УДК 517.956

ТЕОРЕМА О КОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С СИМВОЛОМ, ЗАВИСЯЩИМ ОТ КОМПЛЕКСНОГО ПАРАМЕТРА*

А. Д. Баев, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко, Ф. О. Найдюк

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 01.06.2019 г.

Аннотация. Статья посвящена доказательству теоремы о композиции для одного класса псевдодифференциальных уравнений с вырождением. Рассматривается новый класс переменных символов, зависящих также от комплексного параметра. Псевдодифференциальные операторы построены по специальному интегральному преобразованию. Получена формула представления суперпозиции вырождающихся псевдодифференциальных операторов. Получены асимптотические формулы символа суперпозиции вырождающихся псевдодифференциальных операторов.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор с вырождением, теорема о композиции, весовые пространства С. Л. Соболева.

THE THEOREM OF COMPOSITION FOR A CLASS OF DEGENERATE PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS WITH SYMBOL-DEPENDENT COMPLEX PARAMETER

A. D. Baev, A. A. Babichev, V. D. Kharchenko, F. O. Naydyuk

Abstract. The Article is devoted to the proof of the composition theorem for a class of pseudo-differential equations with degeneration. A new class of symbol variables that also depend on a complex parameter is considered. Pseudodifferential operators are constructed by a special integral transformation. A formula for representing the superposition of degenerate pseudo-differential operators is obtained. Obtained the asymptotic formula of the symbol of a superposition of degenerate pseudodifferential operators.

Keywords: pseudodifferential operator with degeneration, composition theorem, weight spaces of S. L. Sobolev.

ВВЕДЕНИЕ

Вырождающиеся дифференциальные уравнения используются при моделировании различных физических процессов, в которых граница области оказывает существенное влияние на процессы, происходящие вблизи границы. В этом случае на границе области может меняться как тип уравнений, так и их порядок. Такие уравнения используются при исследовании

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект 14.Z50.31.0037) и гранта РНФ (проект 19.11.00197), выполняемого в Воронежском государственном университете

стационарных процессов конвекции – диффузии в неоднородных анизотропных средах, характерных тем, что при приближении к границе коэффициент диффузии стремится к нулю. В частности, к таким уравнениям приводит математическое моделирование процессов фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной анизотропной пористой среде процессов фильтрации двухфазных жидкостей, в том числе, процессов вытеснения нефти водой из пористой среды. Подобные уравнения возникают при моделировании процесса распространения примеси в жидкокристаллическом растворе, находящемся во внешнем электрическом поле, при исследовании стационарной задачи о контакте мягкой оболочки с препятствием, при расчете линейных стационарных магнитных осесимметричных полей в неоднородных анизотропных средах. Такие уравнения являются также обобщением сингулярно возмущенных уравнений конвекции – диффузии. Кроме того, известно, что нахождение решения краевой задачи для эллиптического уравнения эквивалентно минимизации некоторого функционала. В теории управления задача о минимуме некоторого функционала соответствует задаче об оптимальном управлении. Вырождающимся эллиптическим уравнениям соответствуют вырожденные или особые оптимальные управления.

Краевые задачи для вырождающихся уравнений относятся к "неклассическим" задачам математической физики. Основная трудность, возникающая в теории вырождающихся эллиптических уравнений, связана с влиянием младших (в смысле теории регулярных эллиптических операторов) членов уравнения на постановку граничных задач и их коэрцитивную разрешимость.

Вырождающиеся эллиптические уравнения второго порядка и граничные задачи для них достаточно хорошо изучены. Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат М. В. Келдышу [1]. Полученные им результаты затем развивались и обобщались О. А. Олейник [2]. Обобщенные решения вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка впервые были рассмотрены в работах С. Г. Михлина [3] и М. И. Вишика [4]. Исследование вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка (при "степенном" характере вырождения) было начато в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [5]. Затем ряд результатов для некоторых классов вырождающихся уравнений высокого порядка был получен В. П. Глушко [6], С. З. Левендорским [7], А. Д. Баева, Р. А. Ковалевского, А. А. Бабайцева [8]–[15].

Настоящая работа посвящена доказательству теоремы о композиции для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов с переменным символом, зависящим также от комплексного параметра.

В работе систематически используется специальное интегральное преобразование F_α, введенное в [8]. Преобразование F_α позволяет ввести в рассмотрение специальный класс весовых псевдодифференциальных операторов. Весовые псевдодифференциальные операторы с постоянным по y символом были изучены в [8], в работах [16]–[18] были исследованы некоторые классы весовых псевдодифференциальных операторов с переменным символом.

