УДК 517.977

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ ОДНОГО «SWEEPING» ПРОЦЕССА

Н. И. Восковская

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 29.01.2017 г.

Аннотация. Данная статья посвящена так называемым «sweeping» процессам, которые играют важную роль в эластопластике, квазистатике и динамике. В работе рассматривается следующий «sweeping» процесс: эллипс, заданный уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$, содержащий внутри себя или на границе точку, движется вдоль своей большой оси, принадлежащей оси абсцисс, по периодическому закону. Целью данной статьи является изучение устойчивости решения такого «sweeping» процесса. В работе доказывается, что единственное периодическое решение этого «sweeping» процесса является глобально устойчивым.

Ключевые слова: эллипс, «sweeping» процесс, устойчивость.

ON STABILITY OF PERIODIC SOLUTION OF ONE «SWEEPING» PROCESS

N. I. Voskovskaya

Abstract. This paper is dedicated to the so-called «sweeping» process that plays an important role in elastoplasticity, quasistatics and dynamics. In this paper we consider the following «sweeping» process: an ellipse described by the equation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$, moves by a periodic law along its major axis, which lays at abscissa axis. The ellipse contains a point inside or on its boundary and this point follows its movement. The purpose of the paper is to study the stability of solutions of this «sweeping» process.

We prove that unique periodic solution of this «sweeping» process is globally stable.

Keywords: ellipse, «sweeping» process, stability.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [4] был рассмотрен следующий «sweeping» процесс: Пусть C — непустое замкнутое выпуклое множество, границей которого является эллипс, определяемый уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $a>b$. Множество C движется, закон движения этого множества будем обозначать функцией $C(t)$, которая определяется следующим образом: эллипс движется вдоль своей большой оси, принадлежащей оси абсцисс, по закону, определяемому движением его центра $O(t)=(x(t),0)$, где $x(t)$ — T-периодическая функция, имеющая следующий вид:

$$x(t)=\begin{cases} x=Lt, & \text{при } t\in[0,\frac{T}{4}],\\ x=-L(t-\frac{T}{2}), & \text{при } t\in(\frac{T}{4},\frac{3T}{4}),\\ x=L(t-T), & \text{при } t\in[\frac{3T}{4},T]. \end{cases} \tag{1}$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ центр эллипса $O(t_0)$ находится в точке (0,0). Центр эллипса движется по отрезку $[XY]$, где точка $X = (x(\frac{3T}{4}),0)$, а точка $Y = (x(\frac{T}{4}),0)$. Предположим, что $|O(t_0)X| = |O(t_0)Y| = 2a$, то есть

$$L = \frac{8a}{T} \tag{2}$$

В начальный момент времени $t_0 = 0$ внутри или на границе множества C находится точка A. Будем обозначать функцией $u(t)$ решение данного «sweeping» процесса для точки A, которое определяется следующим образом:

Определение 1. (см. [1]) Функция $u(t)$ при $t \in [0,H]$ называется решением «sweeping» процесса, если:

1) u удовлетворяет начальному условию $u(0) = u_0$, где u_0 – некоторый элемент, принадлежащий $C(0)$ (u_0 - координаты точки A);

2) $u(t) \in C(t)$ при всех $t \in [0,H]$;

3) функция u дифференцируема почти всюду на отрезке $[0,H]$;

4) $-u'(t) \in N_{C(t)}(u(t))$ почти при всех $t \in [0,H]$; где $N_C(x)$ — внешний нормальный конус множества C в точке x.

В работе [4] нами было исследовано решение описанного «sweeping» процесса для различных начальных значений точки A, лежащей внутри или на границе эллипса.

В настоящей работе будем рассматривать два решения $\widetilde{u}(t)$ и $u(t)$ такого «sweeping» процесса с начальными значениями $\widetilde{u}(0) = (-a,0)$ и $u(0) = (v_0,h_0)$, для которого $v_0 \neq -a$ и верно следующее неравенство:

$$\frac{y_0^2}{a^2} + \frac{h_0^2}{b^2} \leqslant 1$$

В настоящей работе будет доказана глобальная устойчивость периодического решения $\widetilde{u}(t)$, которое имеет вид

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} (x(t) - a,0), & \text{при } t \in [0,\frac{T}{4}), \\ (a,0), & \text{при } t \in [\frac{T}{4},\frac{T}{2}], \\ (x(t) + a,0), & \text{при } t \in (\frac{T}{2},\frac{3T}{4}), \\ (-a,0), & \text{при } t \in [\frac{3T}{4},T]. \end{cases}$$

то есть, что при $t \to \infty$ выполняется $|u(t) - \widetilde{u}(t)| \to 0$ для любого решения $u(t)$.

Статья организованна следующим образом: в первой части приведены результаты из работ [1], [4], которые необходимы для доказательства устойчивости периодического решения $\widetilde{u}(t)$. Во второй части приведена формулировка теоремы, доказательство которой и является целью данной статьи. В третьей части, непосредственно, приводятся само доказательство.

