УДК 517.958

О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧ КОШИ, СВЯЗАННЫХ С ОДНИМ МНОГО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ КЛАССОМ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ: ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И ФОКУСИРОВКА РЕШЕНИЙ

Ю. В. Засорин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 28.01.2017 г.

Аннотация. В статье рассматривается многопараметрический класс нестационарных пространственных уравнений высокого порядка (содержащий, как частный случай, нестационарное пространственное вязкое трансзвуковое уравнение, пространственные уравнения Кадомцева-Петвиашвили, Кельвина-Фойгхта, регуляризованное длинноволновое уравнение и ряд других неклассических нестационарных уравнений математической физики). Исследуются вопросы единственности решений задач Коши, строятся в явном виде фундаментальные решения Коши, исследуются свойства последних (в частности, распространение волновых фронтов), а с их помощью строятся и решения исследуемых задач Коши. Устанавливается наличие полу-групповых (а в некоторых случаях – групповых) свойств этих решений, а также устанавливаются условия, при которых решения задач Коши обладают эффектом фокусировки.

Ключевые слова: задача Коши, фундаментальное решение Коши, теорема единственности, неразрешимое относительно производной по времени, явный вид решения, многопараметрическое семейство, нестационарное, пространственное, высокий порядок, уравнение Кадомцева-Петвиашвили, Кельвина-Фойгта, вязкое трансзвуковое уравнение, ионно-акустические, ударные волны, распространение сингулярностей, эволюция волновых фронтов, поверхности разрывов, фокусировка решений, групповое свойство решений, обратимость по времени, корректная разрешимость, дисперсионно-диссипативные процессы, обратимость времени.

ABOUT OF CORRECTLY SOLVABILITY INITIAL VALUE PROBLEMS, RELATED WITH ONE MULTI-VARIABLE CLASS HIGHT ORDER'S NON-STATIONARY TREE-DIMENSIONAL EQUATIONS; GROUP PROPERTIES AND FOCUSING OF SOLUTIONS

Yu. V. Zasorin

Abstract. In this article an multi-variable class of non-stationary three-dimensional equation of hight order, (containing as particular case the non-stationary 3-dimensional viscous transsonic equation, 3-dimensional Kadomtsev-Petviashvili and Kelvin-Voigt equations, regularized long-wave equation and series of other nonclassical equations of mathematical physics) is considered. The uniqueness of solutions of initial problems is being study, Cauchy fundamental solutions and solutions of Cauchy problems are being constructed in exact form, these properties is being stand (in particular – the propagation of wave's fronts). Semi-group and group properties is being proved. Also conditions under which the solutions of of Cauchy problems having a effect of focusing are being found.

Keywords: multi-variable class, three-dimensional, equation of hight order, unresolved in relation to time derivative, non-stationary, viscous transsonic equation, Kadomtsev-Petviashvili, Kelvin-Voigt, regularized long-wave, ion acoustic, shock waves, Cauchy problems, Cauchy fundamental solutions, exact form, propagation of singularities, evolution of wave's front, discontinuity surfaces, group property, time reversibility, focusing of solutions, uniqueness's of solution, correctly solvability, dispersion, dissipation.

ВВЕДЕНИЕ

Ряд многочисленных математических моделей релаксационных процессов в горячем тепло- электропроводящем газе при попытке учета квантовых, ионизационных, газодинамических, диссипативных, дисперсионных и иных факторов (см., напр., [1]–[14]) зачастую приводит к уравнениям (с, вообще говоря, *невыделенной* производной по времени) вида:

$$L(D)u(\vec{r},t) = f(\vec{r},t), \tag{1}$$

где $\vec{r} = (x,y,z) \in R^3$, $t \in r$, $D = (D_t,D_{\vec{r}}), D_{\vec{r}} = (D_x,D_y,D_z), D_{(\cdot)} = \partial/\partial(\cdot)$,

$$\begin{cases} L(D) = P(D_x)[D_t + Q(D_x) + c_yD_y + c_zD_z] - \Delta_{(y,z)}, \\ P(D_x) = a_3D_x^3 - a_2D_x^2 + a_1D_x + a_0, \\ Q(D_x) = b_3D_x^3 - b_2D_x^2 + b_1D_x + b_0, \\ \Delta_{(y,z)} = D_y^2 + D_z^2, \end{cases} \tag{2}$$

где $a_j,b_j,(j = \overline{0;3})$, c_y,c_z – вещественные числовые параметры, причем

$$a_0,a_2,b_0,b_2 \geqslant 0, \quad \sum_{j=0}^{3} |a_j| > 0. \tag{3}$$

Здесь и далее $\vec{r} = (x,y,z), t \in R, D = (D_t,D_{\vec{r}}), D_{\vec{r}} = (D_x,D_y,D_z), \quad D_{(\cdot)} = \partial/\partial(\cdot)$.

Некоторые частные случаи уравнения (1)–(3) были ранее изучены в работах [7])–[14]).

Целью настоящей работы является:

1) изучение вопросов единственности решений некоторых задач Коши, связанных с уравнениями (1)–(3);

2) построение в явном виде фундаментальных решение Коши для уравнений (1)–(3) и исследование их свойств (в частности, будет изучена эволюция их *волновых фронтов*;

3) построение в явном виде решений самих задач Коши;

4) установление полу-групповых (а в ряде случаев – и групповых) свойств решений задач Коши для однородных уравнений (1);

5) установление наличия *эффекта фокусировки* решений задач Коши для ряда однородных уравнений (1).

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ, ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ КОШИ И ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

Пусть $R^4 = \{(\vec{r},t) : \vec{r} \in R^3, t \in R\}, R^4_{\pm} = \{(\vec{r},t) \in R^4, \pm t > 0\}$. Как обычно, через $S'(R^n), n = 3,4$, будем обозначать пространства Шварца распределений умеренного роста с линейными формами

$$\langle T;\varphi\rangle_3 = \int\limits_{R^3} T(\vec{r})\varphi(\vec{r})d\vec{r}, \quad \langle T;\varphi\rangle_4 = \int\limits_{R^4} T(\vec{r},t)\varphi(\vec{r},t)\,d\vec{r}dt,$$

где $T \in S'(R^n), \varphi \in S(R^n)$.

Далее, через $\overset{\circ}{S}(\bar{R}^4_+)$, – обозначим подпространства пробных функций $\varphi \in S(R^4)$, таких что $\mathrm{supp}\,(\varphi) \subset R^4_+$. Через $S'(\bar{R}^4_+)$ – обозначим (см., напр., [15])) подпространство $\mathrm{D}'(R^4_+)$, двойственное к подпространству $\overset{\circ}{S}(\bar{R}^4_+)$. Через $\overset{\circ}{S}{}'(\bar{R}^4_+)$ (см. также [15])) будем обозначать подпространство всех распределений $T \in S'(R^4)$ таких что $\mathrm{supp}\,(T) \subset \bar{R}^4_+$, и, кроме того, положим

$$S_0{}'(\bar{R}^4_+) = S'(\bar{R}^4_+) \cap \overset{\circ}{S}{}'(\bar{R}^4_+)$$

(т. е. фактически введем подпространство распределений умеренного роста, *однозначно определяемых своими сужениями на* R^4_+).

Введем класс V^+ всех распределений $T \in S_0{}'(\bar{R}^4_+)$, имеющих S'-пределы $\lim\limits_{t\to+0} T(\vec{r},t) = T_0(\vec{r}) \in S'(R^3)$.

Наконец, через $\widehat{T}(\vec{\rho})$, $\check{T}(\vec{\rho})$, $\vec{\rho} = (\xi,\eta,\zeta)$ будем обозначать соответственно прямое и обратное преобразование Фурье распределений $T(\vec{r})$ из $S'(R^3)$, формально положив

$$\widehat{T}(\vec{\rho}) = \langle T(\vec{r});\, \exp(-i(\vec{r}\cdot\vec{\rho})\rangle_3, \quad \check{T}(\vec{\rho}) = (2\pi)^{-3}\widehat{T}(-\vec{\rho}). \tag{4}$$

Обозначения $\widehat{T}(\vec{\rho},t), \check{T}(\vec{\rho},t)$ сохраним и для частичного преобразования Фурье по пространственным переменным $\vec{r} \in R^3$ распределений $T(\vec{r},t) \in S'(R^4)$.

Отметим, что все все введенные выше классы – $S'(\bar{R}^4_+)$, $\overset{\circ}{S}{}'(\bar{R}^4_+)$, $S_0{}'(R^4_+)$ и V^+ изоморфно отображаются на себя при введенном выше частичном преобразовании Фурье (прямом и обратном).

Перейдем к изучению вопросов единственности решений некоторых задач Коши, связанных с уравнением (1). Для этого сформулируем и докажем ряд простых, но важных утверждений.

Замечание 1. Отметим, что если в случае $P(D_x) = const$ (так называемые *уравнения, разрешенные относительно производной* D_t, или, что то же самое, *уравнения с выделенной производной* D_t), вопросы единственности решения задачи Коши достаточно тривиальны, то случай *невыделенной производной* D_t: $P(D_x) \neq const$ (а уравнение (1)–(3), вообще говоря, к такому случаю и относится) эти вопросы несколько сложнее (см., напр., [5]), [9]), [11]) и [14])). В последнем легко убедиться даже на примере уравнения с простейшем оператором $L = D_x D_t$. ■

Рассмотрим нестационарный оператор $M(D)$ общего вида с невыделенной производной D_t:

$$M(D) = A(D_{\vec{r}})D_t + B(D_{\vec{r}}), \tag{5}$$

где $A(D_{\vec{r}}), B(D_{\vec{r}})$ – ненулевые дифференциальные полиномы с постоянными (вещественными) коэффициентами, не имеющие нетривиальных общих множителей, причем

$$Re\,\{A(i\vec{\rho})B(-i\vec{\rho})\} \geqslant 0, \quad \forall\, \vec{\rho} \in R^3. \tag{6}$$

и однородное уравнение

$$M(D)u(\vec{r},t) = 0, \quad (\vec{r},t) \in R^4_+\,, \tag{7}$$

в классе V^+.

Стандартными рассуждениями (см., напр., [9]) можно установить справедливость следующего утверждения:

Лемма 1. *В классе* $S'(R^4)$ *решение* $u \in V^+$ *уравнения (7) удовлетворяет уравнению*

$$M(D)u(\vec{r},t) = h(\vec{r}) \otimes \delta(t), \quad (\vec{r},t) \in R^4\,, \tag{8}$$

где $\delta(t) \in S'(R)$ *– "одномерная" дельта-функция Дирака, а распределение* $h(\vec{r}) \in S'(R^3)$ *определяется равенством:*

$$h(\vec{r}) = (S')\lim_{t\to+0} u(\vec{r},t). \tag{9}$$

Рассмотрим теперь в классе V^+ несколько задач Коши, связанных с уравнением (7), а именно: уравнение

$$M(D)v(\vec{r},t) = 0, \quad (\vec{r},t) \in R^4_+, \tag{10}$$

с *одним* из следующих начальных условий:

$$v|_{t=+0} = 0, \qquad \vec{r} \in R^3, \tag{11}$$

либо

$$(A(D_{\vec{r}})v)|_{t=+0} = 0, \quad \vec{r} \in R^3, \tag{12}$$

либо

$$(A_1(D_{\vec{r}})v)|_{t=+0} = 0, \quad \vec{r} \in R^3, \tag{13}$$

если оператор $A(D_{\vec{r}})$ допускает разложение

$$A(D_{\vec{r}}) = A_1(D_{\vec{r}})A_2(D_{\vec{r}}), \tag{14}$$

где $A_1(D_{\vec{r}}), A_2(D_{\vec{r}})$ отличные от констант дифференциальные полиномы с вещественными коэффициентами; а распределение $v(\vec{r},t) \in V^+$.

