УДК 517.922

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ДЕСКРИПТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В. И. Усков

Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова

Поступила в редакцию 30.01.2017 г.

Аннотация. Исследуется задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка с необратимым оператором при производной в банаховом пространстве. Определяются условия, при которых решение задачи Коши единственно или неединственно; находится это решение. Для решения задачи используется модифицированный метод каскадной декомпозиции уравнения, отличный от ранее применяемых. С помощью этого метода понижаются требования на гладкость операторов, построенных с помощью операторных коэффициентов уравнения.

Ключевые слова: задача Коши, дескрипторное уравнение, фредгольмов оператор, банахово пространство, каскадная декомпозиция.

SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR FIRST-ORDER DESCRIPTOR EQUATION

V. I. Uskov

Abstract. The Cauchy problem for the first order differential equation with an irreversible operator under the derivative in a Banach space is studied. Conditions under which the solution of the Cauchy problem is unique or non-unique are defined; this solution is found. To solve problems, we use a modified method of cascade decomposition of the equation, different from the previous ones. With the help of this method, the requirements for the smoothness of operators, constructed with the help of the operator coefficients of the equations, are lowered.

Keywords: Cauchy problem, descriptor equation, Fredholm operator, Banach space, cascade decomposition.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть A — линейный оператор, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, с всюду плотной областью определения $\operatorname{dom} A$ в E_1.

Свойство. *Фредгольмов оператор с нулевым индексом* (далее, Ф-оператор) вполне определяется следующим свойством:

$$E_1 = \operatorname{Coim} A \oplus \operatorname{Ker} A, \quad E_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Coker} A, \tag{1}$$

где $\operatorname{Ker} A$ — ядро, $\operatorname{Im} A$ — образ, $\operatorname{Coker} A$ — дефектное подпространство, $\operatorname{Coim} A$ — прямое дополнение к $\operatorname{Ker} A$; $\dim \operatorname{Ker} A = \dim \operatorname{Coker} A < \infty$; сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $\operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1} : \operatorname{Im} A \to \operatorname{Coim} A \cap \operatorname{dom} A$ [1].

Для Ф-оператора A вводятся проекторы P на $\operatorname{Ker} A$, Q на $\operatorname{Coker} A$, отвечающие разложениям (1), единичный оператор I в соответствующем подпространстве и полуобратный оператор $A^- = \widetilde{A}^{-1}(I - Q)$.

Рассматривается задача Коши:

$$A\frac{dx}{dt} = B(t)x(t) + F(t), \tag{2}$$

$$x(0) = x^0 \in E_1 \cap \operatorname{dom} A, \tag{3}$$

где A, $B(t)$ — линейные замкнутые, вообще говоря, неограниченные операторы, действующие из E_1 в E_2, $\overline{\operatorname{dom}}\, A = \overline{\operatorname{dom}}\, B(t) = E_1$; A — стационарный Ф-оператор; $F(t)$ — заданная вектор-функция со значениями в E_2; $t \in [0,T]$.

Требуется определить условия, при которых задача имеет решение, единственное или неединственное, найти это решение.

Под решением задачи (2), (3) подразумевается дифференцируемая функция $x(t)$, удовлетворяющая (2), (3) при всех $t \in [0,T]$.

Решение поставленной задачи актуально, поскольку уравнением (2) описываются экономические процессы, марковские процессы, процессы теплопередачи, колебания молекул ДНК, в химической кинетике и т.д. Уравнения вида (2) с вырожденным оператором при производной называются *алгебро-дифференциальными, дифференциально-алгебраическими* или *дескрипторными*. Проблема изучения дескрипторных уравнений была поставлена в 50-х годах прошлого столетия на семинаре проф. Л.А. Люстерника в МГУ. Исследования проводились и проводятся в работах воронежской математической школы (С.Г. Крейн, А.Г. Баскаков, С.П. Зубова и др.), челябинской математической школы (Г.А. Свиридюк, В.Е. Федоров и их ученики), иркутской математической школы (Ю.Е. Бояринцев, Н.А. Сидоров, А.А. Щеглова, В.Ф. Чистяков, М.Ф. Фалалеев и их ученики), екатеринбургской (И.В. Мельникова и ее ученики). За рубежом активные исследования ведут A. Favini, A. Yagi, S. Campbell, P. Kunkel, V. Mehrmann [2], R. Marz, P. Chen, K.J. Engel, P. Nagel и др.