1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ФАКТЫ

Из работы [4] известно следующее:

1) Решения $u(t)$ и $\widetilde{u}(t)$ существуют и единственны;

2) Функция $\widetilde{u}(t)$ является T-периодической, принадлежит отрезку $[XY]$ и имеет следующий вид:

$$\widetilde{u}(t) = \begin{cases} (x(t) - a,0), & \text{при } t \in [0,\frac{T}{4}), \\ (a,0), & \text{при } t \in [\frac{T}{4},\frac{T}{2}], \\ (x(t) + a,0), & \text{при } t \in (\frac{T}{2},\frac{3T}{4}), \\ (-a,0), & \text{при } t \in [\frac{3T}{4},T]. \end{cases} \tag{3}$$

3) Для решения $u(t)$ с начальными условиями $u(0) = (v_0,h_0)$, где $h_0 \neq 0$ справедливо следующее соотношение:

$$\frac{h_{i+1}}{h_i} < e^{-\frac{a\Delta}{2b^2}} \tag{4}$$

где h_i и h_{i+1} — расстояния от точки A до оси абсцисс в моменты времени t_i и t_{i+1} соответственно, где t_i и t_{i+1} принадлежат, одновременно, одному из промежутков времени $[nT,\frac{T}{4}+nT]$, $[\frac{T}{4}+nT,\frac{3T}{4}+nT]$ или $[\frac{3T}{4}+nT,(n+1)T]$ $(n = 0,1,2,\ldots)$, а $\Delta = |x(t_{i+1}) - x(t_i)|$.

4) Для решения $u(t)$ с начальными условиями $u(0) = (v_0,0)$, где $v_0 \neq -a$ при $t \leqslant T$ справедливо $u(t) = \widetilde{u}(t)$.

Также нам понадобится следующий результат:

Утверждение: (см. следствие 1 из [1]) Пусть при всех $t \in [0,H]$ множество $C(t)$ — непустое, замкнутое, выпуклое множество и пусть $y(t)$ с $y(t_0) = y_0$ и $\widetilde{y}(t)$ с $\widetilde{y}(t_0) = \widetilde{y}_0$ два различных решения такого «sweeping» процесса. Тогда верно следующее:

$$|y(t) - \widetilde{y}(t)| \leqslant |y_0 - \widetilde{y}_0|, t \in [0,H].$$

2. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРЕМЫ

Сформулируем теорему об устойчивости периодического решения для описанного выше «sweeping» процесса.

Теорема: Пусть при всех $t \in [0,\infty)$ для множества $C(t)$, описанного выше, $\widetilde{u}(t)$ с начальным условием $\widetilde{u}(t_0) = (-a,0)$ и $u(t)$ с начальным условием $u(t_0) = (v_0,h_0)$, для которого $v_0 \neq -a$ и верно неравенство $\frac{v_0^2}{a^2} + \frac{h_0^2}{b^2} \leqslant 1$, два решения такого «sweeping» процесса. Тогда периодическое решение $\widetilde{u}(t)$, имеющее вид (3), глобально устойчиво, то есть при $t \to \infty$ выполняется следующее:

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \to 0$$

для любого решения $u(t)$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Мы знаем, что решения $u(t)$ и $\widetilde{u}(t)$ существуют и единственны, причем что решение $\widetilde{u}(t)$ является T-периодическим и имеет вид (3).

1. Рассмотрим решение $u(t)$ с начальным условием $u(t_0) = (v_0,h_0)$, которое лежит на эллипсе и для которого $v_0 > 0$, $h_0 \neq 0$ (рис. 1).

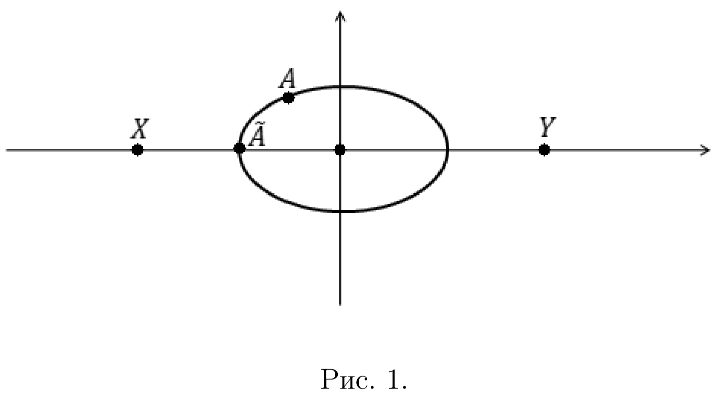

Рис. 1.