Справедливо следующее утверждение:

Лемма 2. *Решение $v(\vec{r},t) \in V^+$ каждой из задач Коши: – (10), (11), – или (10), (12), – или (10), (13), (14), – удовлетворяет в классе $S'(R^4)$ следующим равенствам:*

$$A(D_{\vec{r}})v(\vec{r},t) = 0, \quad B(D_{\vec{r}})v(\vec{r},t) = 0, \qquad (\vec{r},t) \in R^4. \tag{15}$$

Доказательство: Начнем со случая задачи (10), (12). Обозначим через $\widehat{v}(\vec{\rho},t), \widehat{w}(\vec{\rho},t) = A(i\vec{\rho})\widehat{v}(\rho,t)$ Фурье-образы (см. формулу (4)) распределений $v(\vec{r},t), w(\vec{r},t) = A(D_{\vec{r}})v(\vec{r},t)$. Положим

$$R(\vec{\rho}) = B(i\vec{\rho})/A(i\vec{\rho}). \tag{16}$$

В силу (6) имеем:

$$Re(R(\vec{\rho})) \geqslant 0, \quad \vec{\rho} \in R^3. \tag{17}$$

Из уравнения (10) и условия (12) получаем, что

$$\begin{aligned}&(A(i\vec{\rho})D_t + B(i\vec{\rho}))\widehat{v}(\vec{\rho},t) = A(i\vec{\rho})[D_t + R(\vec{\rho})]\widehat{v}(\vec{\rho},t) = \\ &= [D_t + R(\vec{\rho})]\widehat{w}(\vec{\rho},t) = 0, \quad t > 0, \vec{\rho} \in R^3;\end{aligned} \tag{18}$$

С учетом (17) получаем, что обыкновенное дифференциальное уравнение (18) имеет единственное решение

$$\widehat{w}(\vec{\rho},t) = \widehat{h}(\vec{\rho})\exp(-tR(\vec{\rho})), \quad t > 0, \vec{\rho} \in R^3, \quad \widehat{h} \in S'(R^3). \tag{19}$$

которое на самом деле является тривиальным, поскольку, в силу (18) и (12),

$$\widehat{h}(\vec{\rho}) = (A(i\vec{\rho})\widehat{v})_{|t=+0} = \widehat{w}_{|t=+0} = 0, \quad \vec{\rho} \in R^3.$$

Таким образом, получаем что:

$$A(D_{\vec{r}})v(\vec{r},t) = 0, \quad (\vec{r},t) \in R^4_+. \tag{20}$$

Но тогда, в силу уравнения (10), получаем что и

$$B(D_{\vec{r}})v(\vec{r},t) = 0, \quad (\vec{r},t) \in R^4_+. \tag{21}$$

По определению класса V^+, равенства (20), (21) справедливы и вплоть до гиперплоскости $\{t = 0\}$; а поскольку $\mathrm{supp}\,(v) \subset \bar{R}^4_+$, эти равенства справедливы и при $t < 0$. Что и доказывает справедливость (15) для задачи Коши (10), (12).

Перейдем к случаям уравнения (10) с начальными условиями (11) или (13). Поскольку выполнение условий (11) или (13) автоматически влечет и выполнение условия (12), то мы возвращается к предыдущему случаю – задаче (10), (12).

Лемма доказана.

Объединяя теперь Леммы 1 и 2 (в частности, равенства (8) – (11), (15)), получаем что:

Следствие 1. *Всякое решение $u \in V^+$ однородного уравнения (7) может быть представлено в следующем виде:*

$$u(\vec{r},t) = u_h(\vec{r},t) + v(\vec{r},t), \tag{22}$$

где

$$u_h(\vec{r},t) = (\widehat{h}(\vec{\rho}) \cdot \exp(-tR(\vec{\rho}))\check{)}(\vec{r}), \quad t > 0, \vec{r} \in R^3, \tag{23}$$

распределение $h \in S'(R^3)$ и функция $R(\vec{\rho})$ определены равенствами (9) и (16) соответственно, а распределение $v(\vec{r},t) \in V^+$ удовлетворяет уравнениям (15) и условию (11).

Замечание 2. Из несложного анализа формул (9), (22) и (23) следует, что распределение $u_h(\vec{r},t) \in V^+$, определенное равенством (23), содержит и "стационарную" компоненту

$$u_0(\vec{r},t) = h_0(\vec{r}) \otimes \Theta(t)\,, \tag{24}$$

где $\Theta(\cdot)$ – функция Хевисайда, а распределение $h_0(\vec{r}) \in S'(R^3)$ удовлетворяет в $S'(R^3)$ уравнению

$$B(D_{\vec{r}})h_0(\vec{r},t) = 0\,, \quad \vec{r} \in R^3\,. \tag{25}$$

(Впрочем, вопрос о разделении $u_h(\vec{r},t)$ на стационарную и нестационарную части остается пока открытым.) ■

Вернемся к уравнению (1) с оператором $L(D)$, определенным равенствами (2), (3) который является частным случаем оператора $M(D)$ (см. формулы (5), (6)). Действительно, в нашем случае

$$A(D_{\vec{r}}) = P(D_x), B(D_{\vec{r}}) = P(D_x)(Q(D_x) + c_yD_y + c_zD_z) - \Delta_{(y,z)}\,; \tag{26}$$

отсюда и из равенств (2), (3) следует справедливость неравенства (6) и для нашего случая. Отсюда, полагая (см. формулу (16))

$$R(\vec{\rho}) = Q(i\xi) + ic_y\eta + ic_z\zeta + \rho^2/P(i\xi), \quad \rho = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}\,, \tag{27}$$

получаем что функция $R(\vec{\rho})$ (теперь уже определенная равенством (27)) также удовлетворяет ограничению (17).

Рассмотрим в классе V_+ уравнение

$$L(D)u(\vec{r},t) = f(\vec{r},t)\,, \quad t > 0, \vec{r} \in R^3 \tag{28}$$

с *одним* из следующих начальных условий:

$$u|_{t=+0} = h(\vec{r})\,, \qquad \vec{r} \in R^3\,, \tag{29}$$

или

$$(P(D_x)u)|_{t=+0} = h(\vec{r})\,, \quad \vec{r} \in R^3\,, \tag{30}$$

или

$$(P_1(D_x)u)|_{t=+0} = h(\vec{r})\,, \quad \vec{r} \in R^3\,, \tag{31}$$

(если оператор $P(D_x)$ допускает разложение

$$P(D_x) = P_1(D_x)P_2(D_x) \tag{32}$$

в произведение отличных от констант операторов $P_1(D_x)$, $P_2(D_x)$ с вещественными коэффициентами), где $u, f \in V^+, h \in S'(R^3)$.

Из Леммы 1 (см. формулы (8), (9)) и равенства (32) следует справедливость следующего утверждения:

Лемма 3. *Решения $u \in V_+$ задач Коши: – (28), (29), – (28), (30) и (28), (31),(32) – удовлетворяют в классе $S'(R^4)$ соответственно уравнениям:*

$$L(D)u(\vec{r},t) = f(\vec{r},t) + P(D_x)h(\vec{r}) \otimes \delta(t)\,, \quad (\vec{r},t) \in R^4\,, \tag{33}$$

либо

$$L(D)u(\vec{r},t) = f(\vec{r},t) + h(\vec{r}) \otimes \delta(t)\,, \qquad (\vec{r},t) \in R^4\,, \tag{34}$$

либо

$$L(D)u(\vec{r},t) = f(\vec{r},t) + P_2(D_x)h(\vec{r}) \otimes \delta(t)\,, \quad (\vec{r},t) \in R^4\,, \tag{35}$$

где $\delta(t) \in S'(R)$ – "одномерная" дельта-функция Дирака.

Добавим к задачам Коши – (28), (29), – (28), (30) и (28), (31), (32) – условие регулярности на бесконечности следующего вида:

$$u(\vec{r} + k\vec{\theta},t) = o(1), \quad t > 0, \vec{r} \in R^3,\, k \to +\infty\,, \tag{36}$$

где $\vec{\theta}$ – какой-либо фиксированный вектор единичной сферы $\Omega_1 = \{\vec{r} \in R^3 :\ |\vec{r}| = 1\}$, причем само равенство (36) понимается в смысле теории распределений:

$$\langle u(\vec{r},t);\, \varphi(\vec{r} - k\vec{\theta},t)\rangle_4 = o(1), \quad k \to +\infty \tag{36'}$$

для всех $\varphi \in S(R^4)$, таких что $supp\,(\varphi) \subset R^4_+$.

Теорема 1. *Решение $u(\vec{r},t) \in V^+$ задачи Коши (28), (29) (или – (28), (30), или – (28), (31), (32)) с ограничением (36) — единственно в этом классе.*

Доказательство: Пусть $u_1, u_2 \in V^+$ – два произвольных решения задачи Коши (28), (29) (или – (28), (30), или – (28), (31), (32)) с ограничением (36). Положим $v(\vec{r},t) = u_1(\vec{r},t) - u_2(\vec{r},t)$. Воспользуемся Леммой 2 и равенствами (15), (26), тогда

$$\begin{cases} P(D_x)v(\vec{r},t) = 0, \\ \\ (P(D_x)[Q(D_x) + c_yD_y + c_zD_z] - \Delta_{(y,z)})v(\vec{r},t) = 0, \end{cases} \quad (\vec{r},t) \in R^4,$$

или, что то же самое,

$$P(D_x)v(\vec{r},t) = 0, \quad \Delta_{(y,z)}v(\vec{r},t) = 0, \quad (\vec{r},t) \in R^4. \tag{37}$$

Обозначая через $\widehat{v}(\vec{\rho},t) \in V^+$ Фурье-образ распределения $v(\vec{r},t) \in V^+$, получаем что система (37) эквивалентна системе

$$P(i\xi)\widehat{v}(\vec{\rho},t) = 0, \quad (\eta^2 + \zeta^2)\widehat{v}(\vec{\rho},t) = 0, \qquad (\vec{\rho},t) \in R^4. \tag{38}$$

Из (38) следует (см., напр., [15]), что $supp\,(\widehat{v}) \subset \mathscr{N}$, где множество $\mathscr{N} \subset R^4$ определяется как

$$\mathscr{N} = \{(\vec{\rho},t) \in R^4 :\ P(i\xi) = 0, \eta = \zeta = 0\}.$$

Очевидно, что если полином $P(i\xi)$ не имеет вещественных нулей, то множество $\mathscr{N}$ пусто, а значит, $v = 0$ в $S'(R^4)$.

