

ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА И ВЕЛИЧИНЫ РАЗЛАДКИ ШИРИНЫ ПОЛОСЫ ЧАСТОТ ГАУССОВСКОГО ПРОЦЕССА*

Л. А. Голпайегани, К. С. Калашников,
А. Н. Фаульгабер, М. М. Шахморadian

*Национальный исследовательский университет "МЭИ",
Воронежский государственный университет*

Поступила в редакцию 28.03.2019 г.

Аннотация. Предложен максимально правдоподобный алгоритм измерения момента разладки и неизвестного скачкообразного изменения ширины полосы частот быстрофлуктуирующего гауссовского случайного процесса, допускающий техническую реализацию, существенно более простую по сравнению с получаемыми на основе известных подходов. С использованием аддитивной локально-марковской аппроксимации решающей статистики представлена методика расчета характеристик синтезированного измерителя и найдены замкнутые аналитические выражения для условных смещений и рассеяний выносимых оценок. Методами статистического моделирования установлено, что предложенный измеритель является работоспособным, а аналитические формулы, описывающие качество его функционирования хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными в широком диапазоне значений параметров анализируемого случайного процесса.

Ключевые слова: разладка случайного процесса, неизвестная ширина полосы частот, метод максимального правдоподобия, разрывный параметр, метод локально-марковской аппроксимации, смещение оценки, рассеяние оценки, статистическое моделирование.

DETECTING THE UNKNOWN STEPWISE CHANGE OF THE GAUSSIAN PROCESS ENERGY PARAMETERS

L. A. Golpaiegani, K. S. Kalashnikov, A. N. Faulgaber, M. M. Shahmoradian

Abstract. The maximum likelihood algorithm is introduced for measuring the moment of abrupt change and the unknown frequency band jump and the dispersion of a fast-fluctuating Gaussian random process. This algorithm can be technically implemented much simpler than the ones obtained by means of common approaches. The technique for calculating the characteristics of the synthesized measurer is presented and the closed analytical expressions for the conditional biases and variances of the resulting estimates are found through the additive local Markov approximation of the decision statistics. By statistical simulation methods, it is confirmed that the presented measurer is operable, while the theoretical formulas describing its performance approximate satisfactorily the corresponding experimental data in a wide range of the parameters of the analyzed random process.

Keywords: abrupt change of random process, unknown frequency band, maximum likelihood method, discontinuous parameter, local Markov approximation method, bias of estimate, variance of estimate, statistical simulation.

* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 17-71-10057)
© Голпайегани Л. А., Калашников К. С., Фаульгабер А. Н., Шахморadian М. М., 2019

ВВЕДЕНИЕ

Задача статистического анализа скачкообразного изменения (разладки) значений параметров случайного процесса в некоторый момент времени рассмотрена в ряде работ [1–3 и др.]. Как правило, в известных публикациях помимо предположения о гауссовском характере наблюдаемой реализации при ее постановке накладываются некоторые существенные дополнительные ограничения, связанные, например, с некоррелированностью (а, следовательно, статистической независимостью) обрабатываемых отсчетов [1], классом стохастических моделей анализируемого сигнала [2, 3] и пр.

В настоящей работе предложен технически простой способ измерения момента разладки и неизвестного скачкообразного изменения ширины полосы частот гауссовского случайного процесса при выполнении только условий быстроты его флуктуаций и относительной равномерности его спектральной плотности в рабочей полосе частот. Теоретически и экспериментально найдены характеристики синтезированного измерителя.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определим аналитически полосовой быстрофлуктуирующий гауссовский случайный процесс со скачкообразным изменением ширины полосы частот в момент времени λ_0 как

$$\xi(t) = [1 - \theta(t - \lambda_0)]\nu_1(t) + \theta(t - \lambda_0)\nu_2(t), \quad \theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\nu_i(t)$, $i = 1, 2$ — статистически независимые стационарные гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями a и спектральными плотностями [4]

$$G_i(\omega) = \frac{d}{2} \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \Omega_{0i}/2, \\ 0, & |\omega| > \Omega_{0i}/2. \end{cases}$$

Здесь Ω_{0i} — ширина полосы частот, а d — интенсивность (величина спектральной плотности) процесса $\nu_i(t)$, определяющая его дисперсию $D_i = d\Omega_{0i}/4\pi$, причем $\Omega_{01} \neq \Omega_{02}$.

Полагаем, что процесс (1) наблюдается на фоне гауссовского белого шума $n(t)$ с односторонней спектральной плотностью N_0 , так что на вход приемного устройства поступает аддитивная смесь

$$x(t) = \xi(t) + n(t), \quad t \in [0, T]. \quad (2)$$

Параметры λ_0 и Ω_{02} являются неизвестными и принимают значения из априорных интервалов $[\Lambda_1, \Lambda_2]$, $[\Upsilon_1, \Upsilon_2]$. При этом будем считать, что $\Upsilon_1 < \Omega_{01} < \Upsilon_2$, а условие “быстрых” флуктуаций процесса $\xi(t)$ запишем в виде

$$\mu_{\min} = T_{\min} \Upsilon_1 / 4\pi \gg 1, \quad (3)$$

где $T_{\min} = \min(\lambda_0, T - \lambda_0)$.

На основе наблюдаемой реализации (2) и имеющейся априорной информации необходимо оценить момент разладки λ_0 и ширину полосы частот Ω_{02} процесса $\xi(t)$ после разладки.

2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ

При синтезе алгоритма оценивания момента и величины скачкообразного изменения ширины полосы частот процесса $\xi(t)$ (1) воспользуемся методом максимального правдоподобия.