В работе исследуются весовые псевдодифференциальные операторы с переменным по t символом, зависящим от комплексного параметра, из класса $S^{\sigma,p}_{\alpha,\rho}$, $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$. Доказывается теорема об ограниченности таких операторов в специальных весовых пространствах типа пространств С. Л. Соболева.

Рассмотрим функцию $\alpha(t)$, $t \in R^1_+$, для которой выполняются условия: $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$, $\alpha(\mathrm{t}) > 0$ при $t > 0$, $\alpha(\mathrm{t}) = \mathrm{const}$ для $t \geqslant d$ при некотором$d > 0$.

Рассмотрим интегральное преобразование

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = \int\limits_0^{+\infty} u(t)\exp(i\eta\int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)})\frac{dy}{\sqrt{\alpha(t)}}, \tag{1}$$

которое определено первоначально на функциях $u(t) \in C_0^\infty(R^1_+)$. Здесь $C_0^\infty(R^1_+)$ - пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций, носитель которых принадлежит R^1_+. Преобразование (1) и преобразование Фурье $F_{\tau\to\eta}[u] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\exp(i\eta\tau)d\tau$, $\eta \in R^1$ связаны следующим соотношением

$$F_\alpha[u(t)](\eta) = F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)], \tag{2}$$

где $u_\alpha(\tau) = \sqrt{\alpha(t)}u(t)\Big|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}$, $t = \varphi^{-1}(\tau)$ - функция, обратная к функции $\tau = \varphi(y) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Для преобразования F_α справедлив аналог равенства Парсеваля

$$\|F_\alpha[u](\eta)\|_{L_2(R^1)} = \sqrt{2\pi}\,\|u\|_{L_2(R^1_+)}\,. \tag{3}$$

Равенство (3) даёт возможность расширить преобразование (1) до непрерывного преобразования, осуществляющего гомеоморфизм пространств $L_2(R^1)$ и $L_2(R^1_+)$, а также рассмотреть преобразование F_α на некоторых классах обобщенных функций. Для расширенного таким образом преобразования F_α сохраним старое обозначение. Обозначим через F_α^{-1} обратное кF_α преобразование. Это преобразование можно записать в виде

$$F_\alpha^{-1}[w(\eta)](t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[w(\eta)]\Bigg|_{\tau=\varphi(t)}.$$

Можно показать, что для функции $u(t) \in C_0^\infty(\bar{R}^1_+)$ справедливы равенства

$$F_\alpha[D^j_{\alpha,t}u](\eta) = \eta^j F_\alpha[u](\eta),\ j = 1,2,...,\ \text{где}\ D_{\alpha,t} = \frac{1}{i}\sqrt{\alpha(t)}\partial_t\sqrt{\alpha(t)},\ \ \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}.$$

Пусть выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует число $\nu \in (0,1]$ такое, что $|\alpha'(t)\alpha^{-\nu}(t)| \leqslant c < \infty$ при всех $t \in [0, +\infty)$. Кроме того, $\alpha(y) \in C^{s_1}[0, +\infty)$ для некоторого $s_1 \geqslant 2N - |\sigma|$, где

$$N \geqslant \max_{0\leqslant p_1\leqslant l}\{2p_1 + \frac{l - p_1 + \frac{3}{2}}{\nu} + 1,\ \sigma + 1,\ \sigma + \frac{l}{2}\},\ l = 1,\ 2...,$$

σ — некоторое действительное число.

Можно показать, что указанное выше число ν существует, если $\alpha(+0) = \alpha'(+0) = 0$.

С помощью преобразования (1) и преобразования Фурье $F_{x\to\xi} = F_{x_1\to\xi_1}F_{x_2\to\xi_2}...F_{x_{n-1}\to\xi_{n-1}}$ определим весовой псевдодифференциальный оператор по формуле

$$G^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})v(x,t) = F_\alpha^{-1}F^{-1}_{\xi\to x}[g(p,t,\xi,\eta)F_{x\to\xi}F_\alpha[v(x,t)]]. \tag{4}$$