Пусть теперь полином $P(i\xi)$ имеет $m, (m \leqslant 3)$ вещественных нулей $\xi_l, l = \overline{1;m}$. В этом случае множество $\mathscr{N}$ представляет собой объединение m прямых $\Gamma_l = \{\xi = \xi_l, \eta = 0, \zeta = 0, t \in R\}$, но тогда (см., напр., [14])) распределение $\widehat{v}$ может быть представлено в следующей форме:

$$\widehat{v}(\vec{\rho},t) = \sum_{l=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leqslant N} a_{l,\alpha}(t)(D_{\vec{\rho}})^{\alpha} \delta(\xi - \xi_l, \eta, \zeta), \tag{39}$$

где $\delta(\cdot)$ – "трехмерная"дельта-функция Дирака, $a_{l,\alpha}$ – некоторые распределения из $S'(R)$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – целочисленный мультииндекс и $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

Зафиксируем теперь пару пробных функций $\varphi, \psi \in S(R^4)$, таких что $\operatorname{supp}(\varphi), \operatorname{supp}(\psi) \subset R^4_+$, причем $\widehat{\psi} = \varphi$. Тогда

$$\langle v(\vec{r},t);\, \varphi(\vec{r},t)\rangle_4 = \langle v(\vec{r},t);\, \widehat{\psi}(\vec{r},t)\rangle_4 = \langle \widehat{v}(\vec{\rho},t);\, \psi(\vec{\rho},t)\rangle_4 \,.$$

Отсюда и из равенства

$$(\varphi(\vec{r} - k\vec{\theta}, t))^{\vee}(\vec{\rho}) = \exp(-ik\vec{\theta} \cdot \vec{\rho})\psi(\vec{\rho},t)$$

получаем, с учетом (39), что функция $\mathrm{P}(k)$:

$$\mathrm{P}(k) = \langle v(\vec{r},t);\, \varphi(\vec{r} - k\vec{\theta}, t)\rangle_4 = \langle \widehat{v}(\vec{\rho},t);\, \exp(-ik\vec{\theta} \cdot \vec{\rho})\, \psi(\vec{\rho},t)\rangle_4 =$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} \langle \delta(\xi - \xi_l, \eta, \zeta) \otimes a_{l,\alpha}(t);\, D^{\alpha}_{\vec{\rho}}(\exp(-k\vec{\theta} \cdot \vec{\rho})\psi(\vec{\rho},t))\rangle_4 \,,$$

является полиномом от переменной $k \in R$, который, с учетом $(36')$, может быть лишь тождественно равен нулю. Откуда немедленно следует, что $v = 0$ в R^4_+, а поскольку, в силу определения класса V_+, распределение $v(\vec{r},t)$ однозначно определяется своим сужением на в R^4_+, то $v = 0$ и на всем R^4.

Теорема доказана.

Замечание 3. Условие регулярности решения на бесконечности (36) (т.е., убывание решения *по фиксированному направлению* $\vec{\theta}$) является, вообще говоря, одним из наиболее слабых ограничений, и, как выяснится в дальнейшем, *"избыточно слабым"* для задач, которые будут рассмотрены выше. Тем не менее, Теорема 1 представляет самостоятельную ценность, поскольку ее рассуждения могут быть использованны и для более широкого класса задач Коши для уравнений с операторами $L(D)$ гораздо более общего вида, нежели оператор $L(D)$, определенный формулой (2). ■

2. ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ КОШИ И ЕГО СВОЙСТВА

Перейдем у изложению главных результатов работы. Введем понятие *фундаментального решения Коши* для уравнения (1) с оператором $L(D)$, определенным формулой (2).

Определение 1. Распределение $E(\vec{r},t) \in V^+$ будем называть *фундаментальным решением Коши* (для) уравнения (1) или *фундаментальным решением задачи Коши* (для) оператора $L(D)$, определенного равенствами (2), если оно удовлетворяет следующим соотношениям:

$$L(D)E(\vec{r},t) = 0, \quad (\vec{r},t) \in R^4_+, \tag{40}$$

$$(P(D_x)E)|_{t=+0} = \delta(\vec{r}), \quad \vec{r} \in R^3, \tag{41}$$

$$E(\vec{r},t) = o(1), \quad t > 0, x \to \pm\infty, r = \sqrt{y^2 + z^2} \to +\infty, \tag{42}$$

где $\delta(\cdot) \in S'(R^3)$ – "трехмерная"дельта-функция Дирака.

Замечания. 4. Аналогичное определение фундаментального решения Коши для нестационарных операторов с невыделенной временной производной D_t вводилось ранее в работах [7]) – [14]).

5. Здесь и далее формулы типа (42) понимаются в смысле теории распределений (см. формулы (36) и (36′)). ■

Из равенств (40), (41) и Леммы 3 (см. также равенство (34)) немедленно следует справедливость следующего утверждение:

Лемма 4. *В классе $S'(R^4)$ фундаментальное решение Коши $E(\vec{r},t)$ удовлетворяет уравнению:*

$$L(D)E(\vec{r},t) = \delta(\vec{r}) \otimes \delta(t), \quad (\vec{r},t) \in R^4 . \tag{43}$$

Сформулируем и докажем центральное утверждение работы.

Теорема 2. *Фундаментальное решение Коши $E(\vec{r},t)$ оператора $L(D)$, определенного равенствами (2), единственно в классе V^+ и может быть представлено в следующем виде:*

(i) *при $a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = 0$:*

$$E(\vec{r},t) = (4\pi t)^{-1}\Theta(t) \cdot \exp(-u_0)\delta(x - u_1) , \tag{44}$$

(ii) *при $a_3 = b_3 = 0, a_2 + b_2 > 0$:*

$$E(\vec{r},t) = (8\pi^{3/2}\, t\, u_2^{1/2})^{-1}\Theta(t) \cdot \exp(-u_0 - (x - u_1)^2/(4u_2)) , \tag{45}$$

(iii) *при $|a_3| + |b_3| > 0, a_2 = b_2 = 0$:*

$$E(\vec{r},t) = (3^{1/3}4t|u_3|^{1/3})^{-1}\Theta(t) \cdot \exp(-u_0) \cdot \mathrm{Ai}((x - u_1)(3u_3)^{-1/3}), \tag{46}$$

(iv) *при $|a_3| + |b_3| > 0, a_2 + b_2 > 0$:*

$$E(\vec{r},t) = (3^{1/3}4t|u_3|^{1/3})^{-1}\Theta(t) \cdot \exp(\omega_1) \cdot \mathrm{Ai}(\omega_2), \tag{47}$$

где

$$\omega_1 = (1/27) \cdot ((2u_2^3 - 9u_1u_2u_3 + 9xu_2u_3)/u_3^2) - u_0, \tag{48}$$

$$\omega_2 = (x - u_1 + u_2^2/(3u_3)) \cdot (3u_3)^{-1/3}, \tag{49}$$

$$u_k = (a_k r_c^2 + 4b_k t^2)/(4t), \quad k = \overline{0;3}, \tag{50}$$

$r_c \equiv r_c(t) = \sqrt{(y - c_y t)^2 + (z - c_z t)^2}$,$\Theta(\cdot)$ *– функция Хевисайда,* $\delta(\cdot) \in S'(R)$ – *"одномерная" дельта-функция Дирака,* $\mathrm{Ai}(\cdot)$ *— функция Эйри первого рода (см. [16])):*

$$\mathrm{Ai}(z) = \pi^{-1} \int\limits_0^{+\infty} \cos(z\xi + \xi^3/3)d\xi . \tag{51}$$

Доказательство: 1). Установим сначала справедливость равенств (44) - (50).

Обозначая через $\widehat{E}(\vec{\rho},t)$ Фурье-образ распределения $E(\vec{r},t)$, получаем из равенств (40), (41) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$[P(i\xi)(D_t + Q(i\xi) + ic_y\eta + ic_z\zeta) + \rho^2)]\widehat{E}(\vec{\rho},t) = 0, \quad t > 0, \vec{\rho} \in R^3,$$

где $\rho = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$, с начальным условием:

$$P(i\xi)\widehat{E}_{|t=+0} = 1(\vec{\rho}), \quad \vec{\rho} \in R^3 .$$

Решение этой задачи Коши имеет вид:

$$\widehat{E}(\vec{\rho},t) = \Theta(t)(1/P(i\xi))\exp(-tR(\vec{\rho})), \qquad (52)$$

где функция $R(\vec{\rho})$ определена равенством (27).

Из равенства (52) восстановим распределение $E(\vec{r},t)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$E(\vec{r},t) = \Theta(t)(\widehat{E}(\vec{\rho},t))^{\vee}(\vec{r},t)\,, \quad \vec{r} \in R^3,\, t > 0. \qquad (53)$$

Как уже упоминалось ранее (см. комментарии к формуле (27)): $Re\,(R(\vec{\rho})) \geqslant 0$ для всех $\vec{\rho} \in R$, поэтому правая часть равенства (53) может быть заменена классическим интегралом Фурье:

$$E(\vec{r},t) = (2\pi)^{-3}\,\Theta(t)\int\limits_{R^3}(1/P(i\xi))\,\exp(-tR(\vec{\rho}))\,\exp(i\vec{r}\cdot\vec{\rho})\,d\vec{\rho}\,. \qquad (54)$$

Заметим, что интеграл из правой части равенства (54) из-за наличия множителя $1/P(i\xi)$ может иметь несуммируемые особенности на гиперплоскостях $\Gamma = \{\vec{\rho} \in R^3 : P(i\xi) = 0\}$. Устраним эту проблему переходом к повторному интегралу:

$$\begin{aligned} &E(\vec{r},t) = \\ &= (2\pi)^{-3}\,\Theta(t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1/P(i\xi))\,\exp(-tQ(i\xi)+ix\xi)\,d\xi\cdot I_1(\xi,y,z,t)\,, \end{aligned} \qquad (55)$$

где

$$I_1(\xi,y,z,t) = \int\limits_{R^2}\exp(i((y-c_yt)\eta+(z-c_zt)\zeta)-\rho^2t/P(i\xi))\,d\eta d\zeta\,. \qquad (56)$$

Обозначая через $\vec{a} = (y-c_yt,z-c_zt), \vec{b} = (\eta,\zeta), |\vec{a}| = r_c, |\vec{b}| = \rho$ и через θ угол меду векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, перейдем в интеграле (56) к интегрированию в полярной системе координат (ρ,θ):

$$I_1(\xi,y,z,t) = \int\limits_0^{+\infty}\exp(-\rho^2t/P(i\xi))\,\rho d\rho\cdot I_2(y,z,t,\rho)\,, \qquad (57)$$

где

$$I_2(y,z,t,\rho) = \int\limits_0^{2\pi}\exp(ir_c\,\rho\,\cos(\theta))\,d\theta\,.$$

Последний интеграл равен (см. [17]), стр. 92, формула (7.12.2)): $I_2(y,z,\rho) = 2\pi J_0(r_c\,\rho)\,,$ где $J_0(\cdot)$ – функция Бесселя первого рода (см. также [17]); и равенство (57) приобретает вид:

$$I_1(\xi,y,z,t) = 2\pi\int\limits_0^{+\infty}\exp(-\rho^2t/P(i\xi))J_0(r_c\,\rho)\,\rho d\rho\,. \qquad (58)$$

Интеграл (58) также вычисляется непосредственно (см. [19], стр. 60, формула (7.7.3.24))) и равен

$$I_1(\xi,y,z,t) = \pi P(i\xi)t^{-1}\exp(-P(i\xi)\,r_c^2/4t)\,. \qquad (59)$$

Подставляя равенство (59) в (55), получаем что:

$$E(\vec{r},t) = (8\pi^2t)^{-1}\Theta(t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp[iu_3\xi^3-u_2\xi^2+i(x-u_1)\xi-u_0]\,d\xi\,, \qquad (60)$$

где параметры u_k определены равенством (50). Отметим, что интеграл из (60) уже не имеет особенностей в точках $\xi \in R: \ P(i\xi) = 0$.

Перейдем к доказательству формул (44) - (49).

(i) Пусть $a_2 = a_3 = b_2 = b_3 = 0$; тогда формула (60) приобретает вид:

$$E(\vec{r},t) = (8\pi^2 t)^{-1}\,\Theta(t)\exp(-u_0)\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(x-u_1)\xi]\,d\xi\,, \tag{61}$$

откуда немедленно следует равенство (44).