Задача (2), (3) с Ф-оператором A решена в работе С.П. Зубовой [3]. Для решения задачи применялся метод каскадной декомпозиции, позволяющий расщепить исходное уравнение на уравнения в подпространствах.

В настоящей работе предлагается модифицированный метод каскадной декомпозиции, позволяющий понизить требования на гладкость операторов, построенных с помощью операторных коэффициентов уравнения. В статьях С.П. Зубовой и автора рассматривался случай одного шага этого метода [4] и двух шагов [5]. Требуется обобщить эти результаты на случай произвольного количества шагов.

Для решения задачи нам потребуется следующий результат о решении линейного уравнения с Ф-оператором A [6].

Лемма 1. *Линейное уравнение*

$$Av = w, \quad v \in E_1 \cap \operatorname{dom} A, \quad w \in E_2, \tag{4}$$

равносильно системе

$$v = A^- w + Pv, \tag{5}$$

$$Qw = 0 \tag{6}$$

с некоторым элементом $Pv \in \operatorname{Ker} A$.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ

Перейдем к решению поставленной задачи.

Для операторов $A_j(t)$ вводятся проекторы $P_j(t)$ на $\operatorname{Ker} A_j(t)$, $Q_j(t)$ на $\operatorname{Coker} A_j(t)$, отвечающие разложениям:

$$\operatorname{Ker} A_{j-1}(t) = \operatorname{Coim} A_j(t) \oplus \operatorname{Ker} A_j(t), \quad \operatorname{Coker} A_{j-1}(t) = \operatorname{Im} A_j(t) \oplus \operatorname{Coker} A_j(t), \tag{7}$$

и полуобратные операторы $A_j^-(t) = \widetilde{A}_j^{-1}(t)(I - Q_j(t))$, $\widetilde{A}_j^{-1}(t) : \operatorname{Im} A_j(t) \to \operatorname{Coim} A_j(t) \cap \operatorname{dom} A_j(t)$, $j \geqslant 1$. Здесь $A_0 = A$, $P_0 = P$, $Q_0 = Q$. Пусть операторы $Q_j(t)S_{j-1}(t)$ сильно непрерывно дифференцируемы. Строятся операторы $A_j(t)$ по следующим формулам:

$$\begin{gathered} S_0(t) = Q_0 B(t), \quad T_0(t) = A^- B(t), \quad A_1(t) = S_0(t)P_0, \quad \widehat{S}_0(t) = I - A_1^-(t)S_0(t), \\ A_{j+1}(t) = Q_j(t)S_{j-1}(t)T_0(t)P_j(t), \quad \widehat{S}_j(t) = \widehat{S}_{j-1}(t) - A_{j+1}^-(t)S_j(t), \\ T_j(t) = T_0(t)\widehat{S}_{j-1}(t), \quad S_j(t) = \frac{dQ_jS_{j-1}}{dt} + Q_j(t)S_{j-1}(t)T_j(t), \quad j \geqslant 1. \end{gathered} \tag{8}$$

Пусть операторы $Q_j(t)F_{j-1}(t)$ непрерывно дифференцируемы. Строятся операторы, зависящие от $F(t)$:

$$\begin{gathered} F_0(t) = Q_0F(t), \quad \Lambda_0F(t) = A^-F(t), \quad \widehat{F}_0(t) = -A_1^-(t)F_0(t), \\ \widehat{F}_j(t) = \widehat{F}_{j-1}(t) - A_{j+1}^-(t)F_j(t), \quad \Lambda_jF(t) = \Lambda_0F(t) + T_0(t)\widehat{F}_{j-1}(t), \\ F_j(t) = \frac{dQ_jF_{j-1}}{dt} + Q_j(t)S_{j-1}(t)\Lambda_jF(t), \quad j \geqslant 1. \end{gathered} \tag{9}$$