Рассмотрим отрезок времени $[0,\frac{T}{4}]$. Здесь $\Delta = |x(0) - x(\frac{T}{4})| = 2a$. Пусть h_1 — расстояние от точки A до оси абсцисс в момент времени $t = \frac{T}{4}$. По формуле (4) имеем

$$h_1 < e^{-\frac{a\Delta}{2b^2}} h_0 = e^{-\frac{a\cdot 2a}{2b^2}} h_0 = e^{-\frac{a^2}{b^2}} h_0$$

По формуле (3) $\widetilde{u}(\frac{T}{4}) = (a,0)$. Рассмотрим отрезок времени $[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}]$. Как показано в работе [4], вначале данного отрезка времени точки A и $\widetilde{A}$ будут оставаться на месте. Пусть эллипс вновь зацепит точку A в момент времени τ_1. Положим $\Delta_1 = |x(\tau_1) - x(\frac{T}{2})|$. Так как $\tau_1 \in [\frac{T}{4},\frac{T}{2}]$, то по формуле (3) получим $\widetilde{u}(\tau_1) = (a,0)$ (рис. 2).

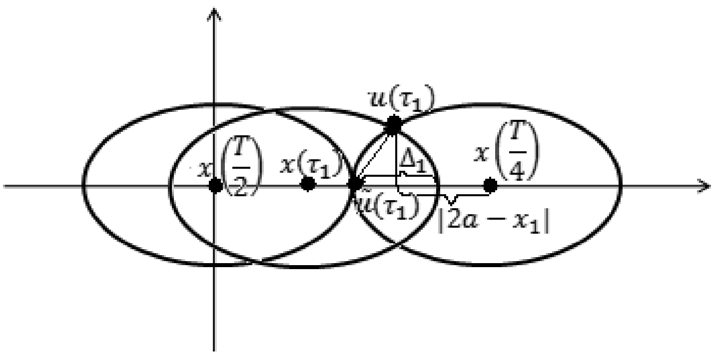

Рис. 2.

Пусть x_1 — абсцисса точки A в момент времени $\frac{T}{4}$, то есть $u(\frac{T}{4}) = (x_1,h_1)$, тогда, для нее, при $t = \frac{T}{4}$, получим равенство:

$$\frac{(x_1-2a)^2}{a^2} + \frac{h_1^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(x_1-2a)^2}{a^2} = 1 - \frac{h_1^2}{b^2},$$

$$(x_1-2a)^2 = a^2\left(1 - \frac{h_1^2}{b^2}\right),$$

$$|x_1-2a| = a\sqrt{1-\frac{h_1^2}{b^2}} > a\sqrt{1-e^{-\frac{2a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}.$$

Далее

$$a - \frac{\Delta_1}{2} = 2a - x_1 = |x_1-2a| > a\sqrt{1-e^{-\frac{2a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}.$$

То есть

$$\frac{\Delta_1}{2} < a\left(1-\sqrt{1-e^{-\frac{2a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}\right).$$

Также, получим

$$|u(\tau_1) - \widetilde{u}(\tau_1)| = \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^2} <$$

$$< \sqrt{e^{-\frac{2a^2}{b^2}}h_0^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{1-e^{-\frac{2a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}} + a^2 - a^2e^{-\frac{2a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{1}{b}\sqrt{e^{-\frac{2a^2}{b^2}}b^2h_0^2 + a^2b^2 - 2a^2b^2\sqrt{1-e^{-\frac{2a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}} + a^2b^2 - a^2e^{-\frac{2a^2}{b^2}}h_0^2} =$$

$$= \frac{1}{b}\sqrt{e^{-\frac{2a^2}{b^2}}h_0^2(b^2-a^2) + 2a^2b^2\left(1-\sqrt{1-e^{-\frac{2a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}\right)} =$$

$$= \frac{1}{b}\sqrt{e^{-\frac{2a^2}{b^2}}h_0^2(b^2-a^2)+2a^2b^2\Delta_1}.$$

Рассмотрим отрезок времени $[\tau_1,\frac{3T}{4}]$. Здесь $\Delta = |x(\tau_1) - x(\frac{3T}{4})| = \Delta_1 + 2a$. Пусть h_2 - расстояние от точки A до оси абсцисс в момент времени $t = \frac{3T}{4}$. По формуле (4) имеем

$$h_2 < e^{-\frac{a\Delta}{2b^2}}h_1 = e^{-\frac{a\Delta_1+2a^2}{2b^2}}h_1 = e^{-\frac{\Delta_1+2a^2}{2b^2}}e^{-\frac{a^2}{b^2}}h_0 = e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{2b^2}}h_0.$$

По формуле (2) $\widetilde{u}(\frac{3T}{4}) = (-a,0)$.

Рассмотрим отрезок времени $[\frac{3T}{4},T]$. Как показано в работе [4], вначале данного отрезка времени точки A и $\widetilde{A}$ будут оставаться на месте. Пусть эллипс вновь зацепит точку A в момент времени τ_2. Так как $\tau_2 \in [\frac{3T}{4},T]$, то по формуле (3) получим $\widetilde{u}(\tau_2) = (-a,0)$. Положим $\Delta_2 = |x(\tau_2) - x(T)|$ (рис. 3).