(ii) Пусть теперь $a_2 + b_2 > 0, a_3 = b_3 = 0$. В этом случае формула (60) будет уже выглядеть следующим образом:

$$E(\vec{r},t) = (8\pi^2 t)^{-1}\,\Theta(t)\exp(-u_0)\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-u_2\xi^2 + i(x-u_1)\xi]\,d\xi\,. \tag{62}$$

Поскольку

$$\begin{gathered}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp[-u_2\xi^2 + i(x-u_1)\xi]\,d\xi = 2\,Re\,\{\int\limits_{0}^{+\infty} \exp[-u_2\xi^2 + i(x-u_1)\xi]\,d\xi\} = \\ = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \exp(-u_2\xi^2)\cdot\cos((x-u_1)\xi)\,d\xi.\end{gathered} \tag{63}$$

Последний интеграл из правой части равенства (63) вычисляется непосредственно (см. [18], стр. 24, формула (1.4.11)):

$$\begin{gathered}\int\limits_{0}^{+\infty} \exp(-u_2\xi^2)\cdot\cos[(x-u_1)\xi]\,d\xi = \\ = 2^{-1}\pi^{1/2}u_2^{-1/2}\,\exp[-(x-u_1)^2/(4u_2)]\,.\end{gathered} \tag{64}$$

Объединяя теперь равенства (62) - (64), получаем формулу (45).

(iii) Пусть, далее, $a_2 = b_2 = 0, |a_3| + |b_3| > 0$. В этом случае формула (60) имеет вид:

$$E(\vec{r},t) = (8\pi^2 t)^{-1}\,\Theta(t)\exp(-u_0)\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(u_3\xi^3 + (x-u_1)\xi)]\,d\xi\,. \tag{65}$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(u_3\xi^3 + (x-u_1)\xi)]\,d\xi = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \cos[u_3\xi^3 + (x-u_1)\xi]\,d\xi\,, \tag{66}$$

то, объединяя формулы (65), (66) и (51), немедленно устанавливаем справедливость равенства (46).

(iv) Наконец, пусть $a_2 + b_2 > 0, |a_3| + |b_3| > 0$. Из формулы (60) получаем что

$$E(\vec{r},t) = (8\pi^2 t)^{-1}\,\Theta(t)\exp(-u_0)\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iu_3\xi^3 - u_2\xi^2 + i(x-u_1)\xi]\,d\xi\,. \tag{67}$$

Заметим, что подинтегральное выражение есть целая функция переменной $\xi \in \mathbb{C}$, а поэтому интегрирование можно вести по любому контуру $\gamma \subset \mathbb{C}$, гомотопному вещественной оси (при этом нужно лишь следить, чтобы на этом контуре подинтегральное выражение оставалось функцией умеренного роста):

$$E(\vec{r},t) = (8\pi^2 t)^{-1}\,\Theta(t)\exp(-u_0)\cdot\int\limits_{\gamma}\exp[iu_3\xi^3 - u_2\xi^2 + i(x-u_1)\xi]\,d\xi\,. \tag{68}$$

Возьмем в качестве такого контура γ горизонтальную прямую $(-\infty - iu_2/3u_3,\ +\infty - iu_2/3u_3)$ (т.е., фактически заменим переменную интегрирования ξ на $\xi - iu_2/3u_3$); тогда равенство (69) примет вид:

$$E(\vec{r},t) = (8\pi^2 t)^{-1}\,\Theta(t)\exp(\omega_1)\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(i(u_3\xi^3 + (3u_3)^{1/3}\omega_2\xi))\,d\xi\,, \tag{69}$$

где параметры ω_1, ω_2 и u_3 определены равенствами (48), (49). Повторяя те же рассуждения, что были использованы при доказательстве формулы (46) (см. равенства (65), (66) и (51)), устанавливаем и справедливость равенства (47).

2). Справедливость равенств (40), (41) обеспечивается самим построением распределения $E(\vec{r},t)$. Далее, используя асимптотические свойства функции Эйри $\mathrm{Ai}(\cdot)$ (см. [16]) и равенства (44) - (50)) или непосредственным анализом формул (61), (62), (65) и (67), немедленно устанавливаем справедливость соотношения (42).

Далее, из равенства (53) следует, что распределение $E(\vec{r},t)$ однозначно определяется своим сужением на полупространство R^4_+, и, кроме того, имеет S'-предел $E|_{t=+0}$:

$$E_{|t=+0} = U(x)\otimes\delta(y)\otimes\delta(z), \tag{70}$$

где распределение $U(x) = ((P(i\xi))^{-1})^{\vee}(x) \in S'(R)$ может быть определено как решение уравнения

$$P(D_x)U(x) = \delta(x)\,, \quad x \in R, \tag{71}$$

откуда, в частности, следует, что $E|_{t=+0}$ является распределением класса $S'(R^3)$, а значит, $E(\vec{r},t) \in V^+$.

Наконец, единственность фундаментального решения Коши $E(\vec{r},t)$ в классе V^+ следует из Теоремы 1 (см. формулы (28), (30), (36) и (40) - (42), причем ограничение (42) является более сильным, чем (36)).

Теорема доказана.

Перейдем к вопросу *о распространении сингулярностей* (или, что то же самое – об эволюции по времени $t > 0$ так называемых (см., напр., [15]) *волновых фронтов*) фундаментальных решений Коши $E(\vec{r},t)$, представляющих собой поверхности (или линии) разрывов решений. При этом волновые фронты удобно интерпретировать в терминах *сингулярных носителей*: $\mathrm{sing\,supp}\,(E(\cdot,t))$ (см. также [15]) распределений $E(\vec{r},t)$, считая при этом $\vec{r} \in R^3$ переменной, а $t > 0$ – параметром. Теорема 2 и непосредственный анализ формул (44) - (50), (60) - (62), (40), (65), (67) дают ответ на этот вопрос:

Следствие 2. *Фундаментальное решение Коши $E(\vec{r},t)$, определенное равенствами (44) - (50), удовлетворяет следующим соотношениям:*

(i) *при $a_3 = b_3 = a_2 = b_2 = 0$:*

$$\begin{aligned}&\mathrm{sing\,supp}\,(E) = \mathrm{supp}\,(E) =\\ &= \{\vec{r} \in R^3 \,|\, x = b_1 t + a_1 r_c^2/(4t), r_c \geqslant 0, t > 0\},\end{aligned} \tag{72}$$

(ii) *при* $a_3 = b_3 = 0, a_2 > 0, b_2 = 0$ *или при* $a_3 \neq 0, b_3 = 0, a_2 \geqslant 0, b_2 = 0$*:*

$$\operatorname{sing\,supp}(E) = \{\vec{r} \in R^3 \,|\, x = b_1 t, r_c = 0,\ t > 0\}, \tag{73}$$

(iii) *при* $a_3 \in R, b_3 \in R, a_2 \geqslant 0, b_2 > 0$ *или при* $a_3 = 0, b_3 \neq 0, a_2 \geqslant 0, b_2 \geqslant 0$ *или при* $a_3 \cdot b_3 > 0, a_2 \geqslant 0, b_2 \geqslant 0$ *или при* $a_3 \cdot b_3 < 0, a_2 > 0, b_2 \geqslant 0$*:*

$$\operatorname{sing\,supp}(E) = \varnothing, \quad t > 0\,, \tag{74}$$

(iv) *при* $a_3 \cdot b_3 < 0, a_2 = b_2 = 0,$*:*

$$\operatorname{sing\,supp}(E) = \{\vec{r} \in R^3 \,|\, x = ((a_3 b_1 - a_1 b_3)/a_3)t, r_c = 2(-b_3/a_3)^{1/2}t, t > 0\}, \tag{75}$$

– *для всех* $a_0, b_0 \geqslant 0,\ a_1, b_1, c_y, c_z \in R$*. Здесь* $r_c = \sqrt{(y - c_y t)^2 + (z - c_z t)^2}$*.*

Замечание 6. Аналитические выкладки, использованные при выводе формул (44) - (50) (см. Доказательство Теоремы 2) носят достаточно сложный характер, поэтому следует произвести некоторую "верификацию" этих формул, проверив их для некоторых частных случаев уравнений (1) – (3), фундаментальные решения Коши которых были были выведены ранее другими методами.

(i) Пусть $a_0 = a_2 = a_3 = 0, a_1 = 1, b_0 = b_1 = b_3 = 0, b_2 = -1$,

$$L(D) = D_x D_t - D_x^3 - \Delta_{(y,z)} \tag{76}$$

– оператор, соответствующий пространственному *нестационарному вязкому трансзвуковому уравнению* (см., напр., [7], [9] и ссылки там же). Формулы (45), (50) дают равенство:

$$E(\vec{r},t) = (8\pi^{3/2}t^{3/2})^{-1}\Theta(t)\exp[-(x - r^2/4t)^2/4t)], \tag{77}$$

что совпадает с результатами работ [7], [9]. (Как и ранее, здесь и далее $r = \sqrt{y^2 + z^2}$.)

(ii) Пусть $a_0 = a_2 = a_3 = 0, a_1 = 1, b_0 = b_1 = b_2 = 0, b_3 = \pm 1$,

$$L^{\pm}(D) = D_x D_t \pm D_x^4 - \Delta_{(y,z)} \tag{78}$$

– операторы, соответствующие некоторым модификациям пространственного *уравнения Кадомцева-Петвиашвили* (см., напр., [1] – [4]). Формулы (46), (50) дают равенство:

$$E^{\pm}(\vec{r},t) = (3^{1/3}4\pi t^{4/3})^{-1}\Theta(t)\mathrm{Ai}(\pm(x - r^2/4t)/(3t)^{1/3}), \tag{79}$$

что совпадает с результатами работ [8] – [11].

(iii) Пусть теперь $a_0 = a_2 = 0, a_1 = 1, a_3 = \pm 1, b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$,

$$L^{\pm}(D) = (D_x \pm D_x^3)D_t - \Delta_{(y,z)} \tag{80}$$

– операторы, соответствующие т.н. *регуляризованному длинноволновому уравнению* и одному из пространственных уравнений Кельвина-Фойгхта (см., напр., [1] – [4]). Формулы (46), (50) дают равенство:

$$E^{\pm}(t,\vec{r}) = (48^{1/3}\pi r^{2/3}t^{2/3})^{-1}\Theta(t)\mathrm{Ai}(\mp 48^{-1/3}r^{4/3}t^{-2/3} \pm (4/3)^{1/3}xr^{-2/3}t^{1/3}). \tag{81}$$

что вновь совпадает с результатами работ [9] – [11].

(iv) Пусть теперь $a_0 = a_1 = a_3 = 0, a_2 = 1, b_0 = b_1 = b_2 = 0, b_3 = 1$,

$$L(D) = -(D_x^2 D_t + D_x^5 + \Delta_{(y,z)}) \tag{82}$$

– оператор, соответствующий одному из предельных случаев моделей, описывающих дисперсионно-диссипативные процессы релаксации плазмы (см., напр., [2], [4]). Формулы (47)-(50) дают равенство:

$$E(\vec{r},t) = (3^{1/3}4\pi t^{4/3})^{-1}\Theta(t)\cdot\exp(\omega_1)\mathrm{Ai}(\omega_2), \tag{83}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (x + r^4/72t^3)r^2/12t^2,\\ \omega_2 &= (x + r^4/48t^3)\cdot(3t)^{-1/3},\end{aligned} \tag{84}$$

что также совпадает с результатами работы [12].

Приведем также несколько новых результатов, которые могут быть получены с помощью Теоремы 2.