Условие S**.** Пусть $A_j(t)$, $j = 1,2,\ldots$ — Ф-операторы при всех $t \in [0,T]$; $\dim \operatorname{Ker} A_j(t) = \dim \operatorname{Coker} A_j(t) = n_j = \mathrm{const}$ при всех $t \in [0,T]$.

Преобразуем уравнение (2) в несколько шагов, применяя на каждом шаге лемму 1 для уравнения вида $A_j\varphi(t) = \psi(t)$.

Замечание 1. *Если оператор A_j нулевой ($j = 1,2,\ldots$), то $P_j = I$, $Q_j = I$. В таком случае $A_j^- = 0$ и процесс расщепления пространств продолжается дальше.*

1 шаг. Уравнение (2) равносильно системе

$$\frac{dx}{dt} = A^-B(t)x(t) + A^-F(t) + P\frac{dx}{dt}, \tag{10}$$

$$QBx(t) + QF(t) = 0. \tag{11}$$

с некоторым элементом $P\dfrac{dx}{dt}$.

Запишем уравнение (10), перенеся слагаемое $P\dfrac{dx}{dt}$ в левую часть, учитывая замкнутость оператора A:

$$\frac{d(I-P)x}{dt} = A^-B(t)x(t) + A^-F(t). \tag{12}$$

В силу Ф-свойства оператора A решение $x(t)$ можно представить в виде

$$x(t) = (I-P)x(t) + Px(t). \tag{13}$$

Подставив это представление в уравнение (12), получим уравнение в подпространстве $\operatorname{Coim} A$:

$$\frac{d(I-P)x}{dt} = A^-B(t)(I-P)x(t) + A^-B(t)Px(t) + A^-F(t) \tag{14}$$

с искомым элементом $Px(t) \in \operatorname{Ker} A$.

Для нахождения этого элемента подставим равенство (13) в соотношение (11):

$$QB(t)(I-P)x(t) + QB(t)Px(t) + QF(t) = 0. \tag{15}$$

Это соотношение является уравнением относительно элемента $Px(t)$ с Ф-оператором $A_1(t) = QB(t)P : \operatorname{Ker} A \to \operatorname{Coker} A$:

$$A_1(t)(Px(t)) = -QB(t)(I-P)x(t) - QF(t)$$

или в обозначениях (8), (9):

$$A_1(t)(P_0x(t)) = -S_0(t)(I-P_0)x(t) - F_0(t). \tag{16}$$

Замечание 2. *В отличие от работы [3] здесь на первом шаге не происходит процесс дифференцирования.*

Шаг 2. Теперь требуется найти элемент $Px(t)$. Уравнение (16) равносильно системе

$$P_0x(t) = -A_1^-(t)S_0(t)(I-P_0)x(t) - A_1^-(t)F_0(t) + P_1(t)x(t), \tag{17}$$

$$Q_1(t)S_0(t)(I-P_0)x(t) + Q_1(t)F_0(t) = 0 \tag{18}$$

с некоторым элементом $P_1(t)x(t) \in \operatorname{Ker} A_1(t)$. Продифференцируем соотношение (18):

$$\frac{dQ_1S_0}{dt}(I-P_0)x(t) + Q_1(t)S_0(t)\frac{d(I-P_0)x(t)}{dt} + \frac{dQ_1F_0}{dt} = 0. \tag{19}$$

Подставим выражение (17) для $Px(t) = P_0x(t)$ в соотношение (14). Получим уравнение

$$\frac{d(I-P_0)x(t)}{dt} = T_1(t)(I-P_0)x(t) + \Lambda_1F(t) + T_0(t)P_1(t)x(t). \tag{20}$$