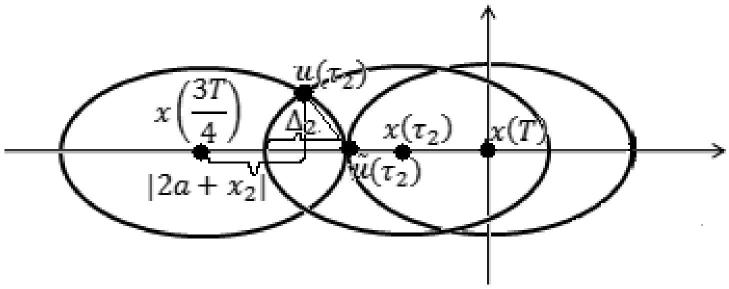

Рис. 3.

Пусть x_2 — абсцисса точки A в момент времени $\frac{3T}{4}$, то есть $u(\frac{3T}{4}) = (x_2,h_2)$, тогда, для нее, при $t = \frac{3T}{4}$, получим равенство:

$$\frac{(x_2+2a)^2}{a^2} + \frac{h_2^2}{b^2} = 1.$$

То есть

$$|x_2+2a| = a\sqrt{1-\frac{h_2^2}{b^2}} > a\sqrt{1-e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}.$$

Далее

$$a - \frac{\Delta_2}{2} = |x_2+2a| > a\sqrt{1-e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}.$$

То есть

$$\frac{\Delta_2}{2} < a\left(1-\sqrt{1-e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}\right).$$

Также, получим

$$|u(\tau_2) - \widetilde{u}(\tau_2)| = \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^2} <$$

$$< \sqrt{e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{b^2}}h_0^2 + a^2 - 2a^2\sqrt{1-e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}} + a^2 - a^2e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}} =$$

$$= \frac{1}{b}\sqrt{e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{b^2}}h_0^2b^2 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2\sqrt{1-e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}} - a^2e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{b^2}}h_0^2} =$$

$$= \frac{1}{b}\sqrt{e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{b^2}}h_0^2(b^2-a^2)+a^2b^2\Delta_2}.$$

Рассмотрим отрезок времени $[\tau_2,\frac{5T}{4}]$. Здесь $\Delta = |x(\tau_2)-x(\frac{5T}{4})| = \Delta_2+2a$. Пусть h_3 — расстояние от точки A до оси абсцисс в данный момент времени. По формуле (4) имеем

$$h_3 < e^{-\frac{a\Delta}{2b^2}}h_2 = e^{-\frac{a\Delta_2-2a^2}{2b^2}}e^{-\frac{a\Delta_1+4a^2}{2b^2}}h_0 = e^{-\frac{a(\Delta_2+\Delta_1)+6a^2}{2b^2}}h_0.$$

По формуле (3) получим $\widetilde{u}(\frac{5T}{4}) = (a,0)$.

Рассмотрим отрезок времени $[\frac{5T}{4},\frac{7T}{4}]$. Как показано в работе [4], вначале данного отрезка времени промежутка точки A и $\widetilde{A}$ будут оставаться на месте. Пусть эллипс вновь зацепит точку A в момент времени τ_3. Так как $\tau_3 \in [\frac{5T}{4},\frac{3T}{2}]$, то по формуле (3) получим $\widetilde{u}(\tau_3) = (a,0)$. Положим $\Delta_3 = |x(\tau_3)-x(\frac{3T}{2})|$. Пусть x_3 — абсцисса точки A в момент времени $\frac{3T}{4}$, то есть $u(\frac{5T}{4}) = (x_3,h_3)$, тогда, для нее, при $t = \frac{5T}{4}$, получим равенство:

$$\frac{(x_3-2a)^2}{a^2}+\frac{h_2^2}{b^2} = 1.$$

То есть

$$|x_3-2a| > a\sqrt{1-e^{-\frac{a(\Delta_2+\Delta_1)+6a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}.$$

Аналогично описанному выше, получим

$$\frac{\Delta_3}{2} < a\left(1-\sqrt{1-e^{-\frac{a(\Delta_2+\Delta_1)+6a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}\right)$$

$$|u(\tau_3)-\widetilde{u}(\tau_3)| = \sqrt{h_3^2+\left(\frac{\Delta_3}{2}\right)^2} < \frac{1}{b}\sqrt{e^{-\frac{a(\Delta_2+\Delta_1)+6a^2}{b^2}}h_0^2(b^2-a^2)+a^2b^2\Delta_3}.$$

Продолжая этот процесс далее, получим, что на n-ом этапе

$$\frac{\Delta_n}{2} < a\left(1-\sqrt{1-e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}\right).$$

Тогда

$$\Delta_n = q\cdot 2a\left(1-\sqrt{1-e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}\right),$$

где $0<q<1$. Также

$$|u(\tau_n)-\widetilde{u}(\tau_n)| < \frac{1}{b}\sqrt{e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}}h_0^2(b^2-a^2)+a^2b^2\Delta_n}.$$

То есть

$$|u(\tau_n)-\widetilde{u}(\tau_n)| = \frac{p}{b}\sqrt{e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}}h_0^2(b^2-a^2)+a^2b^2\Delta_n},$$

где $0<p<1$.