Согласно этому методу необходимо формировать решающую статистику — логарифм функционала отношения правдоподобия (ФОР) — как функцию текущих значений всех неизвестных параметров. При выполнении (3) согласно [4, 5] имеем

$$L(\lambda, \Omega) = \frac{d}{N_0(N_0+d)} \left[\int_0^\lambda y^2(t, \Omega_{01}) dt + \int_\lambda^T y^2(t, \Omega) dt \right] + \frac{2a}{N_0+d} \int_0^T x(t) dt - \frac{a^2 T}{N_0+d} - \frac{(T-\lambda)\Omega + \lambda\Omega_{01}}{4\pi} \ln \left(1 + \frac{d}{N_0} \right). \quad (4)$$

Здесь $y(t, \Theta) = \int_{-\infty}^\infty x(t') h(t-t', \Theta) dt'$ — выходной сигнал фильтра с передаточной функцией $H(\omega, \Theta)$, удовлетворяющей условию $|H(\omega, \Theta)|^2 = 1$ при $|\omega| \leq \Theta/2$ и $|H(\omega, \Theta)|^2 = 0$ при $|\omega| > \Theta/2$, а λ, Ω — текущие значения неизвестных параметров λ_0, Ω_0 соответственно.

Оценки максимального правдоподобия (ОМП) λ_m, Ω_m измеряемых величин λ_0, Ω_0 определяются как положение наибольшего максимума решающей статистики (4):

$$(\lambda_m, \Omega_m) = \arg \max_{\lambda \in [\Lambda_1, \Lambda_2], \Omega \in [\Upsilon_1, \Upsilon_2]} L(\lambda, \Omega). \quad (5)$$

Максимально правдоподобный измеритель (5) технически может быть реализован в виде N -канального устройства, каждый канал которого согласован с шириной полосы частот $\Omega_i = \Upsilon_1 + (i - 1/2) \Delta\Omega, i = \overline{1, N}, \Delta\Omega = (\Upsilon_2 - \Upsilon_1)/N$. Блок-схема такого устройства показана на рис. 1. Здесь обозначено: 1 — ключ, замыкающийся на время $[0, T]$, 2^0 — фильтр с передаточной функцией $H(\omega, \Omega_{01})$, 2^i — фильтр с передаточной функцией $H(\omega, \Omega_i)$, 3 — квадратор, 4 — вычитающее устройство, 5 — интегратор в течение интервала времени $[0, T]$, 6 — линия задержки на время T , 7 — интегратор, 8 — генератор линейно изменяющегося напряжения, 9 — умножитель, 10 — решающее устройство, определяющее по номеру канала с наибольшим максимальным значением оценку ширины полосы частот после разладки, а по положению наибольшего максимума сигнала в этом канале на интервале $[\Lambda_1, \Lambda_2]$ — оценку момента разладки. Очевидно, чем больше число каналов N , тем точнее измеритель, представленный на рис. 1, реализует алгоритм (5).

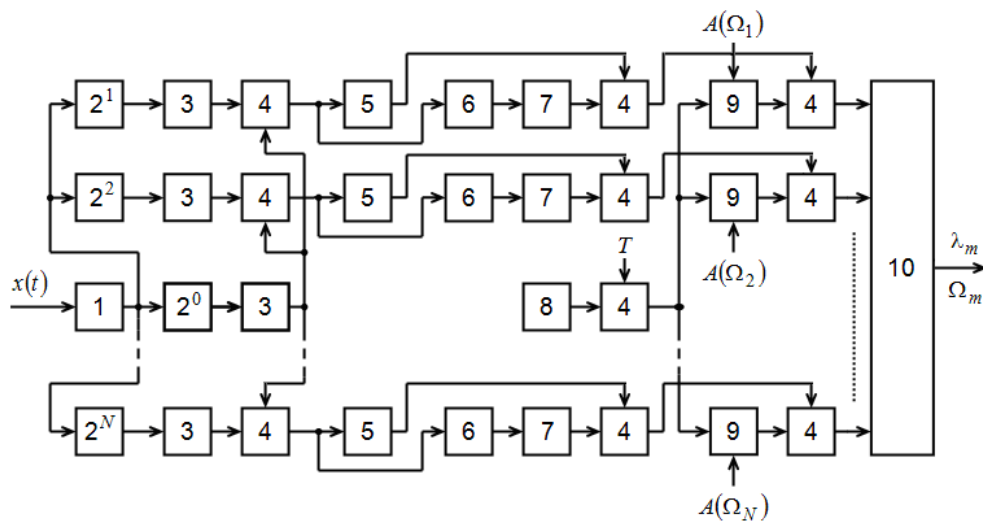


Рис. 1. Максимально правдоподобный измеритель момента и величины разладки ширины полосы частот гауссовского случайного процесса.