Подставим равенство (20) для $\dfrac{d(I-P_0)x(t)}{dt}$ в (19). Получим уравнение для нахождения элемента $P_1(t)x(t)$ с Ф-оператором $A_2(t) = Q_1(t)S_0(t)T_0(t)P_1(t) : \operatorname{Ker} A_1(t) \to \operatorname{Coker} A_1(t)$:

$$A_2(t)(P_1(t)x(t)) = -S_1(t)(I-P_0)x(t) - F_1(t). \tag{21}$$

Шаг q. Проделав аналогичные действия с уравнением (21), на q шаге получим равенство

$$\frac{d(I-P)x(t)}{dt} = T_{q-1}(t)(I-P)x(t) + \Lambda_{q-1}F(t) + T_0(t)P_{q-1}(t)x(t) \tag{22}$$

и уравнение

$$A_q(t)(P_{q-1}(t)x(t)) = -S_{q-1}(t)(I-P)x(t) - F_{q-1}(t). \tag{23}$$

Таким образом, получено следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть выполнено условие S, $j = 1,2,\dots,q$. Пусть $Q_j(t)S_{j-1}(t)$ — сильно непрерывно дифференцируемые операторы, а $Q_j(t)F_{j-1}(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $j = 1,2,\dots,q$, при всех $t \in [0,T]$. Тогда уравнение (2) равносильно уравнению (22) и условиям:*

$$\begin{aligned} &S_0(t)x(t) + F_0(t) = 0, \\ &Q_j(t)S_{j-1}(t)(I-P)x(t) + Q_j(t)F_{j-1}(t) = 0, \quad j = 1,2,\dots,q-1. \end{aligned} \tag{24}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} E_1 &= \operatorname{Coim} A \oplus \operatorname{Coim} A_1 \oplus \operatorname{Coim} A_2 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Coim} A_q \oplus \operatorname{Ker} A_q, \\ E_2 &= \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} A_1 \oplus \operatorname{Im} A_2 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} A_q \oplus \operatorname{Coker} A_q. \end{aligned} \tag{25}$$

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Решим задачу (2), (3) в следующих случаях.

Случай 1. Существует такое число $p \in \mathbb{N}$, что $n_{p-1} > n_p = 0$.

Случай 2. Существует такое число $p \in \mathbb{N}$, что $n_{p-1} > n_p = n_{p+1} = \ldots$

Рассмотрим **случай 1**. Оператор $A_p(t)$ обратим (в $\operatorname{Ker} A_{p-1}(t)$), расщепление уравнения (2) заканчивается. Тогда

$$\begin{aligned} E_1 &= \operatorname{Coim} A \oplus \operatorname{Coim} A_1 \oplus \operatorname{Coim} A_2 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Coim} A_p, \\ E_2 &= \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} A_1 \oplus \operatorname{Im} A_2 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} A_p. \end{aligned} \tag{26}$$

На p шаге имеем уравнение (23) относительно элемента $P_{p-1}(t)x(t)$

$$A_p(t)(P_{p-1}(t)x(t)) = -S_{p-1}(t)(I-P)x(t) - F_{p-1}(t), \tag{27}$$

решение которого равно

$$P_{p-1}(t)x(t) = -A_p^{-1}(t)S_{p-1}(t)(I-P)x(t) - A_p^{-1}(t)F_{p-1}(t). \tag{28}$$

На каждом шаге при расщеплении уравнений были получены выражения для элементов $P_j(t)x(t)$:

$$P_j(t)x(t) = -A_{j+1}^-(t)S_j(t)(I-P_0)x(t) - A_{j+1}^-(t)F_j(t) + P_{j+1}(t)x(t). \tag{29}$$

Взяв в этом выражении последовательно $j = p-1$, $j = p-2$, $\ldots$, $j = 0$ с применением равенства (28), получим соотношение для элемента $P_0x(t)$:

$$P_0x(t) = Px(t) = \left(-\sum_{k=0}^{p-1} A_{p-k}^-(t)S_{p-k-1}(t)\right)(I-P)x(t) + \left(-\sum_{k=0}^{p-1} A_{p-k}^-(t)F_{p-k-1}(t)\right) \tag{30}$$

(здесь примем $A_p^{-1}(t) = A_p^-(t)$).