Определение 3. Будем говорить, что символ $g(p,t,\xi,\eta)$ весового псевдодифференциального оператора $G^{(\sigma)}(p,t,D_x,D_{\alpha,y})$ принадлежит классу символов $S^{\sigma,p}_{\alpha,\rho}(\Omega)$, где $\Omega \subset \bar{R}^1_+$, $\sigma \in \mathrm{R}^1$,$p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$, если функция $g(p,t,\xi,\eta)$ является бесконечно дифференцируемой функцией по переменной $t \in \Omega$ и по переменной $\eta \in R^1$. Причем, при всех $j = 0,\ 1,\ 2,...,\ \ l = 0,\ 1,\ 2,...$ справедливы оценки

$$|(\alpha(t)\partial_t)^j\partial^l_\eta\lambda(p,t,\xi,\eta)| \leqslant c_{jl}(|p|^2 + |\xi| + |\eta|)^{\sigma-\rho l} \tag{5}$$

с константами $c_{jl} > 0$, не зависящими от $p \in Q$, $\xi \in R^{n-1}$, $\eta \in R^1$, $\rho \in (0;1]$, $t \in K$, где $K \subset \Omega$ — произвольный отрезок. Здесь σ — действительное число.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $G(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ и $Q(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $g(p,t,\xi,\eta)$, $q(p,t,\xi,\eta)$, принадлежащими классам $S^{m_1,p}_{\alpha,\rho}(\Omega)$, $S^{m_1,p}_{\alpha,\rho}(\Omega)$ (m_1, m_2 — действительные числа), $p \in Q = \{p \in C,\ |\arg p| < \frac{\pi}{2},\ |p| > 0\}$. Тогда для любого $N \geqslant 0$ существует $N_1 > 0$ и такой символ $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta) \in S^{-N,p}_{\alpha,\rho}(\Omega)$, что справедливо равенство

$$G(p,t,D_x,D_{\alpha,t})Q(p,t,D_x,D_{\alpha,t}) - \sum_{j=1}^{N_1-1} R_j(p,t,D_x,D_{\alpha,t}) = T_{N_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t}), \tag{6}$$

где $T_{N_1}(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta)$, а $R_j(p,t,D_x,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(p,t,\xi,\eta) = \frac{1}{j!}\partial^j_\eta g(p,t,\xi,\eta) \cdot (\alpha(t)\partial_t)^j q(p,t,\xi,\eta).$$

1. СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМЫ 1

Рассмотрим композицию весовых псевдодифференциальных операторов $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)$, где

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = F^{-1}_\alpha[g(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[u]], \tag{1.1}$$

$$Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = F^{-1}_\alpha[q(p,t,\xi,\eta)F_\alpha[u]]. \tag{1.2}$$

Так как преобразование F_α связано с преобразованием Фурье равенством (2), то $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[g(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\sqrt{\alpha(t)}\ u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}]]_{\tau=\varphi(t)}$,

$$Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\sqrt{\alpha(t)}\ u(t)|_{t=\varphi^{-1}(\tau)}]]_{\tau=\varphi(t)}.$$

Следовательно, композицию псевдодифференциальных операторов $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $Q(t,\xi,D_{\alpha,t})$ можно записать в виде

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) =$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[g(p,t,\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[\sqrt{\alpha(\varphi^{-1}(\tau))}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha(\varphi^{-1}(\tau))}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]]]\Big|_{\tau=\varphi(t)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}F^{-1}_{\eta\to\tau}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}\cdot[F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]]]]_{\tau=\varphi(t)}.$$

Таким образом,

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}G(p,\tau,\xi,D_\tau)Q(p,\tau,\xi,D_\tau)[u_\alpha(\tau)]\Big|_{\tau=\varphi(t)}, \tag{1.3}$$

где

$$G(p,\tau,\xi,D_\tau)u(\tau) = F^{-1}_{\eta\to\tau}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u(\tau)]], \tag{1.4}$$

$$Q(p,\tau,\xi,D_\tau)u(\tau) = F^{-1}_{\eta\to\tau}[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)F_{\tau\to\eta}[u(\tau)]],$$

$t = \varphi^{-1}(\tau)$ — функция, обратная к функции $\tau = \varphi(t) = \int\limits_t^d \frac{d\rho}{\alpha(\rho)}$.