3. ХАРАКТЕРИСТИКИ АЛГОРИТМА ОЦЕНИВАНИЯ

Найдем характеристики измерителя (5). С этой целью перейдем от ОМП λ_m, Ω_m (5) к нормированным ОМП $l_m = 1 - \lambda_m/T, v_m = \Omega/\Omega_{01} - 1$, определяемым как

$$(l_m, v_m) = \arg \max_{l \in [1 - \tilde{\Lambda}_{1,1} - \tilde{\Lambda}_2], v \in [\tilde{\Upsilon}_{1,1} - 1, \tilde{\Upsilon}_2 - 1]} M(l, v). \quad (6)$$

Здесь

$$M(l, v) = M_1(l, v) - M_2(l) - S_3(l, v), \quad (7)$$

$$M_1(l, v) = \frac{T}{\mu_1 N_0} \int_{1-l}^1 y^2(\tilde{t}, \Omega_{01}(v-1)) d\tilde{t}, \quad M_2(l) = \frac{T}{\mu_1 N_0} \int_{1-l}^1 y^2(\tilde{t}, \Omega_{01}) d\tilde{t}, \quad (8)$$

$$S_3(l, v) = lv(1+q) \ln(1+q)/q,$$

а

$$\tilde{t} = t/T, \quad v = \Omega/\Omega_{01}, \quad q = d/N_0, \quad (9)$$

$$l = \lambda/T, \quad \tilde{\Lambda}_{1,2} = \Lambda_{1,2}/T, \quad \tilde{\Upsilon}_{1,2} = \Upsilon_{1,2}/\Omega_{01}, \quad \mu_1 = T\Omega_{01}/4\pi.$$

При выполнении (3) функционалы $M_1(l, v), M_2(l)$ (8), а, следовательно, и функционал $M(l, v)$ (7), являются приближенно гауссовскими [4], т.е. допускают полное статистическое описание с помощью моментных или корреляционных функций первых двух порядков. В этой связи представим их в виде суммы регулярных [6] и флуктуационных [6] составляющих:

$$M_1(l, v) = S_1(l, v) + N_1(l, v), \quad M_2(l) = S_2(l) + N_2(l).$$

Здесь $S_1(l, v) = \langle M_1(l, v) \rangle, S_2(l) = \langle M_2(l) \rangle$ — регулярные, $N_1(l, v) = M_1(l, v) - \langle M_1(l, v) \rangle, N_2(l) = M_2(l) - \langle M_2(l) \rangle$ — флуктуационные составляющие, а усреднение $\langle \cdot \rangle$ выполняется по реализациям $x(t)$ при фиксированных значениях λ_0, Ω_{02} . Путем непосредственного усреднения (8) находим

$$S_1(l, v) = l(v+1) + q \max(0, l-l_0) [1 + \min(0, v)] + q \min(l_0, l) [1 + \min(v_{02}, v)],$$

$$S_2(l) = l + q \max(0, l-l_0) + q \min(l_0, l) [1 + \min(0, v_{02})],$$

$$\langle N_1(l_1, v_1) N_1(l_2, v_2) \rangle = (1/\mu_1) \{ \min(l_1, l_2) (1 + \min(v_1, v_2)) + q(2+q) \times$$

$$\times [\max(0, \min(l_1, l_2) - l_0) (1 + \min(0, v_1, v_2)) + \min(l_0, l_1, l_2) (1 + \min(v_{02}, v_1, v_2))] \}, \quad (10)$$

$$\langle N_2(l_1) N_2(l_2) \rangle = (1/\mu_1) \{ \min(l_1, l_2) + q(2+q) \times$$

$$\times [\max(0, \min(l_1, l_2) - l_0) + (1 + \min(0, v_{02})) \min(l_0, l_1, l_2)] \},$$

где $l_0 = 1 - \lambda_0/T, v_{02} = \Omega_{02}/\Omega_{01} - 1$.

С учетом (10) запишем регулярную составляющую $S(l, v) = \langle M(l, v) \rangle$ и корреляционную функцию флуктуационной составляющей $N(l, v) = M(l, v) - \langle M(l, v) \rangle$ решающей статистики $M(l, v)$ (7) в виде

$$S(l, v) = [1 - (1+q) \ln(1+q)/q] lv - q \min(0, l_0 - l) \min(0, v) +$$

$$+ q \min(l_0, l) [\min(v_{02}, v) - \min(0, v_{02})],$$

$$\langle N(l_1, v_1) N(l_2, v_2) \rangle = (1/\mu_1) \{ \min(l_1, l_2) [\min(v_1, v_2) - \min(0, v_1) - \min(0, v_2)] +$$

$$+ q(2+q) \max(0, \min(l_1, l_2) - l_0) [\min(0, v_1, v_2) - \min(0, v_1) - \min(0, v_2)] + q(2+q) \times$$

$$\times \min(l_0, l_1, l_2) [\min(v_{02}, v_1, v_2) + \min(0, v_{02}) - \min(0, v_{02}, v_1) - \min(0, v_{02}, v_2)] \}.$$

Учтем, что регулярная составляющая $S(l, v)$ достигает абсолютного максимума в точке (l_0, v_{02}) , а реализации флуктуационной составляющей $N(l, v)$ непрерывны с вероятностью 1. Тогда выходное отношение сигнал/шум (ОСШ) для алгоритма (5), (6) запишется как [6]

$$z^2 = \frac{S^2(l_0, v_0)}{\langle N^2(l_0, v_0) \rangle} = \mu_1 l_0 |v_{02}| \left[1 - \frac{1 + c_q}{q} \ln(1 + q) \right]^2, \quad (12)$$

где $c_q = 0$, если $v_{02} > 0$, и $c_q = q$, если $v_{02} < 0$.

