}\|v_k(\tau)-w(\tau)\| + e^{-\omega(t-\tau)}\int_0^{t-\tau} e^{\omega s}\|T_{p_k}f(\tau+s) - f(\tau+s)\|ds \\
&\quad\leqslant e^{-\omega(t-\tau)}\left(\|v_k(\tau)-w(\tau)\| + \frac{1}{2^k}\frac{1-e^{-\omega(t-\tau)}}{1-e^{-\omega}}\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Так как, по определению $w(\tau) = \lim_k v_k(\tau)$ то, используя (11) и (12), мы получим

$$S(\tau,t)w(\tau) = w(t)(= \lim_k S(\tau+p_k,t+p_k)\left(v_k(\tau)\right)).$$

Следовательно, w является решением эволюционной задачи (5).

Из 1 и включения

$$w(\mathbb{R}) \subset \overline{u(\mathbb{R}^+)},$$

заключаем, что траектория $w(\mathbb{R})$ относительно компактна (т.е. предкомпактна). □

Доказательство Теоремы 12.

Теперь докажем, что функция w построенная в предложении 15 является почти периодической по Бору функцией.

Пусть $\varepsilon > 0$ и $p \in \mathbb{R}$. Положим

$$M := \sup_{s\in\mathbb{R}}\|w(s)\|, \quad \delta_p := \max_{i\in\{1..l\}}\|T_p g_i - g_i\|_S.$$

Выберем $\alpha > 0$ достаточно большим, чтобы

$$4Me^{-\omega\alpha} < \varepsilon.$$

Для произвольного $\tau \in \mathbb{R}$ определим

$$t := \tau - \alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|T_p(w)(\tau) - w(\tau)\| &= \|S(t+p,t+p+\alpha)w(t+p) - S(t,t+\alpha)w(t)\| \\ &\leqslant e^{-\omega\alpha}\|w(t+p) - w(t)\| \\ &\quad + e^{-\omega\alpha}\int_0^\alpha e^{\omega s}\theta(p+s+t,s+t)ds \\ &\leqslant 2Me^{-\omega\alpha} + \delta_p\frac{1-e^{-\omega\alpha}}{1-e^{-\omega}} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \delta_p\frac{1}{1-e^{-\omega}}.\end{aligned}$$

Таким образом получаем, что если

$$\eta := \frac{\varepsilon}{2}\omega,$$

то каждый $\eta-$почти период p почти периодической по Степанову функции F, является $\varepsilon-$почти периодом функции w. Следовательно, w является почти периодической по Бору функцией, так как множество ее $\varepsilon-$почти периодов относительно плотно в $\mathbb{R}$. Доказательство теоремы 12 завершено. ▫

4. УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим следующее квазипараболическое уравнение с краевой задачей

$$(BVP2) = \begin{cases} v_t & = \varphi(v)_{xx} - \omega v, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times [0,1] \\ (\varphi(v))_x(t,0) & = g_0(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ (\varphi(v))_x(t,1) & = g_1(t), \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Заметим, что данная краевая задача отличается от рассматриваемой в примере 4.9 на стр. 112 монографии [12], так как в последней граничные условия совпадают

Предположим, что g_0 и g_1 являются почти периодическими по Степанову функциями. Пусть функция $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ строго возрастает и $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Положим $S' = [0,1]$ и $X = \mathbb{L}^1(S')$. Определим семейство операторов $A(t)$ с точностью до множества меры нуль следующим образом:

$$\begin{cases} A(t)v = \varphi(v)_{xx} - \omega v, \\ D(A(t)) = \{v \in X : \ (\varphi(v))_x(0) = g_0(t), (\varphi(v))_x(1) = g_1(t) \text{ и } \varphi(v)_x \\ \text{абсолютно непрерывна на } S'\}. \end{cases}$$

Функцию θ зададим равенством:

$$\theta(s,t) := |g_1(s) - g_1(t)| + |g_0(s) - g_0(t)|, \quad s,t \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Докажем теперь, что оператор $A(t)$ обладает свойством $\mathcal{A}(\theta,\omega)$.

• **1. Проверка условия скобок.**

Покажем, что верна следующая оценка

$$-[u-v, -A(s)u + A(t)v] \leqslant \theta(t,s) - \omega\|u-v\|_1.$$

Пусть $u \in D(A(s))$, $v \in D(A(t))$ и $\lambda > 0$. Тогда для каждой монотонно возрастающей липшицевой функции $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такой, что

$$|p| \leqslant 1 \quad p(0) = 0,$$

будем иметь

$$\begin{aligned}\int_0^1 (\varphi(u)-\varphi(v))'' p(\varphi(u)-\varphi(v))\,dx &= (\varphi(u)-\varphi(v))' p(\varphi(u)-\varphi(v))\big|_0^1 \\ &- \int_0^1 [\varphi(u)'-\varphi(v)']^2 p'(\varphi(u)-\varphi(v))\,dx \\ &\leqslant |g_1(s)-g_1(t)|\,|p(\varphi(u(1))-\varphi(v(1)))| \\ &+|g_0(s)-g_0(t)||p(\varphi(u(0))-\varphi(v(0)))| \\ &\leqslant |g_1(s)-g_1(t)|+|g_0(s)-g_0(t)|\,.\end{aligned}$$