Так как $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\cdots,\Delta_n,\cdots > 0$, то $\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\cdots+\Delta_{n-1}\cdots > 0$ и $\Delta_1>\Delta_2>\Delta_3>\cdots>\Delta_n>\cdots$. Тогда, так как $h_1>h_2>h_3>\cdots>h_n>\cdots$, то

$$\sqrt{h_1^2+\left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^2} > \sqrt{h_2^2+\left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^2} > \cdots > \sqrt{h_n^2+\left(\frac{\Delta_n}{2}\right)^2} > \cdots,$$

то есть

$$|u(\tau_1) - \widetilde{u}(\tau_1)| > |u(\tau_2) - \widetilde{u}(\tau_2)| > \cdots > |u(\tau_n) - \widetilde{u}(\tau_n)| > \cdots .$$

При $n \to \infty$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}} = 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = \lim_{n\to\infty} q \cdot 2a(1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}} \frac{h_0^2}{b^2}} =$$

$$= q \cdot 2a(1 - \sqrt{1-0}) = 0.$$

Рассмотрим рисунок 4.

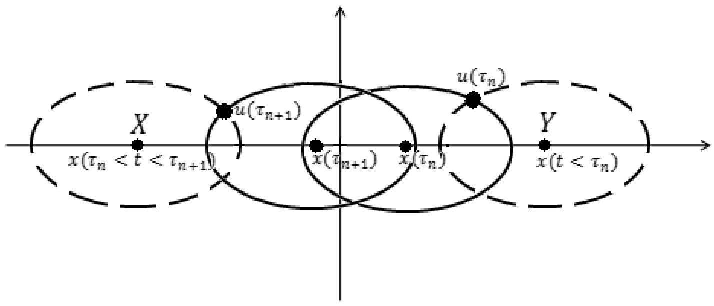

Рис. 4.

Из рисунка 4 видим, что разность $\tau_{n+1} - \tau_n > \frac{T}{4}$. Следовательно, последовательность $\{\tau_n\}$ будет неограниченно возрастать, то есть, $\tau_n \to \infty$. при $n \to \infty$. Тогда, при $\tau_n \to \infty$ получим

$$\lim_{\tau_n\to\infty} |u(\tau_n) - \widetilde{u}(\tau_n)| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{p}{b} \cdot \sqrt{e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}} h_0^2(b^2 - a^2) + a^2b^2\Delta_n} =$$

$$= \frac{p}{b}\sqrt{0 \cdot h_0^2(b^2 - a^2) + a^2b^2 \cdot 0)} = 0.$$

Используя утверждение, приведенное в первой части статьи из работы [1], получим, что в условиях данного «sweeping» процесса, для решений $u(t)$ и $\widetilde{u}(t)$ справедливы следующие оценки:

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(0) - \widetilde{u}(0)| \text{ при } t \in [0,\tau_1],$$

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(\tau_1) - \widetilde{u}(\tau_1)| \text{ при } t \in [\tau_1,\tau_2],$$

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(\tau_2) - \widetilde{u}(\tau_2)| \text{ при } t \in [\tau_2,\tau_3],$$

$$\vdots$$

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(\tau_n) - \widetilde{u}(\tau_n)| \text{ при } t \in [\tau_n,\tau_n],$$

$$\vdots$$

Следовательно, при $t \to \infty$ расстояние $|u(t) - \widetilde{u}(t)|$ не будет превышать расстояния $|u(\tau_n) - \widetilde{u}(\tau_n)|$ при $\tau_n \to \infty$. Но тогда получаем, что при $t \to \infty$ будет $|u(t) - \widetilde{u}(t)| \to 0$.

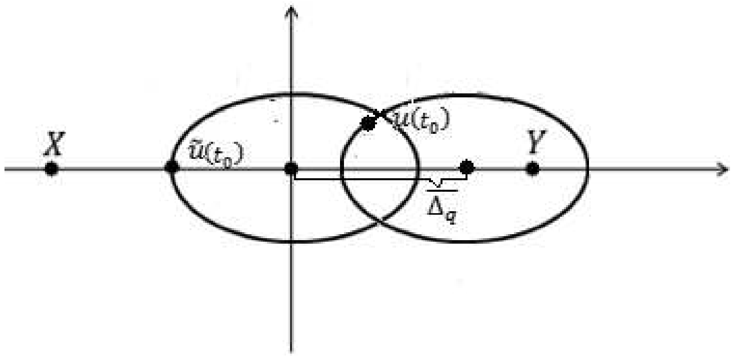

Рис. 5.