(v) Пусть $a_0 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1, b_0 = b_1 = b_3 = 0, b_2 = 1,$

$$L(D) = D_x^3 D_t - D_x^5 - \Delta_{(y,z)} \tag{85}$$

– оператор, соответствующий еще одному предельному случаю моделей, дисперсионно-диссипативные процессов релаксации плазмы (см., напр., [2]). Формулы (47)-(50) дают равенство:

$$E(\vec{r},t) = (3^{1/3}\pi(4tr)^{2/3})^{-1}\Theta(t)\cdot\exp(\omega_1)\mathrm{Ai}(\omega_2), \tag{86}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= 2^3\,3^{-3}\cdot r^{-4}\cdot t^2\cdot(8t^3 + 9xr^2),\\ \omega_2 &= 2^{2/3}3^{-4/3}\cdot r^{-8/3}\cdot t^{1/3}\cdot(4t^3 + 3xr^2)\,.\end{aligned} \tag{87}$$

(vi) Пусть теперь $a_0 = a_2 = a_3 = 0, a_1 = 1, b_0 = b_1 = 0, b_2 = b_3 = -1,$

$$L(D) = D_x D_t - D_x^4 - D_x^3 - \Delta_{(y,z)} \tag{88}$$

– оператор, соответствующий пространственному дисперсионно-диссипа-тивному уравнению Кадомцева (см., напр., [4]). Формулы (47)-(50) дают равенство:

$$E(\vec{r},t) = (3^{1/3}4\pi t^{4/3})^{-1}\Theta(t)\cdot\exp(\omega_1)\mathrm{Ai}(\omega_2), \tag{89}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= (2^2\,3^3\cdot t)^{-1}(36xt - 9r^2 - 8t^2),\\ \omega_2 &= -(2^3 3^{4/3}\cdot t^{4/3})^{-1}\cdot(12xt - 3r^2 - 4t^2)\,.\end{aligned} \tag{90}$$

(vii) Пусть, далее $a_0 = a_2 = a_3 = 0, a_1 = 1, b_0 = b_1 = 0 = b_2 = b_3 = 0,$

$$L(D) = D_x D_t - \Delta_{(y,z)} \tag{91}$$

– оператор, соответствующий пространственному уравнению распространения слабых ударных волн, возникающих при обтекании тел конечных размеров сверхзвуковым потоком газа (см., напр., [5]). Формулы (44), (50) дают равенство:

$$E(\vec{r},t) = (4\pi t)^{-1}\Theta(t)\cdot\delta(x - r^2/(4t))\,, \tag{92}$$

где $\delta(t) \in S'(R)$ – "одномерная" дельта-функция Дирака.

(viii) Пусть $a_0 = a_1 = a_3 = 0, a_2 = -1, b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0,$

$$L(D) = D_x^2 D_t + \Delta_{(y,z)} \tag{93}$$

– оператор, соответствующий (с точностью до знака) пространственному уравнению распространения квази-акустических волн, возникающих при обтекании тел конечных размеров звуковым на бесконечности потоком идеального газа (см., напр., [6]). Формулы (45), (50) дают равенство:

$$E(\vec{r},t) = (4\pi^{3/2}rt)^{-1}\Theta(t)\cdot\exp(-x^2t/r^2)\,. \tag{94}$$

(ix) Пусть, наконец, $a_0 = a_1 = a_2 = 0, a_3 = 1, b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0$,

$$L(D) = D_x^3 D_t - \Delta_{(y,z)} \tag{95}$$

– оператор, соответствующий (с точностью до знака) пространственному уравнению ионно-акустических (см., напр., [1], [3]). Формулы (46), (50) дают равенство:

$$E(\vec{r},t) = (48^{1/3}\pi r^{2/3}t^{2/3})^{-1}\Theta(t) \cdot \mathrm{Ai}((4/3)^{1/3}xr^{-2/3}t^{1/3}). \tag{96}$$

Насколько известно автору данной работы, формулы фундаментального решения Коши (86), (87), (89), (90), (92), (94), (96) для операторов $L(D)$ из равенств (85), (88), (91), (93), (95) на данный момент являются новыми. ■

Вернемся к задачам Коши: – (28), (29), – (28), (30), – (28), (30), (31), причем ограничение (36) заменим более сильным:

$$u(\vec{r},t) = o(1)\,, \quad r = \sqrt{y^2 + z^2} \to +\infty, t > 0\,. \tag{97}$$

Кроме того, будем предполагать что:

$$h(\vec{r}) = \quad o(1)\,, \quad \vec{r} \to +\infty\,, \tag{98}$$

$$f(\vec{r},t) = o(1)\,, \quad \vec{r} \to \infty, t \geqslant 0\,, \tag{99}$$

причем будем предполагать, что распределения $h \in S'(R^3)$, $f \in V^+$ убывают на бесконечности достаточно быстро для того, чтобы была бы корректно определена их свертка по пространственным переменным $\vec{r} \in R^3$ с любым распределением $T \in S'(R^3)$, таким что $T(\vec{r}) = O(x^2)\,, \vec{r} \to \infty$ (а, следовательно, в силу равенств (42), (70) и (71) – и с фундаментальным решением Коши $E(\vec{r},t)$ и всеми его производными при всех $t \geqslant 0$).

Теперь, из Лемм 3 и 4 и Теорем 1 и 2 (см. также формулы (33) – (36), (40) – (43), немедленно следует справедливость следующего утверждения:

Теорема 3. *Задачи Коши: – (28), (29), – (28), (30), – (28), (30), (31) с условием (97) и ограничениями (98), (99) корректно разрешимы в классе V_+, а их решения $u(\vec{r},t) \in V_+$ – единственны и могут быть представлены в следующем виде:*

$$u(\vec{r},t) = u_h(\vec{r},t) + u_f(\vec{r},t)\,, \tag{100}$$

где

$$u_f(\vec{r},t) = \int\limits_0^t (f(\cdot\,,\tau) * E(\cdot\,,t-\tau))(\vec{r})\,d\tau\,, \tag{101}$$

и

$$u_h(\vec{r},t) = P(D_x)(h(\cdot) * E(\cdot\,,t))(\vec{r})\,, \tag{102}$$

– для начального условия (29);

$$u_h(\vec{r},t) = (h(\cdot) * E(\cdot\,,t))(\vec{r})\,, \tag{103}$$

– для начального условия (30);

$$u_h(\vec{r},t) = P_2(D_x)(h(\cdot) * E(\cdot\,,t))(\vec{r})\,, \tag{104}$$

– для начального условия (24). Здесь $*$ – означает свертку по пространственным переменным $\vec{r} \in R^3$, а $E(\vec{r},t)$ – фундаментальное решение Коши оператора $L(D)$, определенное равенствами (44) - (50).

3. ПОЛУГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ

Перейдем к изучению групповых и полугрупповых свойств решений задач Коши для *однородного* уравнения (1). Сформулируем и докажем ряд простых, но важных утверждений.

Обозначим:

$$G^{+}(\vec{r},t) = P(D_x)(E(\vec{r},t)\,. \tag{105}$$

Лемма 5. *Фундаментальное решение Коши $E \in V^{+}$ оператора $L(D)$ (см. формулы (2)), определенное равенствами (44) - (50), удовлетворяет полугрупповому свойству:*

$$E(\vec{r},t_1+t_2) = (E(\cdot\,,t_1) * G^{+}(\cdot\,,t_2))(\vec{r}), \quad \forall\ t_1,t_2>0,\ \vec{r}\in\ R^3. \tag{106}$$

Доказательство: Обозначим через $\widehat{E}(\vec{\rho},t), \widehat{G}^{+}(\vec{\rho},t) = P(i\xi)\widehat{E}(\vec{\rho},t)$ Фурье-образы распределений $E(\vec{r},t), G^{+}(\vec{r},t)$ и воспользуемся равенством (52):

$$\begin{aligned}
&\widehat{E}(\vec{\rho},t_1+t_2) = \\
&= (1/P(i\xi)\exp(-(t_1+t_2)R(\vec{\rho})) = (1/P(i\xi)\exp(-t_1R(\vec{\rho}))\exp(-t_2R(\vec{\rho})) = \\
&(1/P(i\xi)\exp(-t_1R(\vec{\rho}))\cdot P(i\xi)((1/P(i\xi))\exp(-t_2R(\vec{\rho})) = \\
&= \widehat{E}(\vec{\rho},t_1))\cdot \widehat{G}^{+}(\vec{\rho},t_2)\,,
\end{aligned}$$

откуда, применением обратного преобразования Фурье, немедленно получаем равенство (106).

Лемма доказана.

Следствие 3. *Справедливо равенство:*

$$\begin{aligned}
&P_0(D_{\vec{r}})E(\vec{r},t_1+t_2) = \\
&= ((P_0(D_{\vec{r}})E)(\cdot\,,t_1) * G^{+}(\cdot\,,t_2))(\vec{r}), \quad \forall\ t_1,t_2>0,\ \vec{r}\in\ R^3.
\end{aligned} \tag{107}$$

где $P_0(D_{\vec{r}})$ – произвольный дифференциальный полином.

Рассмотрим в классе V^{+} *однородное* уравнение:

$$L(D)u(\vec{r},t) = 0, \quad (\vec{r},t) \in R^4_{+}\,. \tag{108}$$

Добавим к нему одно из начальных условий – (29), или – (30), или – (31), (32), ограничение (98), а также условие регулярности решения на бесконечности (97). Из Теоремы 3 (см. формулы (100) – (104)) немедленно следует, что решения $u(\vec{r},t)$ рассматриваемых задач Коши имеют следующий вид:

$$u(\vec{r},t) = (h(\cdot) * P(D_x)E(\cdot\,,t))(\vec{r}), \quad t>0, \vec{r}\in R^3, \tag{109}$$

– для начального условия (29);

$$u(\vec{r},t) = (h(\cdot) * E(\cdot\,,t))(\vec{r}), \quad t>0, \vec{r}\in R^3, \tag{110}$$

– для начального условия (30);

$$u(\vec{r},t) = (h(\cdot) * P_2(D_x)E(\cdot\,,t))(\vec{r}), \quad t>0, \vec{r}\in R^3 \tag{111}$$

– для начального условия (31).

