УДК 517.9

ОПЕРАТОРНЫЕ КОСИНУС-ФУНКЦИИ И КОРРЕКТНОСТЬ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

В. А. Костин, М. В. Муковнин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 20.01.2017 г.

Аннотация. Начиная с работ М. Совы и С. Курепы операторные косинус-функции (КОФ) стали важным инструментом при исследовании корректной разрешимости задачи Коши для уравнений второго порядка в банаховых пространствах и находятся в таком же отношении к этой задаче как сильно непрерывные полугруппы к задаче Коши для уравнений первого порядка.

В настоящей заметке впервые применяются КОФ к исследованию корректной разрешимости граничных задач, в частности, задачи Дирихле для уравнений второго порядка. С помощью аппарата операторных косинус-функций получены условия корректности граничной задачи. Также получено представление решения корректной задачи с помощью операторных косинус-функции и синус-функций.

Полученный результат применяется к задачам о стационарном распределении температуры внутри двугранного угла.

Ключевые слова: операторная косинус функция, сильно непрерывные полугруппы, корректная разрешимость граничной задачи Дирихле.

OPERATOR COSINE FUNCTIONS AND CORRECTNESS OF BOUNDARY PROBLEMS

V. A. Kostin, M. V. Mukovnin

Abstract. Starting with the works M. Sova and S. Kurepa, the operator cosine functions became an important tool in the study of the correct solvability of the Cauchy problem for a second-order equation in Banach spaces. These problems are in the same attitude to this problem as strongly continuous semigroups to the Cauchy problem for a first-order equation.

In this article, for the first time, the operator cosines of a function are applied to the study of the correct solvability of boundary problems, in particular the Dirichlet problem for second-order equations. Using the apparatus of operator cosine functions, the conditions for the correctness of the boundary value problem are obtained. A representation of the solution of the correct problem is also obtained with the help of operator cosine functions and sine functions.

The obtained result is applied to problems on the stationary temperature distribution inside a dihedral angle.

Keywords: Cosine operator function, strongly continuous semigroups, correct solvability of boundary Dirichlet problem.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим задачу о стационарном распределении температуры внутри двугранного угла с математической постановкой для $x > 0$, $0 < t < l \in (-\infty,\infty)$. Необходимо найти решение задачи

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + x\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x}) = 0 \tag{1}$$

удовлетворяющее условиям

$$u(0,x) = 0;\ u(l,x) = T(x) \tag{2}$$

где

$$\begin{cases} T_0, \ 0 < x < R. \\ \quad\quad 0, \ x > R. \end{cases} \tag{3}$$

Так же в банаховом пространстве E рассматриваем уравнение

$$\frac{d^2u(t)}{dt^2} + Au(t) = 0,\ t \in [0,l]\ \subset \mathbb{R}^1 = (0,\infty). \tag{1.1}$$

где оператор A является производящим оператором (генератором) сильно непрерывной операторной косинус-функции $C(t,A)$ в E.

Это означает, что $C(t,A)$, есть семейство ограниченных операторов в E при каждом $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

1. $C(t+s,A) + C(t-s,A) = 2C(t,A)C(s,A)$ для всех $t,s \in \mathbb{R}$.
2. $C(0,E) = I$ — тождественный оператор в E.
3. Для каждого $\varphi \in E$ выполняется условие

$$\lim_{t\to 0} ||C(t,A)\varphi - \varphi||_E = 0 \tag{1.2}$$

Для φ из области определения $D(A)$ оператора A справедливо соотношение

$$Au = \frac{d^2}{dt^2}C(t,A)\varphi\big|_{t=0} \tag{1.3}$$

область определения $D(A)$ плотно в E, причем

$$D(A) = \{\varphi \in E,\ \frac{d^2C(t,A)}{dt^2},\ \varphi \in E\}.$$

Существуют константы M и $\omega \geqslant 0$ при которых имеет место оценка

$$||C(t,A)|| \leqslant M\exp(\omega|t|). \tag{1.4}$$

Для всех $\lambda > \omega \geqslant 0$, $f \in E$ выполняется соотношение связывающее резольвенту $R(\lambda,A)$ оператора A и $C(t,A)$ [4] с. 177

$$\lambda(\lambda^2 I - A^{-1})f = \lambda R(\lambda^2,A)f = \int\limits_0^\infty \exp(-\lambda t)C(t,A)f dt. \tag{1.5}$$

