УДК 519.63

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ СХОДИМОСТЬ ПРОЕКЦИОННО-РАЗНОСТНОГО МЕТОДА СО СХЕМОЙ КРАНКА-НИКОЛСОН ПО ВРЕМЕНИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ НА РЕШЕНИЕ*

В. В. Смагин

Воронежский государственный университет

Поступила в редакцию 30.01.2017 г.

Аннотация. В гильбертовом пространстве абстрактное линейное параболическое уравнение в вариационном виде с симметричным оператором и нелокальным интегральным условием на решение решается приближенно проекционно-разностным методом с использованием по времени схемы Кранка-Николсон, которая является схемой второго порядка аппроксимации. Аппроксимация задачи по пространственным переменным строится по произвольной системе конечномерных подпространств и ориентирована на метод конечных элементов. Получены среднеквадратичные оценки погрешностей приближенных решений и сходимость приближенных решений к точному решению. Установлена скорость этой сходимости со вторым порядком по времени, кроме того, эта скорость является точной по порядку аппроксимации по пространственным переменным.

Ключевые слова: гильбертово пространство, параболическое уравнение, интегральное условие, проекционно-разностный метод, схема Кранка-Николсон.

MEAN-SQUARE CONVERGENCE OF PROJECTION-DIFFERENCE METHOD WITH THE SCHEME OF CRANK-NICOLSON IN TIME FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF PARABOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL CONDITION ON THE SOLUTION

V. V. Smagin

Abstract. In Hilbert space, an abstract linear parabolic equation in a variational form with a symmetric operator and a nonlocal integral condition on the solution is solved approximately by the projection-difference method using the Krank-Nicholson scheme, which is a second-order approximation scheme. Approximation of the problem with respect to spatial variables is constructed from an arbitrary system of finite-dimensional subspaces and is oriented to the finite element method. The root-mean-square estimates of the errors of approximate solutions and the convergence of approximate solutions to the exact solution are obtained. The rate of this convergence is established with the second order in time, in addition, this velocity is exact in the order of approximation with respect to the spatial variables.

Keywords: Hilbert space, parabolic equation, integral conditions, projection difference method, implicit Crank-Nicholson scheme.

---

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 16–01–00197)

1. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть дана тройка сепарабельных гильбертовых пространств $V \subset H \subset V'$, где пространство V' — двойственное к V, а пространство H отождествляется со своим двойственным. Оба вложения являются плотными и непрерывными. На $u,v \in V$ определена полуторалинейная форма $a(u,v)$. Предположим, что выполнены оценки:

$$|a(u,v)| \leqslant M\|u\|_V\|v\|_V, \qquad \operatorname{Re} a(u,u) \geqslant \alpha\|u\|_V^2, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$. Билинейная форма $a(u,v)$ порождает линейный ограниченный оператор $A : V \to V'$ такой, что $a(u,v) = \big(Au\,,v\big)$ и $\|A\|_{V\to V'} \leqslant M$. Здесь и далее под выражением типа (z,v) понимается значение функционала $z \in V'$ на элементе $v \in V$. Для $z \in H$ выражение (z,v) совпадает со скалярным произведением в пространстве H (напр., [1, гл.2, §1]).

В пространстве V' рассмотрим параболическую задачу с нелокальным интегральным условием на решение

$$u'(t) + Au(t) = f(t), \qquad \int\limits_0^T u(t)\,dt = \overline{u}. \tag{2}$$

Производные функций здесь и далее понимаются в обобщенном смысле (напр., [2, с.109]). В [3] установлена теорема о существовании слабого решения задачи (2). При выполнении условий $\overline{u} \in D(A) = \{v \in V \,|\, Av \in H\}$ и $f \in L_1(0,T;H) \cap L_2(0,T;V')$ показано, что задача (2) имеет единственное решение, называемое слабым, такое, что $u \in L_2(0,T;V) \cap C([0,T],H)$ и $u' \in L_2(0,T;V')$. При этом уравнение (2) удовлетворяется почти всюду на $[0,T]$ и выполняется интегральное условие.