Объединяя формулы (109) - (111) с равенствами (106), (107), немедленно устанавливаем справедливость следующего утверждения:

Теорема 4. *Решения* $u(\vec{r},t) \in V^+$ *задач – (108), (29), (97), – (108), (30), (97), – (108), (31), (97), – удовлетворяют полугрупповому свойству:*

$$u(\vec{r},t_1 + t_2) = (u(\cdot\,,t_1) * G^+(\cdot,t_2))(\vec{r}), \quad \forall\, t_1, t_2 > 0, \vec{r} \in R^3\,, \tag{112}$$

где распределение $G^+ \in V^+$ *определено равенством (105).*

Замечание 7. Рассмотрим теперь в классе V^+ уравнение (108) с условием (67) (т.е., *без начального условия.* Из Следствия 1 и Теоремы 1 получаем (см. формулы (10), (11), (15) и (22) – (25)) что решение $u(\vec{r},t) \in V^+$ задачи (108), (67) может быть представлено в виде:

$$\begin{aligned} &u(\vec{r},t) = (h_+(\cdot) * (P(D_x)E(\cdot,t)))(\vec{r}) \equiv \\ &\equiv (h_+(\cdot) * G^+(\cdot,t))(\vec{r})\,, \quad t > 0, \vec{r} \in R^3\,, \end{aligned} \tag{113}$$

где распределение $h_+(\vec{r}) \in S'(R^3)$ может быть определено равенством:

$$h_+(\vec{r}) = (S') \lim_{t=+0} u(\vec{r},t)\,, \tag{114}$$

и следовательно, также удовлетворяет полугрупповому свойству (112). ■

Определение 2. Распределение $G^+ \in V^+$ определенное равенством (105), будем называть *генератором полугруппы* сдвигов по переменной $t > 0$ решений $u(\vec{r}.t) \in V^+$ однородного уравнения (108). ■

Докажем еще одно важное свойство распределения $G^+ \in V^+$. Обозначим через $T_F(\xi,y,z)$ частичное преобразование Фурье по переменной x распределения $T(\vec{r}) \in S'(R^3)$. Из равенств (61), (62), (65), (67) и (50) следует, что распределение $E_F(\xi,y,z,t)$ и все ее производные по переменным ξ,y,z при каждом $t > 0$ является *регулярным* по переменным $(\xi,y,z) \in R^3$, причем – функцией класса $C^\infty(R^3)$, и, кроме того, мультипликатором в классе $S(R^3)$, а распределение $G_F^+(\xi,y,z,t) == P(i\xi)E_F(\xi,y,z,t)$ – еще и *ортогональным* ко всем распределениям $h'_F(\xi,y,z) \in S'(R^3)$, таким что $P(i\xi)h'_F(\xi,y,z) = 0$ в $S'(R^3)$:

$$\langle h'_F(\xi,y,z);\, G_F(\xi,y,z,t)\varphi(\xi,y,z)\rangle_3 = 0\,, \quad \forall\, \varphi \in S(R^3)\,,$$

откуда немедленно следует справедливость следующего утверждения:

Лемма 6. *Для всех распределений* $h'(\vec{r}) \in S'(R^3)$*, таких что*

$$P(D_x)h'(\vec{r}) = 0\,, \quad \vec{r} \in R^3 \tag{115}$$

справедливо равенство:

$$(h'(\cdot) * G^+(\cdot,t))(\vec{r}) = 0\,, \quad \vec{r} \in R^3, \forall\, t > 0, \tag{116}$$

где $G^+ \in V^+$ *– распределение, определенный равенством (105).*

Замечание 8. Распределения $h'(\vec{r}) \in S'(R^3)$, удовлетворяющие равенству (115), являются "плохими" по отношению к начальным условиям (29) – (31), поскольку не удовлетворяют ограничению (98) (которое, вообще говоря, несколько избыточно) при $x \to \pm\infty$, а поэтому их свертки с фундаментальным решением Коши $E(\vec{r},t)$ и ее производными могут оказаться некорректными. При этом из равенства (116) следует, что оператор $(*G^+)$ производит факторизацию по "плохим" аддитивным компонентам $h'(\vec{r})$ распределений $h(\vec{r}) \in S'(R^3)$ из условия (29), если последние выбраны некорректно.

Кроме того, представление (113), (114) $u(\vec{r},t)$ задачи (108), (67) может быть переписано в эквивалентной форме:

$$u(\vec{r},t) = (g(\cdot) * E(\cdot,t))(\vec{r})\,, \quad t > 0, \vec{r} \in R^3\,, \tag{117}$$

где распределение $g(\vec{r}) \in S'(R^3)$ может быть определено равенством:

$$g(\vec{r}) = (S') \lim_{t=+0} (P(D_x)u)(\vec{r},t), \tag{118}$$

а поскольку $g(\vec{r}) = P(D_x)h(\vec{r})$, то в случае начального условия (30) факторизация по "плохим" компонентам эквивалентна требованию: $g \in S'_P(R^3)$, где $S'_P(R^3) = \{T_P = P(D_x)T : T \in S'(R^3)\}$ (что еще и дает некоторую информацию о классах корректности задачи Коши (108), (30).

4. ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ КОШИ

Рассмотрим теперь вопрос о наличии *групповых свойств* решений однородного уравнения (108).

В целях облегчения дальнейшего изложения введем в рассмотрение еще несколько классов распределений.

Определим класс $S_0'(\bar{R}^4_-) \subset S'(R^4)$ аналогично классу $S_0'(\bar{R}^4_+)$ и класс $V^- \subset S_0'(\bar{R}^4_+)$ как $V^- = \{T_-(\vec{r},t) = T_+(\vec{r}, -t) | T_+ \in V^+\}$. Пусть, далее, класс $V \in S'(R^4)$ состоит из всех распределений $T(\vec{r},t)$ вида: $T(\vec{r},t) = T_+(\vec{r},t) + T_-(\vec{r},t)$, где $T_+ \in V^+, T_- \in V^-$, причем S'-пределы $T|_{t=+0}, T|_{t=-0}$ могут различаться между собой на распределение $h_0(\vec{r}) \in S'(R^3)$, такое что $P(D_x)h_0(\vec{r}) = 0, \vec{r} \in R^3$:

$$(S') \lim_{t=+0} (P(D_x)T(\vec{r},t)) = (S') \lim_{t=-0} (P(D_x)T(\vec{r},t)), \quad \vec{r} \in R^3. \tag{119}$$

Вернемся к ограничению (3) на коэффициенты оператора $L(D)$. Теперь, вместо неравенства $a_0, a_2, b_0, b_2 \geqslant 0$ потребуем выполнения более жесткого ограничения

$$a_0 = a_2 = b_0 = b_2 = 0. \tag{120}$$

Тогда, в силу формул (2) получаем что:

$$P(-D_x) = -P(D_x), \quad Q(-D_x) = -Q(D_x), \quad L(-D) = L(D), \tag{121}$$

$$P(-i\xi) = -P(i\xi), \quad Q(-i\xi) = -Q(i\xi), \quad R(-\vec{\rho}) = -R(\vec{\rho}), \tag{122}$$

$$Re\,(P(i\xi)) = Re\,(Q(i\xi)) = Re\,(R(\vec{\rho})) = 0, \quad \forall\,\vec{\rho} \in R^3, \tag{123}$$

где функция $R(\vec{\rho})$ определена равенством (27). Из равенства (123) следует, что интеграл Фурье (24) может быть корректно определен не только при $t > 0$, но и при $t < 0$ до распределения $H(\vec{r},t) \in S'(R^4)$ равенством

$$\begin{aligned} H(\vec{r},t) = (2\pi)^{-3} \int_{R^3} (1/P(i\xi)) \exp(-tR(\vec{\rho})) \exp(i\vec{r}\cdot\vec{\rho})\, d\vec{\rho}, \\ \vec{r} \in R^3,\ t \in R. \end{aligned} \tag{124}$$

Заменяя в интеграле (124) переменные $t, \xi, \vec{\rho}, \vec{r}$ на $-t, -\xi, -\vec{\rho}, -\vec{r}$, получаем, с учетом (121), что:

$$H(\vec{r},t) = -H(-\vec{r}, -t), \quad t \in R, \vec{r} \in R^3, \tag{125}$$

а с учетом равенства (24) и того факта, что $E(\vec{r},t) = \Theta(t)E(\vec{r},t)$, из формулы (125) следует что

$$H(\vec{r},t) = E(\vec{r},t) - E(-\vec{r}, -t), \quad t \in R, \vec{r} \in R^3, \tag{126}$$

где $E(\vec{r},t) \in V^+$ – фундаментальное решение Коши оператора $L(D)$.

Замечание 9. Равенство (126) можно считать новым определением распределения $H(\vec{r},t)$ (наравне с формулой (124)). Кроме того, объединяя (126) с равенствами (120), (44) и (46), получаем что:
$$H(\vec{r},t) = (4\pi t)^{-1} \cdot \delta(x - u_1)\,, \quad \vec{r} \in R^3, t \in R \tag{127}$$

при $|a_3| + |b_3| = 0$, здесь $\delta(\cdot) \in S'(R)$ – "одномерная" дельта-функция Дирака, и

$$H(\vec{r},t) = (3^{1/3} 4t |u_3|^{1/3})^{-1} \cdot \mathrm{Ai}[(x - u_1)(3u_3)^{-1/3}], \quad \vec{r} \in R^3, t \in R \tag{128}$$

при $|a_3| + |b_3| > 0$; функции u_1 и u_3 определены равенством (50). ■

Из равенств (126), (41), (42) и (71), (72) следует что

$$(P(D_x)H)|_{t=+0} = (P(D_x)H)|_{t=-0} = \delta(\vec{r})\,, \quad \vec{r} \in R^3, \tag{129}$$

отсюда, учитывая условие (115), получаем что распределение $H(\vec{r},t) \in V$, и что

$$H(\vec{r},t) = \begin{cases} o(1), & x \to \pm\infty, r \to +\infty, \quad t \neq 0, \\ o(1), & \qquad\qquad r \to +\infty, \quad t = 0. \end{cases} \tag{130}$$

Наконец, объединяя равенства (124), (119) и (43), получаем что в классе $S'(R^4)$ распределение $H(\vec{r},t)$ удовлетворяет уравнению:

$$L(D)H(\vec{r},t) = 0\,, \quad (\vec{r},t) \in R^4\,. \tag{131}$$

Рассмотрим еще одно важное распределение: $G(\vec{r},t) = P(D_x)H(\vec{r},t)$, которое, в силу равенств (121), (124) и (126), может также быть определено и иными способами:

$$G(\vec{r},t) = (2\pi)^{-3} \int\limits_{R^3} \exp(-tR(\vec{\rho}))\, \exp(i\vec{r} \cdot \vec{\rho})\, d\vec{\rho}, \quad \vec{r} \in R^3,\, t \in R \tag{132}$$

или
$$\begin{aligned} G(\vec{r},t) &= (P(D_x)E)(\vec{r},t) + (P(D_x)E)(-\vec{r}, -t) = \\ &= G^+(\vec{r},t) + G^+(-\vec{r}, -t), \quad \vec{r} \in R^3,\, t \in R\,, \end{aligned} \tag{133}$$

где распределение $G^+ \in V^+$ определено равенством (105).

Из равенств (127) – (131) следует что

$$L(D)G(\vec{r},t) = 0\,, \quad (\vec{r},t) \in R^4\,, \tag{134}$$

$$G|_{t=+0} = G|_{t=-0} = \delta(\vec{r})\,, \quad \vec{r} \in R^3, \tag{135}$$

$$G(\vec{r},t) = o(1)\,, \quad x \to \pm\infty, r \to +\infty\,. \tag{136}$$

и, кроме того (см. формулу (116)):

$$(h'(\cdot) * G(\cdot,t))(\vec{r}) = 0\,, \quad (\vec{r},t) \in R^4 \tag{137}$$

для всех $h' \in S'(R^3)$, таких что $P(D_x)h'(\vec{r}) = 0$.

Обозначая через $\widehat{H}(\vec{\rho},t), \widehat{G}(\vec{\rho},t) = P(i\xi)\widehat{H}(\vec{\rho},t)$ и фиксируя произвольные числа $t_1, t_2 \in R$, из формул (124), (132) получаем что

$$\begin{aligned} \widehat{H}(\vec{\rho}, t_1 + t_2) &= (P(i\xi))^{-1} \exp[-(t_1 + t_2)R(\vec{\rho})] = \\ &= (P(i\xi))^{-1} \exp[-t_1 R(\vec{\rho})] \cdot \exp[-t_2 R(\vec{\rho})] = \\ &= \widehat{H}(\vec{\rho},t_1)\widehat{G}(\vec{\rho},t_2)\,, \end{aligned}$$

откуда, применением обратное преобразование Фурье немедленно устанавливаем справедливость *группового свойства* для распределения $H(\vec{r},t) \in V$ и всех его производных (в том числе и для распределения $G(\vec{r},t) \in V$):

$$H(\vec{r}, t_1 + t_2) = (H(\cdot, t_1) * G(\cdot, t_2))(\vec{r}), \quad \forall\, t_1,t_2 \in R, \quad \vec{r} \in R^3\,, \tag{138}$$

$$\begin{aligned} &P_0(D_{\vec{r}})H(\vec{r}, t_1 + t_2) = \\ &= (P_0(D_{\vec{r}})H(\cdot, t_1) * G(\cdot, t_2))(\vec{r}), \quad \forall\, t_1,t_2 \in R, \quad \vec{r} \in R^3\,, \end{aligned} \tag{139}$$

где $P_0(D_{\vec{r}})$ – произвольный дифференциальный полином.