Ставится задача отыскания функции $u(t)$ со значениями в $D(A)$, дважды дифференцируемой, удовлетворяющей уравнению (1.1) на отрезке [0,l] и условиям

$$u(0) = \varphi,\ u(l) = \psi,\ \varphi,\psi \in D(A). \tag{1.6}$$

Определение 1. Задача (1.1)-(1.6) называется корректно разрешимой, если она однозначно разрешима для любых $\varphi,\psi \in D(A)$ и существует $M > 0$ такая, что для всех решений уравнения (1.1) справедливо неравенство.

$$\sup_{t\in[0,l]} ||u(t)||_E \leqslant M(||\varphi||_E + ||\psi||_E). \tag{1.7}$$

Исследованием корректной разрешимости задачи (1.1)-(1.6) занимались многие авторы ([5], [6]). В частности, когда оператор - A является позитивным, то есть если его резольвентное множество $\rho(A) \subset [0,\infty)$ и для резольвенты $R(\lambda,A)$ выполняется оценка

$$||R(\lambda,A)|| \leqslant \frac{M}{1+\lambda}$$

$\lambda > 0$, то задача (1.1)-(1.6) корректна.

Для более широкого класса операторов A в [6] указывается, что задача (1.1)-(1.6) корректно разрешима тогда и только тогда, когда для всякого натурального $n = 1,2\ldots$ выполняется условие

$$\sup_n n^2||R(\frac{\pi^2 n^2}{l^2}, -A)|| < \infty \tag{1.8}$$

Основным результатом настоящего сообщения является.

Теорема 1. Если оператор A является генератором сильно непрерывной косинус-функции $C(t,A)$ *с порядком роста* $\omega \in [0,1)$*, то задача (1.1)-(1.6) равномерно корректна и ее решение имеет вид*

$$u(t) = \frac{1}{l}\sin\frac{\pi t}{l}[\int_0^\infty \frac{C(y,A)\varphi dy}{\operatorname{ch}(\frac{\pi y}{l}) + \cos(\frac{\pi t}{l})} + \int_0^\infty \frac{C(y,A)\psi dy}{\operatorname{ch}(\frac{\pi y}{l}) + \cos(\frac{\pi t}{l})}] \tag{1.9}$$

Заметим, что по теореме С. Г. Крейна ([5], с. 306) решение рассматриваемой задачи выражается через сильно непрерывные полугруппы с генератором $-(-A)^{\frac{1}{2}}$.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Так как A является генератором КОФ, то из (1.4), (1.5) при $n \in \mathbb{N}$, следует оценка

$$n||(n^2I + A)^{-1}f|| \leqslant \frac{M||f||}{n-\omega}.$$

Таким образом оператор A удовлетворяет условиям (1.8). И, следовательно, по теореме Горбачука-Князюка [6] задача (1.1)-(1.6) корректно разрешима, и её решение имеет вид

$$u(t) = F(t,l,A)\varphi + F(l-t,l,A)\psi,$$

где

$$F(t,\pi,A)\varphi = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} n\sin ntR(n^2, -A)\varphi$$

$$F(t,l,A) = F(\frac{\pi}{l}t, \pi, \frac{l^2}{\pi^2}, A) \tag{2.1}$$

Заметим, что по теореме С. Г. Крейна решение представляется через квадратные корни $(-A)^{\frac{1}{2}}$ существование которых обеспечивает оценка (1.5).

Далее, пользуясь в (2.1) соотношением (1.5) получаем

$$F(t,l,A)\varphi = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi t}{l}\frac{n\pi}{l}(\frac{n^2\pi^2}{l^2} + A)^{-1} =$$

$$= \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi t}{l}\int_0^\infty \exp(-\frac{n\pi}{l}y)C(y,A)\varphi dy =$$

$$\frac{2}{l}\int\limits_0^\infty (\sum_{n=1}^\infty \exp(-\frac{n\pi}{l}y)\sin\frac{n\pi t}{l})C(y,A)\varphi dy$$

Отсюда, после суммирования под знаком интеграла получим равенство

$$F(t,l,A)\varphi = \frac{1}{l}\sin\frac{\pi t}{l}\int\limits_0^\infty \frac{C(y,A)\varphi dy}{\mathrm{ch}(\frac{\pi y}{l})+\cos(\frac{\pi t}{l})} \tag{2.2}$$

из которой следует (1.9).