Подставив выражение (30) в равенство (14), получим уравнение для нахождения функции $(I-P)x(t)$:

$$\frac{d(I-P)x}{dt} = T_p(t)(I-P)x(t) + \Lambda_p F(t). \tag{31}$$

Определим для него начальное условие. Из представления (13) и того, что $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Coim} A = \{0\}$, вытекает

$$(I-P)x(0) = (I-P)x^0. \tag{32}$$

Пусть оператор $T_p(t)(I-P) : \operatorname{Coim} A \to \operatorname{Coim} A$ — ограниченный и сильно непрерывный, а функция $\Lambda_p F(t)$ непрерывна при каждом t. Тогда, применив результаты монографии проф. С.Г. Крейна [7], получим решение задачи (31), (32):

$$(I-P)x(t) = U(t,0)(I-P)x^0 + \int_0^t U(t,s)\Lambda_p F(s)ds, \tag{33}$$

где $U(t,s)$ — эволюционный оператор, порожденный оператором $T_p(t)$.

Подставив в (13) выражения (30), (33), получим решение поставленной задачи:

$$x(t) = \widehat{S}_{p-1}(t)\left(U(t,0)(I-P)x^0 + \int_0^t U(t,s)\Lambda_p F(s)\ ,ds\right) + \widehat{F}_{p-1}(t). \tag{34}$$

Таким образом, получена следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие S, $j = 1,2,\ldots,p-1$. Пусть существует такое число $p \in \mathbb{N}$, что оператор $A_p(t)$ обратим. Пусть $Q_j(t)S_{j-1}(t)$ — сильно непрерывно дифференцируемые операторы, а $Q_j(t)F_{j-1}(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $j = 1,2,\ldots,p-1$, при всех $t \in [0,T]$. Пусть оператор $T_p(t)(I-P) : \operatorname{Coim} A \to \operatorname{Coim} A$ ограниченный и сильно* *непрерывный, а функции* $\Lambda_p F(t)$, $\widehat{F}_{p-1}(t)$ *непрерывны при каждом* t. *Тогда решение задачи (2), (3) существует в том и только в том случае, когда выполняются условия:*

$$\begin{aligned} &S_0(0)x^0 + F_0(0) = 0, \\ &Q_j(0)S_{j-1}(0)(I-P)x^0 + Q_j(0)F_{j-1}(0) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,p-1. \end{aligned} \tag{35}$$

При выполнении этих условий решение $x(t)$ *единственно, имеет вид (34).*

Оно обладает свойством:

$$\begin{aligned} &S_0(t)x(t) + F_0(t) \equiv 0, \\ &Q_j(t)S_{j-1}(t)(I-P)x(t) + Q_j(t)F_{j-1}(t) \equiv 0, \quad j = 1,2,\ldots,p-1, \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \tag{36}$$

В **случае 2** имеем $A_{p+1}(t) = A_{p+2}(t) = \ldots = 0$. Тогда

$$\begin{aligned} &E_1 = \operatorname{Coim} A \oplus \operatorname{Coim} A_1 \oplus \operatorname{Coim} A_2 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Coim} A_p \oplus \operatorname{Ker} A_p, \\ &E_2 = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} A_1 \oplus \operatorname{Im} A_2 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} A_p \oplus \operatorname{Coker} A_p. \end{aligned} \tag{37}$$