Рассмотрим в классе V задачу:

$$L(D)v(\vec{r},t) = 0\,, \quad (\vec{r},t) \in R^4, \tag{140}$$

$$v(\vec{r},t) = o(1)\,, \quad \vec{r} = \sqrt{y^2 + z^2} \to +\infty, t \in R. \tag{141}$$

Фиксируя произвольное нетривиальное решение $v(\vec{r},t)$ задачи (140), (141), положим (см. формулу (119)):

$$g(\vec{r}) = \lim_{t=+0}(P(D_x)v)(\vec{r},t) = \lim_{t=-0}(P(D_x)v)(\vec{r},t), \tag{142}$$

где (см. Замечание 8 и формулу (118)) распределение $g \in S'_P(R^3)$ и удовлетворяет равенству

$$g(\vec{r}) = o(1)\,, \quad \vec{r} = \sqrt{y^2 + z^2} \to +\infty. \tag{143}$$

Из равенств (129) – (131), (138) и (143) немедленно следует справедливость следующего утверждения:

Лемма 7. *Распределение $v(\vec{r},t) \in V$, определенное равенством*

$$v(\vec{r},t) = (g(\cdot) * H(\cdot,t))(\vec{r}), \quad (\vec{r},t) \in R^4, \tag{144}$$

где распределение $H(\vec{r},t) \in V$ удовлетворяет задаче (140), (141), равенству (142) и групповому свойству:

$$v(\vec{r},t_1 + t_2) = (v(\cdot,t_1) * G(\cdot,t_2))(\vec{r}), \quad \forall t_1,t_2 \in r, \vec{r} \in R^3, \tag{145}$$

где распределение $G(\vec{r},t) \in V$ определено равенством (132) или (133).

Возникает естественный вопрос: является ли распределение $v(\vec{r},t) \in V$, определенное равенством (144) *единственным* решением задачи (140) – (142)?

Ответ на этот вопрос положителен. Действительно, пусть $v'(\vec{r},t) \in V$ – другое решение задачи (140) – (142). Положим $w(\vec{r},t) = v(\vec{r},t) + v'(\vec{r},t)$, и пусть $w^+(\vec{r},t) = \theta(t)w(\vec{r},t), w^-(\vec{r},t) = \theta(-t)w(\vec{r},t))$, тогда распределения $w^+(\vec{r},t)$ и $w^-(\vec{r},t)$ будут удовлетворять соответственно в классах V^+ и V^- следующим задачам Коши:

$$\begin{cases} L(D)w^+(\vec{r},t) = 0, \quad t > 0, \vec{r} \in R^3, \\ (P(D_x)w^+)|_{t=+0} = 0, \quad \vec{r} \in R^3, \\ w^+(\vec{r},t) = o(1), \quad \vec{r} \to \infty, \end{cases} \tag{146}$$

и

$$\begin{cases} L(D)w^-(\vec{r},t) = 0, \quad t < 0, \vec{r} \in R^3, \\ (P(D_x)w^-)|_{t=-0} = 0, \quad \vec{r} \in R^3, \\ w^-(\vec{r},t) = o(1), \quad \vec{r} \to \infty. \end{cases} \tag{147}$$

В силу Теоремы 1 задача (146) имеет лишь тривиальное решение. Далее, повторяя для задачи (147) рассуждения, аналогичные тем, что были использованы при доказательстве Теоремы 1, получаем что и $w^- = 0$ в V^-, откуда следует что $w = 0$ в $S'(R^4)$.

Замечание 10. Убедиться в единственности восстановления с помощью формулы (144) решения $v(\vec{r},t) \in V$ задачи (140), (141) по условию (142) можно и другим способом: достаточно лишь заметить, что при наличии ограничения (120) (и, как следствие, выполнения соотношений (122), (123)) равенство (117) (см. Замечание 8) может быть продолжено и на $t < 0$ простой заменой распределения $E(\vec{r},t)$ на $H(\vec{r},t)$.

Кроме того (см. Замечание 7), меняя в равенстве (113) распределение $G^{+}(\vec{r},t)$ на $G(\vec{r},t)$, можно получить еще два представления решения $v(\vec{r},t) \in V$ задачи (140), (141):

$$v(\vec{r},t) = (f_{+}(\cdot) * G(\cdot,t))(\vec{r}), \quad (\vec{r},t) \in R^4, \tag{148}$$

или

$$v(\vec{r},t) = (f_{-}(\cdot) * G(\cdot,t))(\vec{r}), \quad (\vec{r},t) \in R^4, \tag{149}$$

где распределения $h_{\pm}(\vec{r}) \in S'(R^3)$ определяются равенствами:

$$h_{+}(\vec{r}) = (S') \lim_{t \to +0} v(\vec{r},t), \quad h_{-}(\vec{r}) = (S') \lim_{t \to -0} v(\vec{r},t), \quad \vec{r} \in R^3. \tag{150}$$

При этом представления (148), (150) и (149), (150): 1) эквивалентны друг другу, поскольку распределения $h_{+}(\vec{r})$) и $h_{-}(\vec{r})$) в силу определения класса V могут различаться между собой (см. формулу (119)) лишь на аддитивную компоненту $h'(\vec{r})$, входящую (см. равенство (137)) в ядро оператора $(*G)$; 2) эквивалентны представлению (144), (142). ■

Таким образом, доказано следующие утверждение:

Теорема 5. *Всякое решение $v \in V$ задачи (140), (141) обладает групповым свойством (145).*

Определение 3. Распределение $G \in V$ определенное равенством (133), будем называть *генератором группы* сдвигов по переменной $t \in R$ решений $v(\vec{r}.t) \in V$ однородного уравнения (140) с условием (140). ■

Вернемся теперь к задачам: – (108), (29), – (108), (30) и (108), (31) с ограничением (97). Продолжим их решения $u(\vec{r},t) \in V^{+}$ на $\{t < 0\}$ до решений $v(\vec{r},t) \in V$ задачи (140), (141), заменив в формулах (109) – (111) распределение $E(\vec{r},t) \in V^{+}$ на $H(\vec{r},t) \in V$:

$$v(\vec{r},t) = (h(\cdot) * P(D_x)H(\cdot,t))(\vec{r}), \quad t \in R, \vec{r} \in R^3, \tag{151}$$

$$v(\vec{r},t) = (h(\cdot) * H(\cdot,t))(\vec{r}), \quad t \in R, \vec{r} \in R^3, \tag{152}$$

$$v(\vec{r},t) = (h(\cdot) * P_2(D_x)H(\cdot,t))(\vec{r}), \quad t \in R, \vec{r} \in R^3. \tag{153}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение:

Теорема 6. *При ограничении (120) время t в уравнении (108) обратимо. Решения $u(\vec{r},t) \in V^{+}$ задач Коши (108), (29), – (108), (30) и (108), (31) с условием (97) могут быть продолжены (причем – однозначным образом) до распределений $v(\vec{r},t) \in V$, удовлетворяющих задаче (140), (141) с помощью равенств (151) - (153). Кроме того, распределения $v(\vec{r},t)$ удовлетворяют групповому свойству (144).*

Замечание 11. Из Теоремы 6 следует, что условие (120) является *достаточным* для обратимости времени в уравнении (108). В то же время анализ формул (62), (67) показывает, что это же условие является и *необходимым.* Подтверждением этому могут служить примеры, приведенные в Замечании 6. Действительно, условию (120) удовлетворяют операторы $L(D)$, определенные равенствами (78), (80), (91) и (95), и не удовлетворяют – (76), (82), (85), (89) и (93). В первом случае соответствующие фундаментальные решения Коши $E(\vec{r},t)$ (см. формулы (79), (81), (92) и (96)) допускают обращение времени t, а во втором случае (см. формулы (77), (83), (84), (86), (87), (89), (90) и (94)) – нет.

Есть и простое физическое объяснение этого факта: обратимость времени возможна лишь в тех процессах, где отсутствуют диссипативные факторы. ■

5. ФОКУСИРОВКА РЕШЕНИЙ

Предполагая, как и в предыдущем разделе, выполнение ограничения (120), в заключение рассмотрим важный в плане физических приложений вопрос о *фокусировке решений* задачи Коши для однородного уравнения (108). Этот вопрос тесно связан с другим вопросом – об эволюции волновых фронтов распределения $G(\vec{r},t)$, определенного равенством (133). Из Следствия 2 (см. формулы (72) – (75)) получаем что:

(i) при $a_3 = b_3 = 0$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}(G) = \operatorname{sing\,supp}(G) = \\ &= \{\vec{r} \in R^3 \,|\, x = b_1 t + a_1 r_c^2/(4t), r_c \geqslant 0, t \in R\}, \end{aligned} \tag{154}$$

т.е., распределение $G(\cdot,t)$ *не является регулярным* ни при каких $t \in R$;

(ii) при $a_3 \neq 0, b_3 = 0$:

$$\operatorname{sing\,supp}(G) = \{\vec{r} \in R^3 \,|\, x = b_1 t, r_c = 0,\, t \in R\}, \tag{155}$$

причем $G(\cdot,t) \in L_1^{loc}(R^3)$ при всех $t \neq 0$;

(iii) при $a_3 \cdot b_3 < 0$:

$$\begin{aligned} &\operatorname{sing\,supp}(G) = \\ &= \{\vec{r} \in R^3 \,|\, x = ((a_3 b_1 - a_1 b_3)/a_3)t, r_c = 2(-b_3/a_3)^{1/2} t, t \in R\}, \end{aligned} \tag{156}$$

причем $G(\cdot,t) \in L_1^{loc}(R^3)$ при всех $t \neq 0$;

(iv) при $a_3 = 0, b_3 \neq 0$ или при $a_3 \cdot b_3 > 0$:

$$\operatorname{sing\,supp}(E) = \varnothing, \quad t > 0\,, \tag{157}$$

т. е., $G(\cdot,t) \in L_1^{loc}(R^3) \cap C^\infty(R^3)$ при всех $t \neq 0$. (Напомним, что $r_c = \sqrt{(y - c_y t)^2 + (z - c_z t)^2}$.)

Сформулируем *задачу о фокусировке решения:*

Пусть $u(\vec{r},t) \in V$ – решение задачи

$$\left\{ \begin{array}{l} L(D)u(\vec{r},t) = 0, \quad t > 0, \vec{r} \in R^3, \\ u|_{t=+0} = h(\vec{r}), \quad \vec{r} \in R^3, \\ u(\vec{r},t) = o(1), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2} \to +\infty, \end{array} \right. \tag{158}$$

причем

$$h(\vec{r}) \in S'(R^3) \cap L_1^{loc}(R^3). \tag{159}$$

Для любых заранее заданных момента времени $t_0 > 0$ и точки $\vec{r}_0 \in R^3$ требуется подобрать распределение $h(\vec{r},t)$ таким образом, чтобы выполнялось бы соотношение:

$$u|_{t=t_0} = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \tag{160}$$

где $\delta(\cdot) \in S'(R^3)$ – "трехмерная" дельта-функция Дирака.

1). Пусть $|a_3| + |b_3| > 0$. Положим:

$$h(\vec{r}) = G(\vec{r} - \vec{r}_0, -t_0)\,, \quad \vec{r} \in R^3, \tag{161}$$

где распределение $G \in V$ определено равенством (133).