Из (12) следует, что ОСШ $z^2 \gg 1$ при выполнении (3) и не слишком малых значениях q , так что координаты (l_m, v_m) (6) положения абсолютного максимума функционала $M(l, v)$ (7) находятся в малой δ -окрестности точки (l_0, v_{02}) . С увеличением z^2 ($z^2 \rightarrow \infty$) величина этой окрестности $\delta = \max(|l - l_0|, |v - v_{02}|) \rightarrow 0$ [4, 6], и для регулярной составляющей и корреляционной функции флуктуационной составляющей (11) справедливы асимптотические представления

$$\begin{aligned} S(l, v) &= S_0 + S_1(l - l_0) + S_2(v - v_{02}) + o(\delta), \\ \langle N(l_1, v_1) N(l_2, v_2) \rangle &= \sigma^2 + R_1(l_1 - l_0, l_2 - l_0) + R_2(v_1 - v_{02}, v_2 - v_{02}) + o(\delta), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} S_0 &= l_0 v_{02} \begin{cases} (1 + q) [1 - \ln(1 + q)/q], & v_{02} > 0, \\ 1 - (1 + q) \ln(1 + q)/q, & v_{02} < 0, \end{cases} & \sigma^2 &= \frac{l_0 |v_{02}|}{\mu_1} \begin{cases} (1 + q)^2, & v_{02} > 0, \\ 1, & v_{02} < 0, \end{cases} \\ S_1(x) &= v_{02} \begin{cases} x [1 - (1 + q) \ln(1 + q)/q] + q \min(0, x), & v_{02} > 0, \\ x [1 - (1 + q) \ln(1 + q)/q] + q \max(0, x), & v_{02} < 0, \end{cases} \\ S_2(y) &= l_0 [y (1 - (1 + q) \ln(1 + q)/q) + q \min(0, y)], \\ R_1(x_1, x_2) &= \frac{|v_{02}|}{\mu_1} \begin{cases} \min(x_1, x_2) + q(2 + q) \min(0, x_1, x_2), & v_{02} > 0, \\ \min(x_1, x_2) + q(2 + q) \max(0, \min(x_1, x_2)), & v_{02} < 0, \end{cases} \\ R_2(y_1, y_2) &= \frac{l_0}{\mu_1} \begin{cases} q(2 + q) \min(0, y_1, y_2) + \min(y_1, y_2), & v_{02} > 0, \\ q(2 + q) [\min(0, y_1, y_2) - \min(0, y_1) - \min(0, y_2)] - \\ - \max(y_1, y_2), & v_{02} < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

Обозначим $r_1(l)$, $r_2(v)$ — статистически независимые гауссовские случайные процессы с математическими ожиданиями $\langle r_1(l) \rangle = S_1(l - l_0)$, $\langle r_2(v) \rangle = S_2(v - v_{02})$ и корреляционными функциями

$$\langle [r_1(l_1) - \langle r_1(l_1) \rangle] [r_1(l_2) - \langle r_1(l_2) \rangle] \rangle = \sigma^2/2 + R_1(l_1 - l_0, l_2 - l_0),$$

$$\langle [r_2(v_1) - \langle r_2(v_1) \rangle] [r_2(v_2) - \langle r_2(v_2) \rangle] \rangle = \sigma^2/2 + R_2(v_1 - v_{02}, v_2 - v_{02}).$$

Если $z \rightarrow \infty$ (12), $\delta \rightarrow 0$, то асимптотически гауссовское случайное поле $[M(l, v) - S_0]$ сходится по распределению к сумме $r_1(l) + r_2(v)$. Следовательно, нормированные оценки l_m , v_m с увеличением ОСШ z (12) сходятся по распределению к соответствующим оценкам

$$\eta_{m1} = \arg \max_{l \in [l_0 - \delta, l_0 + \delta]} r_1(l), \quad \eta_{m2} = \arg \max_{v \in [v_{02} - \delta, v_{02} + \delta]} r_2(v),$$

а ОМП λ_m и Ω_m (5) сходятся по распределению к оценкам

$$T(1 - \eta_{m1}) \text{ и } \Omega_{01}(\eta_{m2} + 1). \quad (15)$$

Из (13), (14) следует, что на интервалах $[l_0 - \delta, l_0 + \delta]$, $[v_{02} - \delta, v_{02} + \delta]$ процессы $r_1(l)$, $r_2(v)$ удовлетворяют условиям теоремы Дуба [7] и являются непрерывными гауссовскими марковскими процессами с коэффициентами сноса $a_{\eta 1}$, $a_{\eta 2}$ и диффузии $b_{\eta 1}$, $b_{\eta 2}$:

$$a_{\eta 1} = |v_{02}| \begin{cases} S_{11}, & l < l_0, \\ -S_{12}, & l \geq l_0, \end{cases} \quad a_{\eta 2} = l_0 \begin{cases} S_{21}, & v < v_{02}, \\ -S_{22}, & v \geq v_{02}, \end{cases}$$

$$b_{\eta 1} = \begin{cases} \sigma_{11}^2, & l < l_0, \\ \sigma_{12}^2, & l \geq l_0, \end{cases} \quad b_{\eta 2} = \begin{cases} \sigma_{21}^2, & v < v_{02}, \\ \sigma_{22}^2, & v \geq v_{02}. \end{cases}$$

Аналитические выражения для статистических характеристик величины и положения наибольшего максимума марковского случайного процесса со скачкообразно изменяющимися коэффициентами сноса и диффузии найдены в [8]. Используя результаты [8], для плотностей вероятности $w_{\eta i}(\eta)$ случайных величин η_{mi} , $i = 1, 2$ получаем

$$w_i(\eta) = \begin{cases} z_{i1}^2 \Psi_g(z_{i1}^2(\eta_{0i} - \eta), z_{i1}^2 \delta, z_{i2}^2 \delta, 1/R_i), & \eta < \eta_{0i}, \\ z_{i2}^2 \Psi_g(z_{i2}^2(\eta - \eta_{0i}), z_{i2}^2 \delta, z_{i1}^2 \delta, R_i), & \eta \geq \eta_{0i}, \end{cases} \quad (16)$$