В [4], [5] задача (2) решалась приближенно полудискретным методом Галеркина, который параболическую задачу сводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В [6] и [7] задача (2) решается приближенно полностью дискретным проекционно-разностным методом с использованием по времени неявной схемы Эйлера, которая, как известно, является разностной схемой первого порядка аппроксимации.

Для получения сходимости приближенных решений к точному решению исходной задачи со вторым порядком по времени будем использовать по времени схему Кранка-Николсон.

В [8] была установлена энергетическая сходимость проекционно-разностного метода со схемой Кранка-Николсон для случая "специальных" проекционных подпространств. В настоящей работе установим среднеквадратичную сходимость проекционно-разностного метода для случая симметричной формы $a(u,v)$ и проекционных подпространств общего вида.

Опишем некоторые предварительные факты. Пусть V_h — конечномерное подпространство пространства V. Здесь параметр $h > 0$. Определим пространство V_h', задав на $u_h \in V_h$ двойственную норму $\|u_h\|_{V_h{}'} = \sup|(u_h,v_h)|$, где точная верхняя граница берется по всем $v_h \in V_h$ и $\|v_h\|_V = 1$. Очевидно, что $\|u_h\|_{V_h'} \leqslant \|u_h\|_{V'}$. Обозначим через P_h ортогональный проектор в пространстве H на V_h. В [9] замечено, что оператор P_h допускает расширение по непрерывности до оператора $\overline{P}_h : V' \to V_h'$ и справедлива оценка

$$\|\overline{P}_h u\|_{V_h'} \leqslant \|u\|_{V'} \quad (u \in V'). \tag{3}$$

Отметим также для $u \in V'$ и $v \in H$ соотношение $(\overline{P}_h u,v) = (u,P_h v)$, которое получается соответствующим предельным переходом [10].

В V_h рассмотрим разностную задачу

$$\frac{u_k^h - u_{k-1}^h}{\tau} + \overline{P}_h A\frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} = f_h^k \quad (k = \overline{1,N}), \qquad \sum_{k=1}^N \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\,\tau = \overline{u}_h\,, \tag{4}$$

где N — натуральное число, $\tau N = T$, а элементы $f_h^k, \overline{u}_h \in V_h$ определим позже. Далее считаем также $t_k = k\tau$.

Лемма 1. *Задача (4) имеет единственное решение.*

Доказательство. Учитывая, что задача (4) конечномерна, достаточно показать, что однородная задача имеет только нулевое решение.

Итак, пусть $v_k^h \in V_h$ $(k = \overline{0,N})$ — решение задачи

$$\frac{v_k^h - v_{k-1}^h}{\tau} + \overline{P}_h A \frac{v_k^h + v_{k-1}^h}{2} = 0 \quad (k = \overline{1,N}), \qquad \sum_{k=1}^{N} \frac{v_k^h + v_{k-1}^h}{2}\, \tau = 0\,. \tag{5}$$

Суммируем по k от 1 до N первые равенства в (5). Учитывая второе соотношение в (5), получим $v_0^h = v_N^h$. Умножим теперь (5) скалярно в H на $(v_k^h + v_{k-1}^h)\tau$. Заметим, что

$$(v_k^h - v_{k-1}^h, v_k^h + v_{k-1}^h) = \|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + i2\,\mathrm{Im}(v_k^h, v_{k-1}^h)\,,$$

где i — мнимая единица. Следовательно, из (5) получим

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + i2\,\mathrm{Im}(v_k^h, v_{k-1}^h) + 2^{-1}(\overline{P}_h A(v_k^h + v_{k-1}^h), v_k^h + v_{k-1}^h)\tau = 0.$$

От последнего равенства берем вещественную часть.