Выясним, какому классу символов принадлежит символ $g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)$, если $g(p,t,\xi,\eta) \in S^{m_1,p}_{\alpha,\rho}$. Так как $g(p,t,\xi,\eta) \in S^{m_1,p}_{\alpha,\rho}$, то в силу определения 3 для всех $l = 0,\ 1,\ 2, \ldots$ имеем оценки

$$\left|(\alpha(t)\partial_t)^j \partial^l_\eta g(p,t,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{jl}(|p| + |\xi| + |\eta|)^{m_1-\rho l}. \tag{1.5}$$

Заметим, что

$$(-\alpha(t)\partial_t)g(p,t,\xi,\eta\ )|_{t=\varphi^{-1}(\tau)} = \partial_\tau g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta),$$

то есть

$$(-\alpha(t)\partial_t)^j g(p,t,\xi,\eta\ )|_{t=\varphi^{-1}(\tau)} = \partial^j_\tau g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta). \tag{1.6}$$

Отсюда

$$\left|\partial^j_\tau \partial^l_\eta g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)\right| \leqslant c_{jl}(|p| + |\xi| + |\eta|)^{m_1-\rho l}. \tag{1.7}$$

Определение 1.1. Будем говорить, что символ $\lambda(p,\tau,\xi,\eta)$ принадлежит при всех $\xi \in R^{n-1}$ классу символов $S^{m,p}_\rho(\Omega_1)$, m — действительное число, $\Omega_1 \subset R^1$, $\rho \in (0,1]$, если $\lambda(p,\tau,\xi,\eta)$ принадлежит пространству $C^\infty(\Omega_1)$ по переменной τ и пространству $C^\infty(R^1)$ по переменной η. При этом для всех j, $l = 0,\ 1,\ 2,\ldots$ справедливы оценки

$$\left|\partial^j_\tau \partial^l_\eta \lambda(p,\tau,\xi,\eta)\right| \leqslant c_{jl}(|p| + |\xi| + |\eta|)^{m-\rho l}. \tag{1.8}$$

Из (1.5) и (1.7) следует, что если $g(p,t,\xi,\eta) \in S^{m_1,p}_{\alpha,\rho}$, то $\widetilde{g}(p,\tau,\xi,\eta) = \widehat{g}(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \in S^{m_1,p}_\rho$.

Кроме того, из (1.3) следует, что для того чтобы исследовать композицию операторов $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ достаточно исследовать композицию операторов $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$ и $Q(p,\tau,\xi,D_\tau)$.

Обозначим через B^∞ совокупность таких бесконечно дифференцируемых функций $f(\tau)$ на R^1, что $f(\tau)$ и все её производные ограничены на R^1.

Назовем ядром оператора $G(p,\tau,\xi,D_\tau)$ функцию

$$k(\tau,\xi,z) = F^{-1}_{\eta\to z}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]. \tag{1.9}$$

Справедливо следующее утверждение

Лемма 1.1. Пусть $g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \in S^{m,p}_\rho$ (m — действительное число), $f(\tau) \in B^\infty$. Тогда функция

$$h(p,\tau,\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,\tau - y)e^{-i(y-\tau)\xi} f(y)dy \tag{1.10}$$

при $\eta \to \infty$ допускает асимптотическое разложение

$$h(p,\tau,\xi,\eta) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(i)^j}{j!} \partial^j_\eta g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \cdot f^{(j)}(\tau),$$

где $f^{(j)}(\tau)$ — производная порядка j от функции $f(\tau)$.

При этом для любых $N > 0$ найдется $N_1 > 0$, что функция

$$T_{N_1}(p,\tau,\xi,\eta) = h(p,\tau,\xi,\eta) - \sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{(i)^j}{j!} \partial^j_\eta g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \cdot f^{(j)}(\tau) \tag{1.11}$$

принадлежит классу $S^{-N,p}_\rho$.

Доказательство. Запишем (1.10) в виде

$$h(p,\tau,\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,z) f(\tau - z) e^{iz\eta} dz. \tag{1.12}$$

Разложим функцию $f(\tau - z)$ по формуле Тейлора в окрестности точки τ, получим

$$f(\tau - z) = \sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{1}{j!} f^{(j)}(\tau)(-z)^j + g_{N_1}(\tau,z) z^{N_1}, \tag{1.13}$$

где

$$g_{N_1}(\tau,z) = \frac{(-1)^{N_1}}{(N_1-1)!} \int\limits_0^1 f^{(N_1)}(\tau - \theta z)(1-\theta)^{N_1-1} d\theta.$$

Применяя (1.13) в (1.12), получим равенство

$$h(p,\tau,\xi,\eta) = \sum_{j=0}^{N_1-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,z) \cdot \frac{1}{j!}(-z)^j f^{(j)}(\tau) e^{iz\eta} dz + \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,z) \cdot g_{N_1}(\tau,z) z^{N_1} e^{iz\eta} dz. \tag{1.14}$$

Используя свойства преобразования Фурье, получим

$$(-z)^j k(p,\tau,\xi,\eta) = (-z)^j F^{-1}_{\eta\to z}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)] =$$
$$= F^{-1}_{\eta\to z}[\partial^j_\eta g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)](-i)^j(-1)^j = (i)^j F^{-1}_{\eta\to z}[\partial^j_\eta g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)].$$