где

$$\eta_{01} = l_0, \quad \eta_{02} = v_{02}, \quad z_{1i}^2 = 2\nu_{02}^2 S_{1i}^2 / \sigma_{1i}^2, \quad z_{2i}^2 = 2l_0^2 S_{2i}^2 / \sigma_{2i}^2, \quad (17)$$

$$R_1 = S_{11} \sigma_{12}^2 / S_{12} \sigma_{11}^2, \quad R_2 = S_{21} \sigma_{22}^2 / S_{22} \sigma_{21}^2,$$

$$\Psi_g(y, y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}|y|^{3/2}} \left\{ \frac{\exp[-(y_1 - y)/4]}{\sqrt{\pi(y_1 - y)}} + \Phi\left(\sqrt{\frac{y_1 - y}{2}}\right) \right\} \times$$

$$\times \int_0^\infty \xi \exp\left[-\frac{(\xi + y)^2}{4y}\right] \left[\Phi\left(\frac{y_3 \xi + y_2}{\sqrt{2y_2}}\right) - \exp(-y_3 \xi) \Phi\left(\frac{-y_3 \xi + y_2}{\sqrt{2y_2}}\right) \right] d\xi.$$

Выражение (16) неудобно для практических расчетов в силу сложности определения величины δ . В этой связи заметим, что согласно (17) $z_{1i}^2 \rightarrow \infty$, $z_{2i}^2 \rightarrow \infty$, если $\mu_1 \rightarrow \infty$ и $q > 0$. Тогда при выполнении (3) и не слишком малых q можно считать $z_{1i}^2 \gg 1$, $z_{2i}^2 \gg 1$ и аналогично [8] вместо (16) использовать более простую аппроксимацию вида

$$w_i(\eta) = \begin{cases} z_{i1}^2 \Psi(z_{i1}^2(\eta_{0i} - \eta), 1/R_i), & \eta < \eta_{0i}, \\ z_{i2}^2 \Psi(z_{i2}^2(\eta - \eta_{0i}), R_i), & \eta \geq \eta_{0i}, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$\Psi(x, y) = \Phi\left(\sqrt{|x|/2}\right) - 1 + (2y + 1) \exp[|x|y(y + 1)] \left[1 - \Phi\left((2y + 1)\sqrt{|x|/2}\right) \right].$$

Точность формулы (18) возрастает с увеличением μ_{\min} (3) и z_{1i} , z_{2i} .

Используя (15), (18) нетрудно записать асимптотические выражения для условных смещений $b(\lambda_m | \lambda_0) = \langle \lambda_m - \lambda_0 \rangle$, $b(\Omega_m | \Omega_{02}) = \langle \Omega_m - \Omega_{02} \rangle$ и рассеяний $V(\lambda_m | \lambda_0) = \langle (\lambda_m - \lambda_0)^2 \rangle$, $V(\Omega_m | \Omega_{02}) = \langle (\Omega_m - \Omega_{02})^2 \rangle$ оценок (5):

$$b(\lambda_m | \lambda_0) = T(1 - \langle \eta_{m1} - \eta_{01} \rangle), \quad b(\Omega_m | \Omega_{02}) = \Omega_{01}(\langle \eta_{m2} - \eta_{02} \rangle + 1),$$

$$V(\lambda_m | \lambda_0) = T^2 \langle (\eta_{m1} - \eta_{01})^2 \rangle, \quad V(\Omega_m | \Omega_{02}) = \Omega_{01}^2 \langle (\eta_{m2} - \eta_{02})^2 \rangle, \quad (19)$$

где

$$\langle \eta_{m1} - \eta_{01} \rangle = \int_{\tilde{\Upsilon}_{2-1}^{1-\tilde{\Lambda}_1}}^{1-\tilde{\Lambda}_2} (\eta - \eta_{01}) w_1(\eta) d\eta, \quad \langle (\eta_{m1} - \eta_{01})^2 \rangle = \int_{\tilde{\Upsilon}_{2-1}^{1-\tilde{\Lambda}_1}}^{1-\tilde{\Lambda}_2} (\eta - \eta_{01})^2 w_1(\eta) d\eta,$$

$$\langle \eta_{m2} - \eta_{02} \rangle = \int_{\tilde{\Upsilon}_{1-1}}^{\tilde{\Upsilon}_{2-1}} (\eta - \eta_{02}) w_2(\eta) d\eta, \quad \langle (\eta_{m2} - \eta_{02})^2 \rangle = \int_{\tilde{\Upsilon}_{1-1}}^{\tilde{\Upsilon}_{2-1}} (\eta - \eta_{02})^2 w_2(\eta) d\eta. \quad (20)$$

Точные значения интегралов (20) при фиксированных z_{1i}, z_{2i} могут быть найдены только с использованием численных методов. Однако при выполнении условий $z_{1i} \gg 1, z_{2i} \gg 1$, следуя [8], вместо (19), (20) можно предложить более простые асимптотические аппроксимации для смещений и рассеяний оценок (5). Действительно, в этом случае функция $w_i(\eta)$ существенно отлична от нуля в малой окрестности точки η_{0i} , так что без заметной потери в точности пределы интегрирования в (20) можно расширить до бесконечности. Тогда после выполнения соответствующих математических операций получаем

$$\begin{aligned} \langle \eta_{mi} - \eta_{0i} \rangle &= [z_{1i}^2 R_i (R_i + 2) - z_{2i}^2 (2R_i + 1)] / z_{1i}^2 z_{2i}^2 (R_i + 1)^2, \\ \langle (\eta_{mi} - \eta_{0i})^2 \rangle &= 2 [z_{1i}^4 R_i (2R_i^2 + 6R_i + 5) + z_{2i}^4 (5R_i^2 + 6R_i + 2)] / z_{1i}^4 z_{2i}^4 (R_i + 1)^3. \end{aligned} \quad (21)$$

Точность формул (21) возрастает с увеличением μ_{\min} (3) и z_{1i}, z_{2i} . При малых значениях z_{1i}, z_{2i} расчеты, выполняемые на основе (21) могут приводить к большой погрешности, поскольку формулы (21) в отличие от (20) не учитывают ограниченную протяженность априорных интервалов возможных значений неизвестных параметров λ_m, Ω_m .