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + 2^{-1}\mathrm{Re}\, a(v_k^h + v_{k-1}^h, v_k^h + v_{k-1}^h)\tau = 0.$$

Учитывая (1), получаем оценки

$$\|v_k^h\|_H^2 - \|v_{k-1}^h\|_H^2 + \alpha 2^{-1}\|v_k^h + v_{k-1}^h\|_V^2 \tau \leqslant 0\,.$$

Последние оценки суммируем по k от 1 до N. Так как доказано $v_0^h = v_N^h$, то получим $\sum_{k=1}^{N} \|v_k^h + v_{k-1}^h\|_V^2 \tau = 0$. Таким образом, $v_k^h + v_{k-1}^h = 0$ для всех $k = \overline{1,N}$. Обратимся вновь к соотношениям (5), из которых теперь следует $v_k^h - v_{k-1}^h = 0$ для всех $k = \overline{1,N}$. В результате $v_k^h = 0\,(k = \overline{0,N})$. □

Определим необходимый в дальнейшем проектор Ритца. Из теоремы Лакса-Мильграмма [11, c.19] следует для любого $u \in V$ существование единственного $u_h \in V_h$ такого, что для любого $v_h \in V_h$ выполняется равенство $a(u_h, v_h) = a(u, v_h)$. Таким образом определен оператор $R_h : V \to V_h$, называемый проектором Ритца, такой, что $R_h u = u_h$ и для всех $u \in V$ и $v_h \in V_h$

$$a(R_h u, v_h) = a(u, v_h)\,. \tag{6}$$

Из (6) для любого $u \in V$ следует равенство $\overline{P}_h A R_h u = \overline{P}_h A u$.

Отметим некоторые свойства оператора R_h, приведенные в [12]. Оператор $R_h : V \to V_h \subset V$ является линейным и ограниченным, причем для $u \in V$ справедливы оценки:

$$\|R_h u\|_V \leqslant M\alpha^{-1}\|u\|_V, \qquad \|(I - R_h)u\|_V \leqslant M\alpha^{-1}\|(I - Q_h)u\|_V\,, \tag{7}$$

где оператор $Q_h : V \to V_h \subset V$ является ортопроектором в пространстве V.

Определим теперь в задаче (4)

$$f_k^h = \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} P_h f(t)\, dt\,, \qquad \text{и } \overline{u}_h = R_h \overline{u}\,.$$

Решение соответствующей задачи (4) будем называть приближенным решением задачи (2).

Лемма 2. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (2), а u_k^h ($k=\overline{0,N}$) — решение задачи (4). Обозначим $z_k^h = P_h u(t_k) - u_k^h$. Тогда $z_0^h = z_N^h$.*

Доказательство. К уравнению (2) применим оператор $\overline{P}_h$, полученное равенство интегрируем по t от t_{k-1} до t_k и делим на τ.

$$\frac{P_h u(t_k) - P_h u(t_{k-1})}{\tau} + \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\,dt = f_k^h\,. \tag{8}$$

Из (8) вычитаем (4). Тогда для всех $k=\overline{1,N}$ получим

$$z_k^h - z_{k-1}^h + \overline{P}_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} u(t)\,dt - \overline{P}_h A \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\tau = 0\,. \tag{9}$$

Равенства (9) суммируем по k от 1 до N.

$$z_N^h - z_0^h + \overline{P}_h A \int\limits_0^T u(t)\,dt - \overline{P}_h A \sum_{k=1}^N \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\tau = 0\,.$$

Из последнего равенства следует

$$z_N^h - z_0^h + \overline{P}_h A\overline{u} - \overline{P}_h A\overline{u}_h = 0\,.$$

Так как $\overline{u}_h = R_h\overline{u}$, то $\overline{P}_h A\overline{u}_h = \overline{P}_h A R_h \overline{u} = \overline{P}_h A\overline{u}$. Таким образом, $z_N^h = z_0^h$. □

2. ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Далее предполагаем $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$ для всех $u,v \in V$, то есть форма $a(u,v)$ симметрична.

Заметим, что в этом случае операторы $\overline{P}_h A : V_h \to V_h$ являются в V_h относительно скалярного произведения пространства H самосопряженными и положительно определенными. Следовательно, в пространстве V_h определены операторы $(\overline{P}_h A)^{-1}$, $(\overline{P}_h A)^{1/2}$ и $(\overline{P}_h A)^{-1/2}$.