В силу равенств (134), (136) и Теоремы 1 распределение

$$u(\vec{r},t) = G(\vec{r} - \vec{r}_0, t - t_0) \quad \vec{r} \in R^3, t > 0. \tag{162}$$

является единственным решением задачи (158), а также (см. формулы (155) – (157) и комментарии к ним) удовлетворяет требованию (159). Наконец, из формул (135), (161) следует выполнение равенства (160).

2). Пусть теперь $a_3 = a_3 = 0$. Теперь уже (см. формулу (154) и комментарии к ней) распределение $u(\vec{r},t)$ из равенства (161) *не удовлетворяет* требованию (159). Однако если ослабить последнее, заменив его на требование: $\operatorname{supp}(h)$ *должен содержать более одной точки* $\vec{r} \in R^3$, то и в этом случае задача о фокусировке решения оказывается разрешимой.

3). Пусть, наконец, $a_3 = 0, b_3 \neq 0$ или $a_3 \cdot b_3 > 0$. В этом случае требование (159) можно *усилить*, потребовав (см. формулу (157) и комментарии к ней):

$$h(\vec{r}) \in S'(R^3) \cap C^\infty(R^3). \tag{159'}$$

Замечания. 12. Возникает вопрос: а может ли в случаях $a_3 = 0, b_3 \neq 0$ или $a_3 \cdot b_3 > 0$ решение $u(\vec{r},t) \in V$ задачи (158) иметь целую *линию* разрывов? Ответ и на этот вопрос положителен. Пусть $\Gamma \subset \bar{R}^4_+$ – кусочно-гладкая кривая (конечной или бесконечной длины) и $\{\vec{r} = \vec{r}\,'(t), t = t' | \, t' \in \bar{R}_+\}$ – ее параметризация. Пусть, далее, $\mu(t)$ – функция класса $C^\infty(\bar{R}_+)$, такая что $||\mu||_1 < +\infty$. Заменим распределение $h(\vec{r})$ из равенства (161) на

$$h(\vec{r}) = \int\limits_0^{+\infty} \mu(t')G(\vec{r} - \vec{r}\,'(t'), -t')\,dt', \quad \vec{r} \in R^3. \tag{163}$$

Очевидно, распределение

$$u(\vec{r},t) = \int\limits_0^{+\infty} \mu(t')G(\vec{r} - \vec{r}\,'(t'), t - t')\,dt', \quad \vec{r} \in R^3, t > 0 \tag{164}$$

является в классе V^+ единственным решением задачи (158), (163), а кривая Γ – линией его разрывов (причем – *заранее заданной*).

13. Ранее эффект фокусировки решений для некоторых частных случаев уравнения (1) был установлен в работах [8] и [11]. ■

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kako, M. Two dimensional stability of ion acoustic solitons / M. Kako, G. Rowlands // Plasma Physics. — 1976. — V. 18. — P. 165–170.

2. Буллаф, Р. Солитоны / Р. Буллаф, Ф. Кодри. — М. : Мир, 1983. — 408 с.

3. Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. — М. : Мир, 1988. — 694 с.

4. Кадомцев, Б. Б. Коллективные явления в плазме / Б. Б. Кадомцев. — М. : Наука, 1988. — 304 с.

5. Демиденко, Г. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной / Г. В. Демиденко, С. В. Успенский. — Новосибирск : Научная книга, 1998. — 438 с.

6. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. — М. : Издательство иностранной литературы, 1956. — 528 с.

7. Засорин, Ю. В. Точные решения некоторых задач, описываемых нестационарными вязкими трансзвуковыми уравнениями / Ю. В. Засорин // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1994. — Т. 34, № 10. — С. 1446–1488.

8. Засорин, Ю. В. Точные решения пространственного уравнения Кадомцева-Петвиашвили / Ю. В. Засорин, М. В. Придущенко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2002. — № 2. — С. 133–136.

9. Засорин, Ю. В. О редукции некоторых классов уравнений в частных производных к уравнениям с меньшим числом переменных и точные решения / Ю. В. Засорин // Сиб. мат. журнал. — 2006. — Т. 47, № 4. — С. 782–797.

10. Засорин, Ю. В. Фундаментальные решения для уравнений в частных производных высших порядков: исторический обзор и современные результаты / Ю. В. Засорин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2003. — № 1. — С. 123–127.

11. Засорин, Ю. В. О некоторых свойствах решений двух уравнений, связанных с ионизационными процессами в плазме. / Ю. В. Засорин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2004. — № 2. — С. 162–166.

12. Засорин, Ю. В. Асимптотические и полугрупповые свойства решения задачи Коши для одного уравнения математической физики / Ю. В. Засорин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2005. — № 1. — С. 171–173.

13. Засорин, Ю. В. О связи фундаментальных решений Коши некоторых классов нестационарных уравнений в частных производных с одномерными нестационарными уравнениями / Ю. В. Засорин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2005. — № 2. — С. 156–159.

14. Засорин, Ю. В. Корректная разрешимость задач Коши, связанных с некоторыми дисперсионно-диссипативными моделями / Ю. В. Засорин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2006. — № 2. — С. 204–205.

15. Хёрмандер, Л. Линейные дифференциальные операторы с частными производными / Л. Хёрмандер. — М. : Мир, 1965. — 379 с.

16. Олвер, Ф. Асимптотика и специальные функции / Ф. Олвер. — М. : Наука, 1990. — 528 с.

17. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1974. — 295 с.

18. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразование Бесселя. Преобразование Фурье, Лапласа, Меллина / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1969. — 344 с.

19. Бейтмен, Г. Таблицы интегральных преобразований. Т. 2. Преобразование Бесселя. Интегралы от специальных функций / Г. Бейтмен, А. Эрдейи. — М. : Наука, 1970. — 328 с.

REFERENCES

1. Kako M., Rowlands G. Two dimensional stability of ion acoustic solitons. Plasma Physics, 1976. vol. 18, pp. 165–170.

2. Bullough R.K., Caudrey P.J. Solitons. [Bullaf R., Kodri F. Solitony]. Moscow: Mir, 1983, 408 p.

3. Dodd R., Eilbeck J., Gibbon J., Morris H. Solitons and nonlinear wave equations. [Dodd R., Eyjlbek Dzh., Gibbon Dzh., Morris X. Solitony i nelineyjnye volnovye uravneniya]. Moscow: Mir, 1988, 694 p.

4. Kadomtsev B.B. Collective phenomena in plasma. [Kadomcev B.B. Kollektivnye yavleniya v plazme]. Moscow, 1988, 304 p.

5. Demidenko G.V., Uspenskiy S.V. Equations and systems not resolved with respect to the higher derivative. [Demidenko G.V., Uspenskiyj S.V. Uravneniya i sistemy, ne razreshennye otnositel'no starsheyj proizvodnoyj]. Novosibirsk, 1998, 438 p.

6. Schlichting G. Boundary layer theory. [Shlixting G. Teoriya pogranichnogo sloya]. Moscow, 1956, 528 p.

7. Zasorin Yu.V. Exact solutions of some problems described by unsteady viscous transonic equations. [Zasorin Yu.V. Tochnye resheniya nekotoryx zadach, opisyvaemyx nestacionarnymi

vyazkimi transzvukovymi uravneniyami]. *Zhurnal vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki — Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1994, vol. 34, no. 10, pp. 1446–1488.

8. Zasorin Yu.V., Pridushchenko M.V. About exact solutions for 3d Kadomtsev-Petviashvily equation. [Zasorin Yu.V., Pridushhenko M.V. Tochnye resheniya prostranstvennogo uravneniya Kadomceva-Petviashvili]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2002, no. 2, pp. 133–136.

9. Zasorin Yu.V. On the reduction of some classes of partial differential equations to equations with fewer variables and exact solutions. [Zasorin Yu.V. O redukcii nekotoryx klassov uravneniyj v chastnyx proizvodnyx k uravneniyam s men'shim chislom peremennyx i tochnye resheniya]. *Sibirskij matematicheskij zhurnal — Siberian Mathematical Journal*, 2006, vol. 47, no. 4, pp. 782–797.

10. Zasorin Yu.V. Fundamental solutions for partial differential equations of higher orders: the historical review and modern results. [Zasorin Yu.V. Fundamental'nye resheniya dlya uravneniyj v chastnyx proizvodnyx vysshix poryadkov: istoricheskiyj obzor i sovremennye rezul'taty]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2003, no. 1, pp. 123–127.

11. Zasorin Yu.V. On some properties of solutions for two equations connected with spatial models of ionized processes. [Zasorin Yu.V. O nekotoryx svoyjstvax resheniyj dvux uravneniyj, svyazannyx s ionizacionnymi processami v plazme]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2004, no. 2, pp. 162–166.

12. Zasorin Yu.V. Asymptotical and semigroup properties of Cauchy problem solution for one equation of mathematical physics. [Zasorin Yu.V. Asimptoticheskie i polugruppovye svoyjstva resheniya zadachi Koshi dlya odnogo uravneniya matematicheskoyj fiziki]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2005, no. 1, pp. 171–173.

13. Zasorin Yu.V. On connection of Cauchy fundamental solutions for some classes of non-stationary partial differential equations with simple id non-stationary equations. [Zasorin Yu.V. O svyazi fundamental'nyx resheniyj Koshi nekotoryx klassov nestacionarnyx uravneniyj v chastnyx proizvodnyx s odnomernymi nestacionarnymi uravneniyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2005, no. 2, pp. 156–159.

14. Zasorin Yu.V. On the correct solvability of the Cauchy problem connected with some dispertional and dissipative models. [Zasorin Yu.V. Korrektnaya razreshimost' zadach Koshi, svyazannyx s nekotorymi dispersionno-dissipativnymi modelyami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2006, no. 2, pp. 204–205.

15. Hermander L. Linear partial differential operators. [Xyormander L. Lineyjnye differencial'nye operatory s chastnymi proizvodnymi]. Moscow: Mir, 1965, 379 p.

16. Olver F. Asymptotics and special functions. [Olver F. Asimptotika i special'nye funkcii]. Moscow, 1990, 528 p.

17. Bateman G., Erdelyi A. Higher transcendental functions. Vol. 2. Bessel functions, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials. [Beyjtmen G., Erdeyji A. Vysshie transcendentnye funkcii. T. 2. Funkcii Besselya, funkcii parabolicheskogo cilindra, ortogonal'nye mnogochleny]. Moscow, 1974, 295 p.

18. Bateman G., Erdelyi A. Tables of integral transformations. Vol. 1. Bessel Transformation. Fourier transformation, Laplace, Mellina. [Beyjtmen G., Erdeyji A. Tablicy integral'nyx

preobrazovaniyj. T. 1. Preobrazovanie Besselya. Preobrazovanie Fur'e, Laplasa, Mellina]. Moscow, 1969, 344 p.

19. Bateman G., Erdelyi A. Tables of integral transformations. Vol. 2. Bessel Transformation. Integrals of special functions. [Beyjtmen G., Erdeyji A. Tablicy integral'nyx preobrazovaniyj. T. 2. Preobrazovanie Besselya. Integraly ot special'nyx funkciyj]. Moscow, 1970, 328 p.

Засорин Юрий Валентинович, доцент, к.ф.-м.н., Воронежский госуниверситет, факультет прикладной математики и механики, Воронеж, Россия
E-mail: york-york-york-1960@yandex.ru
Тел.: +7(4732)220–83–48

Zasorin Yuriy Valentinovich, Assistant Professor, Research Institute of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: york-york-york-1960@yandex.ru
Tel.: +7(4732)220–83–48