2. Рассмотрим решение $u(t)$ с начальными условием $u(t_0) = (v_0,h_0)$, где $h_0 \neq 0$, которое лежит внутри эллипса, то есть, для которого выполняется неравенство $\frac{v_0^2}{a^2}+\frac{h_0^2}{b^2} < 1$. Обозначим через $\overline{\Delta_q}$ расстояние, которое проходит центр эллипса, для которого выполняется следующее условие: $\frac{(v_0-\overline{\Delta_q})^2}{a^2} + \frac{h_0^2}{b^2} = 1$ (рис. 5).

Пусть $\overline{\Delta_q} = Lt_q$, то есть, по формуле (1), t_q — время, за которое центр окружности пройдет расстояние, равное $\overline{\Delta_q}$. Очевидно, что $\overline{\Delta_q} < 2a$. Рассмотрим отрезок времени $[0,t_q]$. Разобьем его на равные отрезки точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_j < t_{j+1} < \ldots < t_m = t_q$. Пусть k_j нормаль к эллипсу в момент времени $t = t_{j+1}$, проходящая через точку $u(t_j)$ и пусть $B(t_j)$ - точка пересечения данной окружности с этой нормалью, причем $\overline{O(t_{j+1})B(t_j)} \cdot \overline{O(t_j)O(t_{j+1})} < 0$. На этом отрезке времени центр эллипса будет двигаться к точке Y. Тогда скалярное произведение $\overline{B(t_j)u(t_j)} \cdot \overline{O(t_j)O(t_{j+1})} > 0$ (рис. 6).

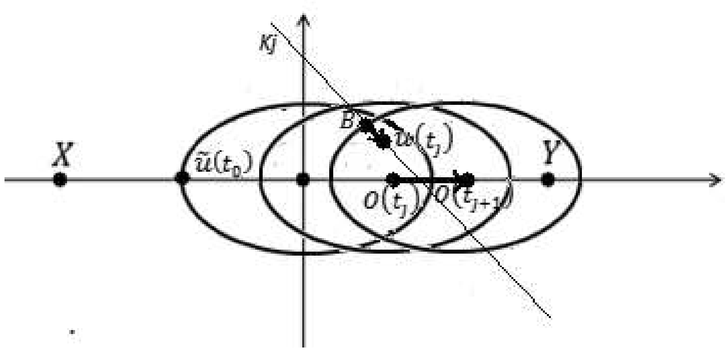

Рис. 6.

Значит, точка A будет оставаться на месте на всем отрезке времени $[0,t_q]$. Рассмотрим момент времени $t = t_q$. В этот момент времени эллипс вновь зацепит точку A (рис. 4).

Так как $\overline{\Delta_q} < 2a$, то в силу формулы (1) $t_q < \frac{T}{4}$. Рассмотрим отрезок времени $[t_q,\frac{T}{4}]$. Здесь $\Delta = |x(t_q) - x(\frac{T}{4})| = 2a - \overline{\Delta_q}$. По формуле (4) имеем

$$h_1 < e^{-\frac{a\Delta}{2b^2}} h_0 = e^{-\frac{a(2a-\overline{\Delta_q})}{2b^2}} h_0$$

По формуле (3) $\widetilde{u}(\frac{T}{4}) = (a,0)$.

Рассмотрим отрезок времени $[\frac{T}{4},\frac{3T}{4}]$. Как показано в работе [4], вначале данного отрезка времени точки A и $\widetilde{A}$ будут оставаться на месте. Пусть эллипс вновь зацепит точку A в момент времени τ_1. Положим $\Delta_1 = |x(\tau_1) - x(\frac{T}{2})|$. Так как $\tau_1 \in [\frac{T}{4},\frac{T}{2}]$, то по формуле (3) получим

$\widetilde{u}(\tau_1) = (a,0)$. Пусть x_1 – абсцисса точки A в момент времени $\frac{T}{4}$, то есть $u(\frac{T}{4}) = (x_1,h_1)$, тогда, для нее, при $t = \frac{T}{4}$, аналогично описанному в пункте 1, получим:

$$a - \frac{\Delta_1}{2} = |x_1 - 2a| = a\sqrt{1 - \frac{h_1^2}{b^2}} > a\sqrt{1 - e^{-\frac{a(2a-\overline{\Delta_q})}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}$$

То есть

$$\frac{\Delta_1}{2} < a\left(1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{a(2a-\overline{\Delta_q})}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}\right)$$

Также, получим

$$|u(\tau_1) - \widetilde{u}(\tau_1)| = \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^2} < \frac{1}{b}\sqrt{e^{-\frac{a(2a-\overline{\Delta_q})}{b^2}}h_0^2(b^2 - a^2) + a^2b^2\Delta_1}$$

Рассмотрим отрезок времени $[\tau_1,\frac{3T}{4}]$. Здесь $\Delta = |x(\tau_1) - x(\frac{3T}{4})| = \Delta_1 + 2a$. Пусть h_2 - расстояние от точки A до оси абсцисс в момент времени $t = \frac{3T}{4}$. По формуле (3) имеем

$$h_2 < e^{-\frac{a\Delta}{2b^2}}h_1 = e^{-\frac{a\Delta_1+2a^2}{2b^2}}h_1 = e^{-\frac{a\Delta_1+2a^2}{2b^2}}e^{-\frac{a(2a-\overline{\Delta_q})}{2b^2}}h_0 = e^{-\frac{a(\Delta_1-\overline{\Delta_q})+4a^2}{2b^2}}h_0$$

По формуле (2) $\widetilde{u}(\frac{3T}{4}) = (-a,0)$.