Теорема 1. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (2), а u_k^h – решение задачи (4). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^N \Big\| \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2} \Big\|_H^2 \tau \leqslant$$

$$C\Big\{ \int\limits_0^T \big\|(I-R_h)u(t)\big\|_H^2\,dt + \frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^N \Big\| \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t) \Big)\,dt \Big\|_H^2 \Big\}. \tag{10}$$

Доказательство. К уравнению (2) применим оператор $\overline{P}_h$. Полученное тождество интегрируем по t от t_{k-1} до t_k, а результат поделим на τ. Полученное соотношение вместе с уравнением (4) позволяет для $z_k^h = P_h u(t_k) - u_k^h$, где $k=\overline{1,N}$, установить тождество

$$\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau} + \overline{P}_h A \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2} = \overline{P}_h A P_h \frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{P}_h A u(t)\,dt. \tag{11}$$

Преобразуем выражение в правой части (11). Почти при всех $t \in [0,T]$ функция $u(t) \in V$, поэтому в силу свойства (6) проектора Ритца правую часть в (11) можно записать в виде

$$\frac{1}{\tau}\overline{P}_h A P_h \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\Big) dt + \frac{1}{\tau}\overline{P}_h A \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big(P_h - R_h\big) u(t) dt. \qquad (12)$$

Учитывая (12), умножим (11) скалярно в H на $(\overline{P}_h A)^{-1}(z_k^h + z_{k-1}^h)2^{-1}$.

$$\Big(\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}, \big(\overline{P}_h A\big)^{-1} \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\Big) + \Big\|\frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2 =$$

$$\frac{1}{\tau}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\Big) dt, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\right) +$$

$$\frac{1}{\tau}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big(P_h - R_h\big) u(t) dt, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\right). \qquad (13)$$

Заметим, что

$$\Big(\frac{z_k^h - z_{k-1}^h}{\tau}, \big(\overline{P}_h A\big)^{-1} \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\Big) =$$

$$\frac{1}{2\tau}\Big(\big\|(\overline{P}_h A)^{-1/2} z_k^h\big\|_H^2 - \big\|(\overline{P}_h A)^{-1/2} z_{k-1}^h\big\|_H^2 + 2i\,\mathrm{Im}\big(z_k^h, (\overline{P}_h A)^{-1} z_{k-1}^h\big)\Big), \qquad (14)$$

где i — мнимая единица.

Учитывая (14), умножим (13) на 2τ и от полученного выражения возьмем вещественную часть.

$$\big\|(\overline{P}_h A)^{-1/2} z_k^h\big\|_H^2 - \big\|(\overline{P}_h A)^{-1/2} z_{k-1}^h\big\|_H^2 + 2\Big\|\frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2 \tau =$$

$$2\mathrm{Re}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\Big) dt, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\right) +$$

$$2\mathrm{Re}\left(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big(P_h - R_h\big) u(t) dt, \frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\right) = I_1 + I_2. \qquad (15)$$

Оценим слагаемые I_1, I_2 в правой части (15).

$$I_1 \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1 \tau}\Big\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2} - u(t)\Big)\, dt\Big\|_H^2 + \varepsilon_1 \Big\|\frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2 \tau. \qquad (16)$$

Аналогично, применяя неравенство Гельдера, оцениваем

$$I_2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon_2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \big\|(I - R_h) u(t)\big\|_H^2\, dt + \varepsilon_2 \Big\|\frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2 \tau. \qquad (17)$$

Положим в (16) и (17) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/2$. Тогда из (15) следует оценка

$$\big\|(\overline{P}_h A)^{-1/2} z_k^h\big\|_H^2 - \big\|(\overline{P}_h A)^{-1/2} z_{k-1}^h\big\|_H^2 + \Big\|\frac{z_k^h + z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2 \tau \leqslant$$

$$\frac{2}{\tau}\Big\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\Big)\,dt\Big\|_H^2+2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\big\|(I-R_h)u(t)\big\|_H^2\,dt. \tag{18}$$

Неравенства (18) суммируем по всем k от 1 до N. Учитывая $z_0^h=z_N^h$, получим

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\tau\leqslant 2\int\limits_0^T\big\|(I-R_h)u(t)\big\|_H^2\,dt+$$

$$\frac{2}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\Big\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\Big)\,dt\Big\|_H^2. \tag{19}$$