Из представления (2.2) следует

Теорема 2. Если в задаче (1.1)-(1.6) $C(t,A)$ *имеет тип* $\omega < \frac{2\pi}{l}$, *то она корректно разрешима и выполняется оценка*

$$||F(t,l,A)||_E \leqslant M(\alpha,\omega) \tag{2.3}$$

Для доказательства при $\omega < 2\alpha$ оценим

$$\int\limits_0^\infty \frac{\exp(\omega)dy}{\mathrm{ch}\,\alpha y+\cos\alpha t} = \frac{1}{2\alpha}\int\limits_1^\infty \frac{\tau^{\frac{\omega}{\alpha}-1}}{\tau^2+2\tau\cos\alpha t+1} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\alpha}[\int\limits_1^2 \frac{d\tau}{\tau^2+2\tau\cos\alpha+1} + \int\limits_2^\infty \frac{\tau^{(\frac{\omega}{\alpha}-1)}d\tau}{\tau^2-1+2(1+\cos\alpha t)}] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\alpha}[\int\limits_0^\infty \frac{d\tau}{\tau^2+2\tau\cos 2t+1} + \int\limits_2^\infty \frac{\tau^{(\frac{\omega}{\alpha}-1)}d\tau}{\tau^2-1}] =$$

$$= \frac{t}{2\alpha|\sin\alpha t|} + M(\alpha,\omega), \tag{2.4}$$

где $0 < \alpha t < \pi$.

Далее, применяя неравенство (2.4), при оценке интеграла (2.2) при $\alpha = \frac{\pi}{l}$, получаем оценку (2.3)

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (1)-(3)

Для применения теорем (1) и (2) к задаче (1)-(3) сведем её к задаче (1.1)-(1.6) с оператором A заданным выражением $Lu = x\frac{d}{dx}(x\frac{du}{dx})$, $x > 0$ и областью определения

$$D(A) = \{f : f \in L_p(0,\infty), Lf \in L_p(0,\infty)\},$$

где

$$||f||_p = [\int_0^\infty |f(x)|^p dx]^{\frac{1}{p}},\ p \geqslant 1.$$

Тогда, в соответствии с [7], оператор A является генератором косинус-функции $C(t,A)$ вида

$$C(t,A)f(x) = \frac{1}{2}[f(xe^t)+f(xe^{-t})] \tag{3.1}$$

в пространствах $L_p(\mathbb{R}^+)$ с оценкой

$$||C(t,A)|| \leqslant \mathrm{ch}(\frac{t}{x}).$$

Далее, подставляя $C(t,A)$ из (3.1) в (2.2) получим

$$F(t,l,A)f(x) = \frac{\sin\frac{\pi}{l}t}{2l}\int\limits_0^\infty \frac{[f(xe^y)+f(xe^{-y})]dy}{\operatorname{ch}\frac{\pi}{l}y-\cos\frac{\pi}{l}t} \tag{3.2}$$

Применяя (3.2) к задаче (1)-(3), получаем решение задачи

$$u(t,x) = F(l-t,l,A)T(x) = T_0\frac{\sin\alpha t}{2}\int\limits_0^{\frac{R}{x}}\frac{\xi^{\alpha-1}d\xi}{\xi^{2\alpha}-2\xi^2\cos\alpha t+1} =$$

$$= \frac{T_0}{\pi}\operatorname{arcctg}\big(\frac{1+(\frac{R}{x})^{\frac{\pi}{l}}\cos\frac{\pi}{l}t}{(\frac{R}{x})^{\frac{\pi}{l}}\sin\frac{\pi t}{l}}\big),\ \ (\alpha=\frac{\pi}{l})$$

$$\begin{cases} 0\leqslant t\leqslant l \\ 0\leqslant x\leqslant\infty \end{cases}$$

Полученное решение совпадает с решением рассматриваемой задачи в [8], с. 135.

4. О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В ДВУГРАННОМ УГЛЕ

В соответствии с математической постановкой задачи о стационарном распределении температуры внутри двугранного угла (или бесконечного в котором одна грань (сторона) имеет нулевую температуру, а на другой поддерживаемый заданный режим) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} + x\frac{\partial}{\partial x}(x\frac{\partial u}{\partial x}) = 0,\ x>0,\ 0<t<l, \tag{4.1}$$

$$u(0,x) = 0,$$

$$u(l,x) = T(x), \tag{4.2}$$

где

$$\begin{cases} T_0,\ 0<x<R. \\ \quad 0,\ x>R. \end{cases} \tag{4.3}$$

и указывается решение [8], с. 135.

$$u(t,x) = \frac{T_0}{\pi}arccth\big(\frac{x^{\frac{\pi}{l}}+R^{\frac{\pi}{l}}\cos\frac{\pi t}{l}}{R^{\frac{\pi}{l}}\sin(\frac{\pi t}{l})}\big). \tag{4.4}$$

Однако корректная разрешимость (с точки зрения однозначности решения и его устойчивости по исходным данным) в указанных работах не обсуждается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kurepa, S. A cosine function equation in hilbert space / S. Kurepa // Can. J. Ath. — 1960. — V. 12. — P. 45–49.