Расщепим уравнение (27):

$$P_{p-1}x(t) = -A_p^-(t)S_{p-1}(t)(I-P)x(t) - A_p^- F_{p-1}(t) + P_p x(t), \tag{38}$$

$$Q_p(t)S_{p-1}(t)(I-P)x(t) + Q_p(t)F_{p-1}(t) = 0. \tag{39}$$

Аналогичным образом приходим к уравнениям (22), (23) при $q = p+1$:

$$\frac{d(I-P)x(t)}{dt} = T_p(t)(I-P)x(t) + \Lambda_p F(t) + T_0(t)P_p(t)x(t), \tag{40}$$

$$A_{p+1}(t)(P_p(t)x(t)) = -S_p(t)(I-P)x(t) - F_p(t). \tag{41}$$

Поскольку $A_{p+1}(t) \equiv 0$, то элемент $P_p(t)x(t)$ определяется неединственно, и имеет место соотношение

$$S_p(t)(I-P)x(t) + F_p(t) = 0. \tag{42}$$

Равенства $A_{p+2}(t) = A_{p+3}(t) = \ldots \equiv 0$ так же влекут соотношения

$$S_{p+j}(t)(I-P)x(t) + F_{p+j}(t) = 0, \quad j = 1,2,\ldots \tag{43}$$

Решение задачи (40), (32) таково:

$$(I-P)x(t) = U(t,0)(I-P)x^0 + \int\limits_0^t U(t,s)(\Lambda_p F(s) + T_0(s)P_p(s)c(s))\,ds \tag{44}$$

с некоторой непрерывной функцией $c(t)$.

Аналогично приходим к соотношению для $Px(t)$:

$$Px(t) = \left(-\sum_{k=0}^{p-1} A_{p-k}^-(t)S_{p-k-1}(t)\right)(I-P)x(t) + \left(-\sum_{k=0}^{p-1} A_{p-k}^-(t)F_{p-k-1}(t)\right) + P_p(t)x(t). \tag{45}$$

Подставив выражения (45), (44) в представление (13), получим решение исходной задачи:

$$\begin{aligned} x(t) = &\widehat{S}_{p-1}(t)\left(U(t,0)(I-P)x^0 + \int\limits_0^t U(t,s)(\Lambda_p F(s) + T_0(s)P_p(s)c(s))\,ds\right) + \\ &+ \widehat{F}_{p-1}(t) + P_p(t)c(t). \end{aligned} \tag{46}$$

Таким образом, получен следующий результат.

Теорема 2. Пусть выполнено условие S, $j = 1,2,\dots,p$. Пусть существует такое число $p \in \mathbb{N}$, что оператор $A_{p+1}(t) = A_{p+2}(t) = \dots = 0$. Пусть $Q_j(t)S_{j-1}(t)$ — сильно непрерывно дифференцируемые операторы, а $Q_j(t)F_{j-1}(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $j = 1,2,\dots$, при всех $t \in [0,T]$. Пусть оператор $T_p(t)(I-P) : \mathrm{Coim}A \to \mathrm{Coim}A$ ограниченный и сильно непрерывный, а функции $\Lambda_p F(t)$, $\widehat{F}_{p-1}(t)$ непрерывны при каждом t. Тогда решение задачи (2), (3) существует в том и только в том случае, когда выполняются условия:

$$\begin{aligned}
&S_0(0)x^0 + F_0(0) = 0,\\
&Q_j(0)S_{j-1}(0)(I-P)x^0 + Q_j(0)F_{j-1}(0) = 0, \quad j = 1,2,\dots,p,\\
&S_{p+j}(0)(I-P)x^0 + F_{p+j}(0) = 0, \quad j = 0,1,\dots
\end{aligned} \tag{47}$$

При выполнении этих условий решение $x(t)$ неединственно, имеет вид (46). Оно обладает свойством:

$$\begin{aligned}
&S_0(t)x(t) + F_0(t) \equiv 0,\\
&Q_j(t)S_{j-1}(t)(I-P)x(t) + Q_j(t)F_{j-1}(t) \equiv 0, \quad j = 1,2,\dots,p,\\
&S_{p+j}(t)(I-P)x(t) + F_{p+j}(t) = 0, \quad j = 0,1,\dots, \quad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{48}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский, С. М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах / С. М. Никольский // Известия АН СССР. Серия математическая. — 1943. — Т. 7, вып. 3. — С. 147–166.