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

С целью установления границ применимости найденных приближенных формул для характеристик синтезированного максимально правдоподобного алгоритма оценки, было выполнено статистическое имитационное моделирование работы измерителя (5) на ЭВМ. В процессе моделирования на интервале $\tilde{t} \in [0, 1]$ (9) в дискретные моменты времени $\tilde{t}_k = k\Delta\tilde{t}$, $k = 0, \text{int} \{ 1/\Delta\tilde{t} \}$ для каждого значения $v_m = m\Delta v$ нормированной ширины полосы частот v (9) формировались отсчеты $\tilde{y}_{km} = \tilde{y}(\tilde{t}_k, \Omega_{01} v_m) \sqrt{T/N_0}$ (8), как описано в [9]. По сформированным отсчетам \tilde{y}_{km} , следуя [9], вычислялись отсчеты $M_{1nm} = M_1(n\Delta l, m\Delta v)$, $M_{2m} = M_1(n\Delta l, m_0\Delta v)$, $S_{3nm} = S_3(n\Delta l, m\Delta v)$ случайных полей $M_1(l, v)$, $M_2(l)$ (8) и детерминированной функции $S_3(l, v)$ (8) на интервалах $[\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2]$, $[\tilde{\Upsilon}_1, \tilde{\Upsilon}_2]$. Здесь значение m_0 соответствует частоте Ω_{01} , так что $m_0\Delta v = 1$. Шаг дискретизации по переменной \tilde{t} выбирался равным $\Delta\tilde{t} = 0,05/\mu_{\min}$, а по переменным l и v – равным $\Delta l = \Delta v = 0,001$. В результате относительная среднеквадратическая погрешность ступенчатой аппроксимации функционала $M(l, v)$ (7) на основе сформированных отсчетов, рассчитанная по методике [10], не превышала 10 %.

Нормированные ОМП $l_m = \lambda_m/T$, $v_m = \Omega_m/\Omega_{01}$ (6) определялись по номерам n_{\max}, m_{\max} наибольшего отсчета M_{nm} функционала (7) как $l_m = n_{\max}\Delta l$, $v_m = m_{\max}\Delta v$. На основе ряда оценок, полученных в ходе обработки N реализаций случайного поля $M(l, v)$, рассчитаны значения выборочных смещений и рассеяний оценок l_m, v_m для заданного набора параметров l_0, v_{02}, q, μ_1 .

На рис. 2, 3 представлены некоторые полученные в процессе статистического моделирования результаты, а также соответствующие им теоретические кривые. Для получения каждого экспериментального значения обрабатывалось не менее 10^4 реализаций $x(t)$ (2) при $\tilde{\Lambda}_1 = 0,1$, $\tilde{\Lambda}_2 = 0,9$, $\tilde{\Upsilon}_1 = 0,5$, $\tilde{\Upsilon}_2 = 2$ (9). Это позволило обеспечить отклонение границ доверительных интервалов от экспериментальных данных не более чем на 15 % с вероятностью 0,9.

На рис. 2 нанесены теоретические зависимости нормированного условного рассеяния $V_l = V(\lambda_m | \lambda_0)/T^2$ оценки момента скачкообразного изменения ширины полосы частот λ_m (5) как функции нормированной величины q (9) спектральной плотности случайного процесса $\xi(t)$ (1). Сплошные линии рассчитаны по более точным формулам (18)–(20), а штриховые линии – по асимптотическим формулам (21). Кривые 1 построены для $v_{02} = 1,5$, $\mu_1 = 500$, кривые 2 – $v_{02} = 1,5$, $\mu_1 = 1200$, кривые 3 – $v_{02} = 1,75$, $\mu_1 = 1200$. Соответствующие экспериментальные значения условного рассеяния момента разладки ширины полосы частот

нанесены квадратиками, крестиками и ромбиками. При этом истинное значение параметра l_0 (10) принималось равным 0,5.

На рис. 3 сплошными и штриховыми линиями показаны аналогичные теоретические зависимости нормированного условного рассеяния $V_v = V(\Omega_m | \Omega_{02}) / \Omega_{01}^2$ оценки ширины полосы частот после разладки Ω_m (5) от параметра q , рассчитанные согласно (18)–(20) и (21). Кривые 1 получены при $l_0 = 0,75$, $\mu_1 = 500$, кривые 2 — $l_0 = 0,75$, $\mu_1 = 1000$, кривые 3 — $l_0 = 0,5$, $\mu_1 = 1000$. Соответствующие экспериментальные значения условного рассеяния момента разладки ширины полосы частот нанесены квадратиками, крестиками и ромбиками. При этом истинное значение параметра v_{02} (10) принималось равным 0,5.