Применяя это равенство в правой части равенства (1.14), получим равенство

$$h(p,\tau,\xi,z) = \sum_{j=0}^{N_1-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (i)^j \cdot \frac{1}{j!} F^{-1}_{\eta\to z}[\partial^j_\eta g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)] f^{(j)}(\tau) e^{iz\eta} dz +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,z) g_{N_1}(\tau,z) z^{N_1} e^{iz\eta} dz = \sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{(i)^j}{j!} \partial^j_\eta g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) f^{(j)}(\tau) +$$
$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(p,\tau,\xi,z) g_{N_1}(\tau,z) z^{N_1} e^{iz\eta} dz.$$

Отсюда следует, что

$$T^{(}_{N_1} p,\tau,\xi,\eta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(p,\tau,\xi,z) g_{N_1}(\tau,z) z^{N_1} e^{iz\eta} dz. \tag{1.15}$$

Обозначим $k_{N_1}(p,\tau,\xi,z) = k(p,\tau,\xi,z) \cdot z^{N_1}$. Тогда

$$k_{N_1}(p,\tau,\xi,z) = z^{N_1} F^{-1}_{\eta\to z}[g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)] = F^{-1}_{\eta\to z}[(\frac{1}{i}\partial_\eta)^{N_1} g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)]. \tag{1.16}$$

Заметим, что для любого $M \geqslant 0$ при $N_1 \geqslant N + m$ ядро $k_{N_1}(p,\tau,\xi,z)$ есть непрерывная функция, удовлетворяющая оценкам $\left|\partial^l_z k_{N_1}(p,\tau,\xi,z)\right| \leqslant \dfrac{c}{(|p|+|\xi|+|z|)^{M+N+1}}$, константа c оценивается через конечное число констант c_{jl} из (1.7) при $j = 0$.

Для $g_{N_1}(\tau,z)=\frac{(-1)^{N_1}}{(N_1-1)!}\int\limits_0^1 f^{(N_1)}(\tau-\theta z)(1-\theta)^{N_1-1}d\theta$ вытекает оценка

$$\left|\partial_z^l g_{N_1}(\tau,z)\right|\leqslant c\max_{|y|\leqslant|z|}\left|f^{(l+N_1)}(\tau+y)\right|.$$

Если $N_1\geqslant N+m$, то, интегрируя в (1.15) по частям N раз и оценивая получившиеся интегралы по абсолютной величине с помощью последних двух оценок, мы докажем неравенство

$$(|p|+|\xi|+|\eta|)^N\left|T_{N_1}(\tau,\xi,\eta)\right|\leqslant c\sum_{N_1\leqslant l\leqslant N_1+N}\sup(\max_{|y|\leqslant|z|}\frac{\left|f^{(l)}(\tau+y)\right|}{(|p|+|z|)^M}),$$

Причем константа c оценивается через конечное число констант c_{jl}из (1.7) при $j=0$.

Аналогичным образом оцениваются и производные $\partial_\tau^j\partial_\eta^l T_{N_1}^{(}p,\tau,\xi,\eta)=\partial_\tau^j\partial_\eta^l\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(p,\tau,\xi,z)g_{N_1}(\tau,z)z^{N_1}e^{iz\eta}dz$. Только здесь можно интегрировать по частям $N+l$ раз. Тем самым установим, что

$$\left|\partial_\tau^j\partial_\eta^l T_{N_1}^{(}\tau,\xi,\eta)\right|\leqslant c_{jl}(|p|+|\xi|+|\eta|)^{-N-\rho l}.$$

Таким образом, функция (1.11) принадлежит классу $S_\rho^{-N,p}$.

Утверждение теоремы 1 следует теперь из следующего утверждения.

Теорема 1.2. Пусть $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ и $Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ — весовые псевдодифференциальные операторы с символами $g(p,t,\xi,\eta)$ и $q(p,t,\xi,\eta)$, принадлежащими соответственно классам $S_{\alpha,p}^{m_1}(\Omega)$ и $S_{\alpha,p}^{m_2}(\Omega)$ (m_1, m_2 — действительные числа). $\Omega\in\bar{R}_+^1$, $p\in Q=\{p\in C,\ |\arg p|<\frac{\pi}{2},\ |p|>0\}$. Тогда для любого $N\geqslant 0$ существует такое $N_1>0$ и такой символ $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta)\in S_{\alpha,p}^{-N}$, что справедливо равенство