Учитывая эту оценку и то, что $|p|\leqslant 1$, получаем

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u-v-\lambda(A(s)u-A(t)v)|\ dx &= \int_0^1 |(1+\lambda\omega)(u-v)-\lambda(\varphi(u)''-\varphi(v)'')|\ dx \\ &\geqslant \int_0^1 (1+\lambda\omega)(u-v)p(\varphi(u)-\varphi(v))\,dx \\ &\quad -\lambda\int_0^1 (\varphi(u)''-\varphi(v)'')\,p(\varphi(u)-\varphi(v))\ dx \\ &\geqslant (1+\lambda\omega)\int_0^1 (u-v)p(\varphi(u)-\varphi(v))\ dx-\lambda\theta(s,t).\end{aligned}$$

Вместо p подставим $(p_n)=ns$ (если $|s|\leqslant 1/n$), $p_n(s)=\operatorname{sign} s$ (если $|s|>1/n$) и устремим $n\to\infty$. Так как $(u-v)p_n(\varphi(u)-\varphi(v))\to|u-v|$, то

$$\|u-v-\lambda(A(s)u-A(t)v)\|_1 \geqslant \|u-v\|_1+\lambda(\omega\|u-v\|_1-\theta(s,t))$$

или

$$\lambda^{-1}(\|u-v-\lambda(A(s)u-A(t)v)\|_1-\|u-v\|_1)\geqslant\omega\|u-v\|_1-\theta(s,t).$$

Таким образом получаем, что

$$-[v-u,-A(s)\,v+A(t)\,u] \quad \leqslant\theta(t,s)-\omega\|v(x)-u(x)\|_1. \tag{14}$$

• **2. условие $m-$диссипативности.** Доказательство проводиться аналогично тому, как это сделано в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Couchouron, J.-F. Almost periodic solutions of evolution equations / J.-F. Couchouron, M. I. Kamenskii, S. Ponomarev // Topological Methods in Nonlinear Analysis. — 2017. — V. 50. — P. 65–87.

2. Crandall, M. G. Nonlinear semigroups and evolution governed by accretive operators / M. G. Crandall // Proc. Sympos. in Pure Math. — 1986. — V. 45, part I. — P. 305–337.

3. Левитан, Б. М. Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения / Б. М. Левитан, В. В. Жиков. — М. : Издательство Московского университета, 1978.

4. Couchouron, J.-F. Compactness theorems for abstract evolution problems / J.-F. Couchouron // Journal of Evolution Equations. — 2002. — V. 2. — P. 151–175.

5. Evans, L. C. Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space / L. C. Evans // Israël J. Math. — 1977. — V. 26 (1). — P. 1–42.

6. Couchouron, J.-F. Evolution equations governed by families of weighted operators / J.-F. Couchouron, P. Ligarius // Annales de l'Institut Henri Poincaré. — 1999. — № 9. — P. 299–334.

7. Bénilan, P. Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications / P. Bénilan. — Thèse, Paris-XI, Orsay, 1972.

8. Couchouron, J.-F. Problème de Cauchy non autonome pour des équations d'évolution / J.-F. Couchouron // Potential Analysis. — 2000. — V. 13. — P. 213–248.

9. Fink, A. M. Almost Periodic Differential Equations / A. M. Fink. — Berlin-Heidelberg-New-York, Springer Verlag, 1974. — 377 p.

10. Haraux, A. Systèmes dynamiques dissipatifs et applications / A. Haraux. — RMA, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Bonn, 1991.

11. Haraux, A. Almost-periodic forcing for a wave equation with a nonlinear, local damping term / A. Haraux // Proceedings of the Royal Society of Edinurgh. — 1983. — V. 94 A. — P. 195–212.

12. Miyadera, I. Nonlinear semigroups, Translations of Mathematical Monographs / I. Miyadera // American Mathematical Society, Providence RI. — 1992. — V. 109.

REFERENCES

1. Couchouron J.-F., Kamenskii M.I., Ponomarev S. Almost periodic solutions of evolution equations. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 2017, vol. 50, pp. 65–87.

2. Crandall M.G. Nonlinear semigroups and evolution governed by accretive operators. Proc. Sympos. in Pure Math., 1986, vol. 45, part I, pp. 305–337.

3. Levitan B. M., Zhikov V.V. Almost-periodic functions and differential equations. [Levitan B.M., ZHikov V.V. Pochti-periodicheskie funkcii i differencial'nye uravneniya]. Moscow, 1978.

4. Couchouron J.-F. Compactness theorems for abstract evolution problem. Journal of Evolution Equations, 2002, vol. 2, pp. 151–175.

5. Evans L.C. Nonlinear evolution equations in an arbitrary Banach space. Israël J. Math., 1977, vol. 26, (1), pp. 1–42.

6. Couchouron J.-F., Ligarius P. Evolution equations governed by families of weighted operators. Annales de l'Institut Henri Poincaré, 1999, no. 9, pp. 299–334.

7. Bénilan P. Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications. Thèse, Paris-XI, Orsay, 1972.

8. Couchouron J.-F. Problème de Cauchy non autonome pour des équations d'évolution. Potential Analysis, 2000, vol. 13, pp. 213–248.

9. Fink A.M. Almost Periodic Differential Equations. Berlin-Heidelberg-New-York, Springer Verlag, 1974, 377 p.

10. Haraux A. Systèmes dynamiques dissipatifs et applications. RMA, Masson, Paris, Milan, Barcelone, Bonn, 1991.

11. Haraux A. Almost-periodic forcing for a wave equation with a nonlinear local damping term. Proceedings of the Royal Society of Edinurgh, 1983, vol. 94 A, pp. 195–212.

12. Miyadera I. Nonlinear semigroups. Translations of Mathematical Monographsm American Mathematical Society, Providence RI, 1992, vol. 109.

Пономарев Сергей Сергеевич, преподаватель, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Ponomarev Sergei Sergeevich, Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russia