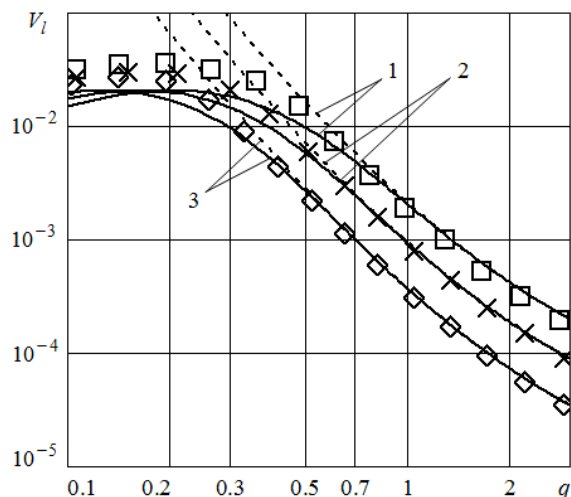


Рис. 2. Зависимости нормированного рассеяния оценки момента скачкообразного изменения ширины полосы частот.

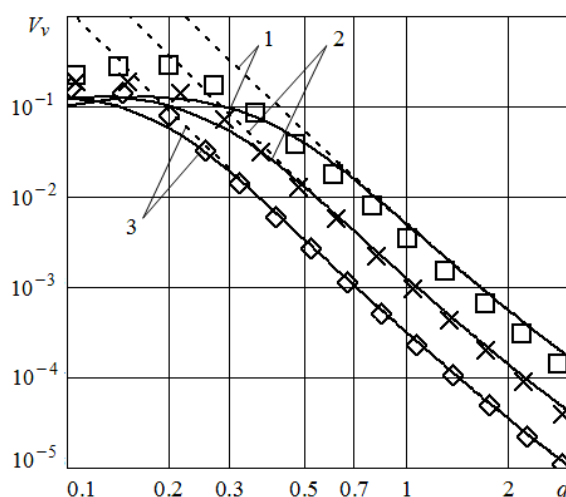


Рис. 3. Зависимости нормированного рассеяния оценки ширины полосы частот после разладки.

Как следует из рис. 2, 3 и дополнительного проведенного анализа, полученные теоретические зависимости для рассеяний $V(\lambda_m | \lambda_0)$, $V(\Omega_m | \Omega_{02})$ (19), (20) хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными, по крайней мере, при $\mu_1 \geq 100$, $q \geq 0,1$, $\tilde{\Lambda}_1 \geq 0,1$, $\tilde{\Lambda}_2 \leq 0,9$, $|\Omega_{02} - \Omega_{01}| / \Omega_{01} \geq 0,1$. В условиях достаточно больших выходных ОСШ, когда $z \geq 3$ (12), для расчета рассеяний оценки момента и величины разладки ширины полосы частот случайного процесса можно использовать более простые аппроксимации (21).

Как отмечено в [9], при весьма больших значениях q может наблюдаться расхождение теоретических, полученных с помощью (19), (20) или (19), (21), и экспериментальных значений рассеяний $V(\lambda_m | \lambda_0)$, $V(\Omega_m | \Omega_{02})$. Это объясняется тем, что выводе формул (11) для характеристик функционала $M(l, v)$ (7) были опущены величины порядка времени корреляции процесса $\xi(t)$. Таким образом, когда значения рассеяния нормированных ОМП λ_m/T , Ω_m/Ω_{02} оказываются сопоставимыми с величинами порядка μ_{\min}^{-2} (3), погрешность формул (19)–(21) может быть весьма значительной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для определения разладки быстрофлуктуирующего гауссовского случайного процесса может быть эффективно использован метод максимального правдоподобия. Применение этого метода позволяет в пренебрежении величинами порядка времени корреляции анализируемого случайного процесса получить алгоритмы измерения неизвестных момента разладки и скачкообразно меняющихся частотных параметров случайного процесса, технически существенно более простые по сравнению с известными аналогами. С помощью аддитивной локально-

марковской аппроксимации решающей статистики удастся записать замкнутые аналитические выражения для характеристик эффективности максимально правдоподобного измерителя.

Методами статистического моделирования установлено, что полученные теоретические результаты хорошо согласуются с соответствующими экспериментальными данными в широком диапазоне значений параметров реализации наблюдаемых данных. Как показывает дополнительный анализ, синтезированные на основе предложенного подхода измерители без заметных потерь в качестве функционирования могут использоваться также при приеме быстрофлуктуирующих негауссовских случайных процессов с неизвестными кусочно-постоянными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жиглявский, А. А. Обнаружение разладки случайных процессов в задачах радиотехники / А. А. Жиглявский, А. Е. Красковский. — Л. : ЛГУ, 1988.
2. Клигене, Н. Методы обнаружения моментов изменения свойств случайных процессов / Н. Клигене, Л. Телькснис // Автоматика и телемеханика. — 1983. — Вып. 10. — С. 5–56.
3. Basseville, M. Detection of Abrupt Changes: Theory and Application / M. Basseville, I. V. Nikiforov. — New Jersey : Prentice-Hall, 1993.
4. Трифонов, А. П. Обнаружение стохастических сигналов с неизвестными параметрами / А. П. Трифонов, Е. П. Нечаев, В. И. Парфенов. — Воронеж : ВГУ, 1991.
5. Chernoyarov, O. V. The decision statistics of the Gaussian signal against correlated Gaussian interferences / O. V. Chernoyarov, M. M. Shahmoradian, K. S. Kalashnikov // Proceeding of the 2016 International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences and Engineering (MCSEE2016), Shenzhen, China, October 30-31, 2016. — P. 426–431.
6. Трифонов, А. П. Совместное различение сигналов и оценка их параметров на фоне помех / А. П. Трифонов, Ю. С. Шинаков. — М. : Радио и связь, 1986.
7. Kailath, T. Some integral equations with nonrational kernals / T. Kailath // IEEE Transactions on Information Theory. — 1966. — V. 12, № 4. — P. 442–447.
8. Трифонов, А. П. Статистические свойства высоты и положения абсолютного максимума марковского случайного процесса типа Башелье / А. П. Трифонов, Ю. Э. Корчагин, М. Б. Беспалова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2014. — № 4. — С. 54–65.
9. Application of the local Markov approximation method for the analysis of information processes processing algorithms with unknown discontinuous parameters / O. V. Chernoyarov et. al. // Applied Mathematical Sciences. — 2014. — V. 8, № 90. — P. 4469–4496.
10. Захаров, А. В. Обнаружение скачкообразного случайного возмущения / А. В. Захаров, А. П. Трифонов, Е. В. Проняев // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2001. — № 6. — С. 29–37.