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})-\sum_{j=1}^{N_1-1}R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})=T_{N_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t}),\tag{1.17}$$

где $T_{N_1}(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор вида (1.1) с символом $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta)$. $R_j(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ — весовой псевдодифференциальный оператор с символом

$$r_j(p,t,\xi,\eta)=\frac{1}{j!}\partial_\eta^j g(p,t,\xi,\eta)\cdot(\alpha(t)\partial_t)^j q(p,t,\xi,\eta).\tag{1.18}$$

Доказательство. Пусть $u(t)\in C_0^\infty(R_+^1)$, тогда в силу (1.3) получим равенство

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha(t)}}G(p,\tau,\xi,D_\tau)Q(p,\tau,\xi,D_\tau)[u_\alpha(\tau)]=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}G(p,\tau,\xi,D_\tau)\int\limits_{-\infty}^{\infty}q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}\widetilde{u}(\eta)d\eta,\tag{1.19}$$

где $\widetilde{u}(\eta)=F_{\tau\to\eta}[u_\alpha(\tau)]$.

Равенство (1.19) можно записать в виде

$$G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})u(t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(p,\tau,\xi,D_\tau)[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}]\cdot\widetilde{u}(\eta)d\eta=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sqrt{\alpha(t)}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[e^{i\tau\xi}G(p,\tau,\xi,D_\tau)[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}]]e^{-i\tau\xi}\cdot\widetilde{u}(\tau)d\tau.$$

Отсюда следует, что символом оператора $G(p,t,\xi,D_{\alpha,t})Q(p,t,\xi,D_{\alpha,t})$ является функция $e^{i\tau\xi}G(p,\tau,\xi,D_\tau)[q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i\tau\eta}]$, которую можно представить, как $r(p,\tau,\xi,\eta,\eta)$, где $r(p,\tau,\xi,\eta,y) = \int k(p,\tau,\xi,\tau - y)q(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)e^{-i(y-\tau)\xi}dy$.

По лемме 1.1 для любых $N > 0$ найдется $N_1 > 0$ такое, что функция

$$T_{N_1}(p,\tau,\xi,\eta) = r(p,\tau,\xi,\eta,y) - \sum_{j=0}^{N_1-1} \frac{(i)^j}{j!}\partial_\eta^j g(p,\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta) \cdot f^{(j)}(\tau) = r(p,\tau,\xi,\eta,y) - \sum_{j=0}^{N_1-1} r_j(p,\tau,\xi,\eta)$$

принадлежит классу $S_\rho^{-N,p}$. Здесь $f(\tau) = q(\varphi^{-1}(\tau),\xi,\eta)$. Следовательно, $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta) = g(p,t,\xi,\eta)q(p,t,\xi,\eta) - \sum\limits_{j=0}^{N_1-1} r_j(p,t,\xi,\eta)$, то есть для любого $N \geqslant 0$ существует такое $N_1 > 0$ и такой символ $T_{N_1}(p,t,\xi,\eta) \in S_{\alpha,\rho}^{-N,p}$, что справедливо равенство (1.17).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Келдыш, М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области / М. В. Келдыш // Докл. Академии наук СССР. — 1951. — Т. 77, № 2. — С. 181–183.

2. Олейник, О. А. Об уравнениях эллиптического типа, вырождающихся на границе области / О. А. Олейник // Докл. Академии наук СССР. — 1952. — Т. 87, № 6. — С. 885–887.

3. Михлин, С. Г. Вырождающиеся эллиптические уравнения / С. Г. Михлин // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. — 1954. — № 8. — С. 19–48.

4. Вишик, М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области / М. И. Вишик // Математический сборник. — 1954. — Т. 35 (77), вып. 33. — С. 513–568.

5. Вишик, М. И. Вырождающиеся эллиптические дифференциальные и псевдодифференциальные операторы / М. И. Вишик, В. В. Грушин // Успехи математических наук. — 1970. — Т. 25, вып. 4. — С. 29–56.

6. Глушко, В. П. Теоремы разрешимости краевых задач для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / В. П. Глушко // Дифференциальные уравнения с частными производными : Труды семинара акад. С. Л. Соболева. — 1978. — № 2. — С. 49–68.

7. Левендорский, С. З. Краевые задачи в полупространстве для квазиэллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на границе / С. З. Левендорский // Математический сборник. — 1980. — Т. 111 (153), вып. 4. — С. 483–501.

8. Баев, А. Д. Вырождающиеся эллиптические уравнения высокого порядка и связанные с ними псевдодифференциальные операторы / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 1982. — Т. 265, № 5. — С. 1044–1046.