2. Kunkel, P. V. Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution / P. Kunkel, V. Mehrmann. — European Mathematical Society, 2006. — 377 p.

3. Зубова, С. П. О разрешимости задачи Коши для дескрипторного псевдорегулярного уравнения в банаховом пространстве / С. П. Зубова // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 192–198.

4. Баев, А. Д. Решение задач для дескрипторных уравнений методом декомпозиции / А. Д. Баев, С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 2. — С. 134–140.

5. Зубова, С. П. Решение задачи Коши для дескрипторного уравнения в случае двухшаговой декомпозиции / С. П. Зубова, В. И. Усков // Вестник Ижевского госунивеситета им. М. Т. Калашникова. Серия : Математика. — 2015. — № 1 (65). — С. 120–122.

6. Зубова, С. П. Асимптотическое решение задачи Коши для уравнения первого порядка с малым параметром в банаховом пространстве. Регулярный случай / С. П. Зубова, В. И. Усков // Математические заметки. — 2018. — Т. 103, вып. 3. — С. 393–404.

7. Крейн, С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С. Г. Крейн. — М. : Наука, 1967. — 464 с.

REFERENCES

1. Nikolsky S.M. Linear equations in linear normed spaces. [Nikol'skij S.M. Linejnye uravneniya v linejnyh normirovannyh prostranstvah]. *Izvestiya AN SSSR. Seriya matematicheskaya — Proceedings of AS USSR. Series: Mathematics*, 1943, vol. 7, no. 3, pp. 147–166.

2. Kunkel P., Mehrmann V. Algebraic Equations: Analysis and Numerical Solution. European Mathematical Society, 2006, 377 p.

3. Zubova S.P. About solvability of Cauchy problem for descriptor semiregular equation in a Banach space. [Zubova S.P. O razreshimosti zadachi Koshi dlya deskriptornogo psevdoregulyarnogo uravneniya v banahovom prostranstve]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta.*

Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics, 2013, no. 2, pp. 192–198.

4. Baev A.D., Zubova S.P., Uskov V.I. Solution of problems for descriptor equations by decomposition method. [Baev A.D., Zubova S.P., Uskov V.I. Reshenie zadach dlya deskriptornyh uravnenij metodom dekompozicii]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2013, no. 2, pp. 134–140.

5. Zubova S.P., Uskov V.I. Solution of Cauchy problem for descriptor equation in case of two-step decomposition. [Zubova S.P., Uskov V.I. Reshenie zadachi Koshi dlya deskriptornogo uravneniya v sluchae dvuhshagovoj dekompozicii]. *Vestnik Izhevskogo gosuniversiteta. Seriya: Matematika — Bulletin of State of University of M. T. Kalashnikov. Series: Mathematics*, 2015, no. 1 (65), pp. 120–122.

6. Zubova S.P., Uskov V.I. Asymptotic solution of Cauchy problem for first-order equation with small parameter In a Banach space. [Zubova S.P., Uskov V.I. Asimptoticheskoe reshenie zadachi Koshi dlya uravneniya pervogo poryadka s malym parametrom v banahovom prostranstve. Regulyarnyj sluchaj]. *Matematicheskie zametki — Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 3, pp. 393–404.

7. Krein S.G. Linear differential equations in a Banach space. [Krejn S.G. Linejnye differencial'nye uravneniya v banahovom prostranstve]. Moscow, 1967, 464 p.

Усков Владимир Игоревич, ассистент, Воронежский государственный лесотехнический университет им. Г. Ф. Морозова, Воронеж, Российская Федерация
E-mail: vum1@yandex.ru

Uskov Vladimir Igorevich, assistant, Voronezh State Forestry University of G. F. Morozov, Voronezh, Russian Federation
E-mail: vum1@yandex.ru