Рассмотрим отрезок времени $[\frac{3T}{4},T]$. Как показано в работе [4], вначале данного отрезка времени точки A и $\widetilde{A}$ будут оставаться на месте. Пусть эллипс вновь зацепит точку A в момент времени τ_2. Так как $\tau_2 \in [\frac{3T}{4},T]$, то по формуле (2) получим $\widetilde{u}(\tau_2) = (-a,0)$. Положим $\Delta_2 = |x(\tau_2) - x(T)|$. Аналогично пункту 1, получаем:

$$a - \frac{\Delta_2}{2} > a\sqrt{1 - e^{-\frac{a(\Delta_1-\overline{\Delta_q})+4a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}$$

То есть

$$\frac{\Delta_2}{2} < a\left(1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{a(\Delta_1-\overline{\Delta_q})+4a^2}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}\right)$$

Также, получим

$$|u(\tau_2) - \widetilde{u}(\tau_2)| = \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^2} < \sqrt{e^{-\frac{a(\Delta_1-\overline{\Delta_q})+4a^2}{b^2}}h_0^2(b^2 - a^2) + a^2b^2\Delta_2}$$

Продолжая этот процесс далее, получим, что на n-ом этапе

$$\frac{\Delta_n}{2} < a\left(1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}}e^{\frac{a\overline{\Delta_q}}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}\right)$$

Тогда

$$\Delta_n = r \cdot 2a\left(1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}}e^{\frac{a\overline{\Delta_q}}{b^2}}\frac{h_0^2}{b^2}}\right)$$

где $0 < r < 1$. Также

$$|u(\tau_n) - \widetilde{u}(\tau_n)| < \frac{1}{b}\sqrt{e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1-\overline{\Delta_q})+2na^2}{b^2}}h_0^2(b^2 - a^2) + a^2b^2\Delta_n} =$$

$$= \frac{1}{b}\sqrt{e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}}e^{\frac{a\overline{\Delta_q}}{b^2}}h_0^2(b^2 - a^2) + a^2b^2\Delta_n}$$

то есть
$$|u(\tau_n) - \widetilde{u}(\tau_n)| = \frac{s}{b} \cdot \sqrt{e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}} e^{\frac{a\overline{\Delta_q}}{b^2}} h_0^2(b^2-a^2) + a^2b^2\Delta_n}$$
где $0 < s < 1$.

Так как $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots, \Delta_n, \cdots > 0$, то $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots + \Delta_{n-1} \cdots > 0$ и $\Delta_1 > \Delta_2 > \Delta_3 > \cdots > \Delta_n > \cdots$. Тогда, так как $h_1 > h_2 > h_3 > \cdots > h_n > \cdots$, то
$$\sqrt{h_1^2 + \left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^2} > \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{\Delta_2}{2}\right)^2} > \cdots > \sqrt{h_n^2 + \left(\frac{\Delta_n}{2}\right)^2} > \cdots$$
то есть
$$|u(\tau_1) - \widetilde{u}(\tau_1)| > |u(\tau_2) - \widetilde{u}(\tau_2)| > \cdots > |u(\tau_n) - \widetilde{u}(\tau_n)| > \cdots$$
При $n \to \infty$, получим
$$\lim_{n\to\infty} e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}} = 0$$
Следовательно
$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = \lim_{n\to\infty} r \cdot 2a \left(1 - \sqrt{1 - e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}} e^{\frac{a\overline{\Delta_q}}{b^2}} \frac{h_0^2}{b^2}}\right) = 0$$

Так как $\tau_{n+1} - \tau_n > \frac{T}{4}$ (по рисунку 4), то последовательность $\{\tau_n\}$ будет неограниченно возрастать, то есть, при $n \to \infty$ будет $\tau_n \to \infty$. Тогда, при $\tau_n \to \infty$ получим
$$\lim_{\tau_n\to\infty} |u(\tau_n) - \widetilde{u}(\tau_n)| =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{s}{b} \cdot \sqrt{e^{-\frac{a(\Delta_{n-1}+\ldots+\Delta_2+\Delta_1)+2na^2}{b^2}} e^{\frac{a\overline{\Delta_q}}{b^2}} h_0^2(b^2-a^2) + a^2b^2\Delta_n} = 0$$