9. Баев, А. Д. Об общих краевых задачах в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений высокого порядка / А. Д. Баев // Доклады Академии наук. — 2008. — Т. 422, № 6. — С. 727–728.

10. О существовании решений граничных задач в полупространстве для некоторых классов вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 64–76.

11. Об априорных оценках решений граничных задач для одного класса вырождающихся псевдодифференциальных уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 2. — С. 77–92.

12. Об априорных оценках решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 3. — С. 64–76.

13. О существовании решений общих граничных задач в полупространстве для вырождающихся эллиптических уравнений / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, А. А. Бабайцев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 51–66.

14. Панков, В. В. Об априорной оценке решений краевой задачи в полосе для вырождающегося эллиптического уравнения высокого порядка / В. В. Панков, А. Д. Баев, В. Д. Харченко // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2018. — № 4. — С. 161–171.

15. О некоторых начально-краевых задачах для вырождающихся параболических уравнений / А. Д. Баев и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2019. — № 1. — С. 59–69.

16. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, П. А. Кобылинский // Доклады Академии наук. — 2015. — Т. 460, № 2. — С. 133–135.

17. Баев, А. Д. О некоторых свойствах одного класса вырождающихся псевдодифференциальных операторов / А. Д. Баев, Н. И. Работинская // Доклады академии наук. — 2017. — Т. 477, № 1. — С. 7–10.

18. Баев, А. Д. О вырождающихся эллиптических уравнениях высокого порядка и псевдодифференциальных операторах с вырождением / А. Д. Баев, Р. А. Ковалевский, П. А. Кобылинский // Доклады академии наук. — 2016. — Т. 471, № 4. — С. 387–390.

REFERENCES

1. Keldysh M.V. On some cases of degeneracy of elliptic type equations at the boundary of the domain. [Keldysh M.V. O nekotoryx sluchayax vyrozhdeniya uravneniyj ellipticheskogo tipa na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1951, vol. 77, no. 2, pp. 181–183.

2. Oleinik O.A. On the equations of the elliptic type, which are degenerate on the boundary of the domain. [Oleinik O.A. Ob uravneniyax ellipticheskogo tipa, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Doklady Akademii nauk SSSR — Soviet Mathematics. Doklady*, 1952, vol. 87, no. 6, pp. 885–887.

3. Mikhlin S.G. Degenerate elliptic equations. [Mixlin S.G. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya]. *Vestnik Leningradskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of the Leningrad State University*, 1954, no. 8, pp. 19–48.

4. Vishik M.I. Boundary value problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain. [Vishik M. I. Kraevye zadachi dlya ellipticheskix uravneniyj, vyrozhdayushhixsya na granice oblasti]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1954, vol. 35 (77), iss. 33, pp. 513–568.

5. Vishik M.I., Grushin V.V. Degenerate elliptic differential and pseudo-differential operators. [Vishik M.I., Grushin V.V. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie differencial'nye i psevdodifferencial'nye operatory]. *Uspexi matematicheskix nauk — Russian Mathematical Surveys*, 1970, vol. 25, iss. 4, pp. 29–56.

6. Glushko V.P. The theorems of solvability of boundary value problems for a class of degenerate elliptic equations of high order. [Glushko V.P. Teoremy razreshimosti kraevyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Differencial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi: Trudy seminara akad. S.L. Soboleva — Differential equations with partial derivatives. Acad seminar. S.L. Sobolev*, 1978, no. 2, pp. 49–68.

7. Levendorsky S.Z. Boundary value problems in the half-space for quasi-elliptic pseudodifferential operators degenerating at the boundary. [Levendorskiyj S.Z. Kraevye zadachi v poluprostranstve dlya kvaziellipticheskix psevdodifferencial'nyx operatorov, vyrozhdayushhixsya na granice]. *Matematicheskij sbornik — Sbornik: Mathematics*, 1980, vol. 111 (153), iss. 4, pp. 483–501.

8. Baev A.D. Degenerate high-order elliptic equations and associated pseudo-differential operators. [Baev A.D. Vyrozhdayushhiesya ellipticheskie uravneniya vysokogo poryadka i svyazannye s nimi psevdodifferencial'nye operatory]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 1982, vol. 265, no. 5, pp. 1044–1046.

9. Baev A.D. On general boundary value problems in a half-space for degenerate high-order elliptic equations. [Baev A.D. Ob obshhix kraevyx zadachax v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj vysokogo poryadka]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2008, vol. 422, no. 6, pp. 727–728.