2. Sova, M. Cosine operator functions / M. Sova // Rozpr. math. — 1966. — V. 49. — P. 1–47.

3. Vasil'ev, V. V. Differential Equations in Banach Spaces. Theory of Cosine Operator Functions / V. V. Vasil'ev, S. I. Piskarev // Journal of Mathematical Sciences. — 2004. — V. 122, iss. 2. — P. 3055–3174.

4. Голдстейн, Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения / Дж. Голдстейн. — Киев : Высща школа, 1989. — 347 с.

5. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

6. Горбачук, В. И. Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений / В. И. Горбачук, А. И. Князюк / Успехи мат. наук. — 1989. — Т. 44, № 3 (267). — С. 55–91.

7. Костин, В. А. Операторный метод Маслова-Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля / В. А. Костин, А. В. Костин, Д. В. Костин // ДАН. — 2013. — Т. 452, № 4. — С. 367–370.

8. Волков, И. К. Интегральные преобразования и операционное исчисление. / И. К. Волков, А. Н. Канатников. — М. : издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 228 с.

9. Васильев, В. В. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения / В. В. Васильев, С. Г. Крейн, С. И. Пискарев // Итоги науки и техники серия "Математический анализ". — 1990. — Т. 28.

REFERENCES

1. Kurepa S. A cosine function equation in hilbert space. Can. J. Ath., 1960, vol. 12, pp. 45–49.

2. Sova M. Cosine operator functions. Rozpr. math., 1966, vol. 49, pp. 1–47.

3. Vasil'ev V.V., Piskarev S.I. Differential Equations in Banach Spaces. Theory of Cosine Operator Functions. Journal of Mathematical Sciences, 2004, vol. 122, iss. 2, pp. 3055–3174.

4. Goldstejn Dzh. Semigroups of linear operators and their applications. [Goldsteyjn Dzh. Polugruppy linejnyh operatorov i ih prilozheniya]. Kiev: Vyscha shkola, 1989, 347 p.

5. Krejn S.G. Linear differential equations in a Banach space. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banahovom prostranstve]. Moskow: Nauka, 1967, 464 p.

6. Gorbachuk V.I., Knyazyuk A.I. Boundary values of solutions of differential-operator equations. [Gorbachuk V.I., Knyazyuk A.I. Granichnye znacheniya reshenij differencial'no-operatornyh uravnenij]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1989, vol. 44, no. 3 (267), pp. 55–91.

7. Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Maslov-Heaviside operator method and Duhamel C_0-operator integral. [Kostin V.A., Kostin A.V., Kostin D.V. Operatornyi metod Maslova-Hevisaida i C_0-operatornyi integral Dyuamelja]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2013, vol. 452, no. 4, pp. 367–370.

8. Volkov I.K., Kanatnikov A.N. Integral transformation and operational calculus. [Volkov I.K., Kanatnikov A.N. Integral'noe preobrazovanie i operacionnoe ischislenie]. Moskov, 2002, 228 p. 9. Vasil'ev V.V., Krejn S.G., Piskarev S.I. Semigroups of operators, cosine of operator-functions and linear differential equations. [Vasil'ev V.V., Krejn S.G., Piskarev S.I. Polugruppy operatorov, kosinus operator-funkcii i linejnye differencial'nye uravneniya]. *Itogi nauki i texniki seriya «Matematicheskiyj analiz» — The results of science and technology «Mathematical analysis»*, 1990, vol. 28.

Костин Владимир Алексеевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: vlkostin@mail.ru

Kostin Vladimir Alekseevich, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Head of the Department of Mathematical Modeling, Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vlkostin@mail.ru

Муковнин М. В., аспирант, кафедры математического моделирования, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: mikhailmukovnin@gmail.com

Mukovnin M. V., graduate student. Department of Mathematical Modeling, Department of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: mikhailmukovnin@gmail.com