Используя утверждение, введенное выше, получим, что в условиях «sweeping» процесса, описанного выше, для решений $u(t)$ и $\widetilde{u}(t)$ справедливы следующие оценки:
$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(0) - \widetilde{u}(0)| \text{ при } t \in [0,\, t_q],$$
$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(\ t_q) - \widetilde{u}(\ t_q)| \text{ при } t \in [\ t_q, \tau_1],$$
$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(\tau_1) - \widetilde{u}(\tau_1)| \text{ при } t \in [\tau_1, \tau_2],$$
$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(\tau_2) - \widetilde{u}(\tau_2)| \text{ при } t \in [\tau_2, \tau_3],$$
$$\vdots$$
$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(\tau_n) - \widetilde{u}(\tau_n)| \text{ при } t \in [\tau_n, \tau_n],$$
$$\vdots$$

Следовательно, при $t \to \infty$ расстояние $|u(t) - \widetilde{u}(t)|$ не будет превышать расстояния $|u(\tau_n) - \widetilde{u}(\tau_n)|$ при $\tau_n \to \infty$. Но тогда получаем, что при $t \to \infty$ будет $|u(t) - \widetilde{u}(t)| \to 0$.

3. Рассмотрим решение $u(t)$ с начальным условием $u(t_0) = (v_0, h_0)$, которое лежит на эллипсе и для которого $v_0 < 0$ и $h_0 \neq 0$.

Здесь ситуация будет аналогична пункту 2 доказательства. То есть, для таких точек A, при $t \to \infty$ будет верно, что $|u(t) - \widetilde{u}(t)| \to 0$.

4. Рассмотрим решение $u(t)$ с начальным условием $u(t_0) = (v_0, 0)$, для которого $-a < v_0 \leqslant a$.

Из работы [4] мы знаем, что для такого случая при $t \geqslant T$ справедливо $u(t) = \widetilde{u}(t)$. То есть, при $t \geqslant T$ верно следующее:

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| = 0$$

Используя утверждение, введенное выше, получим, что для решений $u(t)$ и $\widetilde{u}(t)$ справедливы следующие оценки:

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(0) - \widetilde{u}(0)| \text{ при } t \in [0,T],$$

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leqslant |u(T) - \widetilde{u}(T)| = 0 \text{ при } t \in [T,\infty),$$

То есть, для таких точек A, при $t \to \infty$ будет верно, что $|u(t) - \widetilde{u}(t)| \to 0$.

Таким образом, периодическое решение $\widetilde{u}(t)$ глобально устойчиво, то есть при $t \to \infty$ выполняется $|u(t) - \widetilde{u}(t)| \to 0$ для любого решения $u(t)$.

Теорема доказана.

Отметим, что данный результат легко адаптируется для случая, когда $L > \frac{8a}{T}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kunze, M. An Introduction to Moreau's Sweeping Process / M. Kunze, M. Marques. — Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2000. — 60 p.

2. Marques, M. Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems: shocks and dry friction / M. Marques. — Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1993. — 179 p.

3. Moreau, J. J. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space / J. J. Moreau // Journ. Of Differential Equation. — 1997. — V. 20. — P. 347–374.

4. Восковская, Н. И. Об элементарном исследовании периодического решения одного «sweeping» процесса / Н. И. Восковская // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2017. — № 4. — С. 60–69.

5. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. — СПб. : Изд–во «Лань», 2008. — 480 с.

6. Красносельский, М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М. : Наука, 1983. — 272 с.

7. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса псевдодифференциальных операторов с вырождением / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 2. — С. 66–73.

REFERENCES

1. Kunze M., Marques M. An Introduction to Moreau's Sweeping Process. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 2000, 60 p.

2. Marques M. Differential inclusions in nonsmooth mechanical problems: shocks and dry friction. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser, 1993, 179 p.

3. Moreau J.J. Evolution problem associated with a moving convex set in a Hilbert space. Journ. Of Differential Equation, 1997, vol. 20, pp. 347–374.

4. Voskovskaja N.I. An elementary stydy of periodic solution of one «sweeping» process. [Voskovskaja N.I. Ob elementarnom issledovanii periodicheskogo reshenija odnogo «sweeping» protsesa]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2017, no. 4, pp. 60–69.

5. Demidovich B.P. Lectures on mathematical theory of stability. [Demidovich B.P. Lektsii po matematicheskoi teorii ustoichivosti]. SPb.: «Lan'», 2008, 480 p.

6. Krasnoselskii M.A., Pokrovskii A. V. System with hysteresis. [Krasnoselskii M.A., Pokrovskii A.V. Sistemi s gisterezisom]. Moscow: Nauka, 1983, 272 p.

7. Baev A. D., Kobylinskii P. A. Some properties of a class of pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A. D., Kobylinskij P. A. O nekotoryx svojstvax odnogo klassa psevdodifferencial'nyx operatorov s vyrozhdeniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 66–73.

Восковская Наталья Игоревна, аспирант, кафедра функционального анализа и операторных уравнений, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: natashavskvskaja@rambler.ru

Voskovskaya Natalia Igorevna, postgraduate student of the Department of functional analysis and operator equations of Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: natashavskvskaja@rambler.ru