10. Baev A.D., Bakhtin J.I., Buneev S.S., Kowalewski R.A., Babaitsev A.A. On the existence of solutions of boundary value problems in a half-space for some classes of degenerate pseudodifferential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. O sushhestvovanii resheniyj granichnyx zadach v poluprostranstve dlya nekotoryx klassov vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 64–76.

11. Baev A.D., Bakhtin J.I., Buneev S.S., Kowalewski R.A., Babaitsev A.A. About aprioristic estimates of solutions of boundary tasks in a half-space for one class of the degenerating pseudo-differential equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A. Ob apriornyx ocenkax resheniyj granichnyx zadach dlya odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 2, pp. 77–92.

12. Baev A.D., Bakhtina J.I., Buneev S.S., Kowalewski R.A., Babaitsev A.A., Lezhenina I.F., Glushko A.V. On a priori estimates of solutions to general boundary value problems in a half-space for degenerate elliptic equations. [Baev A.D., Baxtina Zh.I., Buneev S.S., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A., Lezhenina I.F., Glushko A.V. Ob apriornyx ocenkax resheniyj obshhix granichnyx zadach v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 3, pp. 64–76.

13. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Babaytsev A.A., Kharchenko V.D. On the existence of solutions of common boundary value problems in a half-space for degenerate elliptic equations. [Baev A.D., Kovalevskiyj R.A., Babayjcev A.A., Xarchenko V.D. O sushhestvovanii resheniyj obshhix granichnyx zadach v poluprostranstve dlya vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 51–66.

14. Pankov V.V., Baev A.D., Kharchenko V.D. On an a priori estimate of the solutions of a boundary value problem in a strip for a degenerate high order elliptic equation. [Pankov V.V., Baev A.D., Xarchenko V.D. Ob apriornoyj ocenke resheniyj kraevoyj zadachi v polose dlya vyrozhdayushhegosya ellipticheskogo uravneniya vysokogo poryadka]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2018, no. 4, pp. 161–171.

15. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Naydyuk Ph.O., Babaytsev A.A., Kharchenko V.D., Lezhenina I.F., Pletneva O.K. About some initial-boundary-value problems for degrading parabolic equations. [Baev A.D., Nayjdyuk F.O., Babayjcev A.A., Xarchenko V.D., Lezhenina I.F., Pletneva O.K. O nekotoryx nachal'no-kraevyx zadachax dlya vyrozhdayushhixsya parabolicheskix uravneniyj]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2019, no. 1, pp. 59–69.

16. Baev A.D., Kobylinsky P.A. On some properties of one class of degenerate pseudo-differential operators. [Baev A.D., Kobylinskiyj P.A. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa

vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 2015, vol. 460, no. 2, pp. 133–135.

17. Baev A.D., Rabotinsky N.I. On some properties of a class of degenerate pseudodifferential operators. [Baev A.D., Rabotinskaya N.I. O nekotoryx svoyjstvax odnogo klassa vyrozhdayushhixsya psevdodifferencial'nyx operatorov]. *Doklady Akademii nauk — Reports of the Academy of Sciences*, 2017, vol. 477, no. 1, pp. 7–10.

18. Baev A.D., Kovalevsky R.A., Kobylinsky P.A. On degenerate high-order elliptic equations and pseudodifferential operators with degeneration. [Baev A.D., Kovalevskiyj R.A., Kobylinskiyj P.A. O vyrozhdayushhixsya ellipticheskix uravneniyax vysokogo poryadka i psevdodifferencial'nyx operatorax s vyrozhdeniem]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*, 2016, vol. 471, no. 4, pp. 387–390.

Баев Александр Дмитриевич, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Baev Alexander D., doctor of physical-mathematical Sciences, Professor, head of Department of mathematical analysis, Voronezh state University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: alexsandrbaev@mail.ru

Бабайцев Андрей Александрович, студент математического факультета Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: 259608@mail.ru

Babaitsev Andrey A., student, Faculty of Mathematics, Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: 259608@mail.ru

Харченко Виктория Дмитриевна, студент Воронежского государственного университета, Воронеж, Российская Федерация

Kharchenko Victoria Dmitrievna, student of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

Найдюк Филипп Олегович, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математического анализа, математический факультет, Воронежский государственный университет, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: olegna@vmail.ru
Тел.: +7(473)220–86–90

Naydyuk Philip Olegovich, Associate Professor of the Department of mathematical analysis of Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation
E-mail: olegna@vmail.ru
Tel.: +7(473)220–86–90