REFERENCES

1. Zhigljavsky A.A., Krasnovsky A.E. Detection of the abrupt change of random processes in radio engineering problems. [Zhigljavsky A.A., Krasnovsky A.E. Obnaruzhenie razladki sluchainykh protsessov v zadachakh radiotekhniki]. Leningrad: Leningrad State University, 1988.
2. Kligene N., Tel'ksnis L. Methods to determine the times when the properties of random processes change. [Kligene N., Tel'ksnis L. Metody obnaruzheniya momentov izmeneniya svoisnv sluchainykh protsessov]. *Avtomatika i Telemekhanika — Automation and Remote Control*, 1983, vol. 41, no. 10, pp. 1241–1283.
3. Basseville M., Nikiforov I.V. Detection of abrupt changes: Theory and application. New Jersey: Prentice-Hall, 1993.

4. Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Detection of stochastic signals with unknown parameters. [Trifonov A.P., Nechaev E.P., Parfenov V.I. Obnaruzhenie stokhasticheskikh signalov s neizvestnymi parametrami]. Voronezh: Voronezh State University, 1991.

5. Chernoyarov O.V., Shahmoradian M.M., Kalashnikov K.S. The decision statistics of the Gaussian signal against correlated Gaussian interferences. Proceeding of the 2016 International Conference on Mathematical, Computational and Statistical Sciences and Engineering (MCSEE2016), Shenzhen, China, October 30–31, 2016, pp. 426–431.

6. Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Joint discrimination of signals and estimation of their parameters against background. [Trifonov A.P., Shinakov Yu.S. Sovmestnoe razlichenie signalov i otsenka ikh parametrov na fone pomekh]. Moscow: Radio i Svyaz', 1986.

7. Kailath T. Some integral equations with nonrational kernels. IEEE Transactions on Information Theory, 1966, vol. 12, no. 4, pp. 442–447.

8. Trifonov A.P., Korchagin Y.E., Bespalova M.B. Statistical properties of height and provisions of absolute maximum Markov processes Bachelier type. [Trifonov A.P., Korchagin Y.E., Bespalova M.B. Statisticheskie svoystva vysoty i polozheniya absolyutnogo maksimuma markovskogo sluchainogo protsessa tipa Bachel'e]. Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2014, no. 4, pp. 54–65.

9. Chernoyarov O.V., Sai Si Thu Min, Salnikova A.V., Shakhtarin B.I., Artemenko A.A. Application of the local Markov approximation method for the analysis of information processes processing algorithms with unknown discontinuous parameters. Applied Mathematical Sciences, 2014, vol. 8, no. 90, pp. 4469–4496.

10. Zakharov A.V., Trifonov A.P., Pronyaev E.V. Detection of step random disturbance. [Zakharov A.V., Trifonov A.P., Pronyaev E.V. Obnaruzhenie skachkoobraznogo sluchainogo vozmuscheniya]. Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya — Journal of Computer and Systems Sciences International, 2001, no. 6, pp. 29–37.

Голпайегани Лейла Абдолмаджид, аспирант кафедры электроники и наноэлектроники Национального исследовательского университета “МЭИ”, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: leila.golpaiegany@gmail.com

Тел.: +7(495)362-71-68

Golpaiegani Leila Abdolmajid, postgraduate student of the Department of Electronics and Nanoelectronics of the National Research University “MPEI”, Moscow, Russian Federation

E-mail: leila.golpaiegany@gmail.com

Тел.: +7(495)362-71-68

Калашников Константин Сергеевич, кандидат технических наук, старший научный сотрудник кафедры радиофизики Воронежского государственного университета, г. Воронеж, Российская Федерация

E-mail: kalashks@gmail.com

Тел.: +7(473)220-89-16

Kalashnikov Konstantin Sergeevich, Candidate of technical sciences, Senior Scientist at the Department of Radio Physics of the Voronezh State University, Voronezh, Russian Federation

E-mail: kalashks@gmail.com

Тел.: +7(473)220-89-16

Фаульгабер Александр Николаевич, аспирант кафедры электроники и наноэлектроники Национального исследовательского университета “МЭИ”, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: lytalalexandr@mail.ru

Тел.: +7(495)362-71-68

Faulgaber Alexander Nikolaevich, postgraduate student of the Department of Electronics and Nanoelectronics of the National Research University “MPEI”, Moscow, Russian Federation

E-mail: lytalalexandr@mail.ru

Тел.: +7(495)362-71-68

Шахморadian Махди Мохмадджафар, аспирант кафедры электроники и наноэлектроники Национального исследовательского университета “МЭИ”, г. Москва, Российская Федерация

E-mail: mehdi_shahmoradian@yahoo.com

Тел.: +7(495)362-71-68

Shahmoradian Mahdi Mohammadjafar, postgraduate student of the Department of Electronics and Nanoelectronics of the National Research University “MPEI”, Moscow, Russian Federation

E-mail: mehdi_shahmoradian@yahoo.com

Tel.: +7(495)362-71-68