Для завершения доказательства теоремы 1 рассмотрим оценку

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\tau\leqslant$$

$$3\sum_{k=1}^{N}\Big\|(I-P_h)\Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u(t)\,dt\Big)\Big\|_H^2\tau+$$

$$3\sum_{k=1}^{N}\Big\|(I-P_h)\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u(t)\,dt\Big\|_H^2\tau+3\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\tau\leqslant$$

$$\frac{3}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\Big\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\Big)\,dt\Big\|_H^2+$$

$$3\int\limits_0^T\big\|(I-R_h))u(t)\big\|_H^2\,dt+3\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{z_k^h+z_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\tau. \tag{20}$$

Окончательная оценка (12) следует теперь из (20) и (19). □

Следствие 1. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (2) такое, что производная $u'\in L_p(0,T;H)$ для $1\leqslant p\leqslant 2$. Пусть u_k^h — решение задачи (4). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\tau\leqslant$$

$$C\Big\{\int\limits_0^T\big\|(I-R_h)u(t)\big\|_H^2\,dt+\tau^{3-2/p}\Big(\int\limits_0^T\big\|u'(t)\big\|_H^p\,dt\Big)^{2/p}\Big\}. \tag{21}$$

Доказательство. Оценим второе слагаемое в правой части (10).

Заметим, что

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\Big)\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(\int\limits_t^{t_k}u'(s)\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t}u'(s)\,ds\Big)\,dt=$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(t_{k-1}-2s+t_k)u'(s)\,ds. \tag{22}$$

Для обоснования второго равенства в (22) следует поменять порядок интегрирования. Так как $|t_{k-1}-2s+t_k|\leqslant\tau$ для $s\in[t_{k-1},t_k]$, то получим

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\Big\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\Big)\,dt\Big\|_H^2=$$

$$\frac{1}{4\tau}\sum_{k=1}^{N}\Big\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(t_{k-1}-2s+t_k)u'(s)\,ds\Big\|_H^2\leqslant\frac{\tau}{4}\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_H\,ds\Big)^2\leqslant$$

$$\frac{\tau^{3-2/p}}{4}\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u'(s)\|_H^p\,ds\Big)^{2/p}\leqslant\frac{\tau^{3-2/p}}{4}\Big(\int\limits_0^T\big\|u'(t)\big\|_H^p\,dt\Big)^{2/p}. \tag{23}$$

Оценка (21) следует теперь из (10) и (23). □

Для получения оценки погрешности с более высоким порядком по τ, вплоть до второго, предположим, что гладкость решение задачи (2) выше, чем в следствии 1.

Следствие 2. *Пусть $u(t)$ — слабое решение задачи (2) такое, что вторая производная $u''\in L_p(0,T;H)$ для $1\leqslant p\leqslant 2$. Пусть u_k^h — решение задачи (4). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\tau\leqslant$$

$$C\Big\{\int\limits_0^T\big\|(I-R_h)u(t)\big\|_H^2\,dt+\tau^{5-2/p}\Big(\int\limits_0^T\big\|u''(t)\big\|_H^p\,dt\Big)^{2/p}\Big\}. \tag{24}$$

Доказательство. Для обоснования (24) следует иначе провести оценку (23). Прежде всего интегрированием по частям преобразуем интеграл

$$\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}(t_{k-1}-2t+t_k)u'(t)\,dt=\frac{1}{4}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}u'(t)\,d\Big(\tau^2-(t_{k-1}-2t+t_k)^2\Big)=$$

$$\frac{1}{4}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big((t_{k-1}-2t+t_k)^2-\tau^2\Big)u''(t)\,dt\,.$$

Так как $|(t_{k-1}-2t+t_k)^2-\tau^2|\leqslant\tau^2$ для $t\in[t_{k-1},t_k]$, то получим

$$\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\Big\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big(\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-u(t)\Big)\,dt\Big\|_H^2=$$

$$\frac{1}{64\tau}\sum_{k=1}^{N}\Big\|\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\Big((t_{k-1}-2s+t_k)^2-\tau^2\Big)u''(s)\,ds\Big\|_H^2\leqslant\frac{\tau^3}{64}\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H\,ds\Big)^2\leqslant$$

$$\frac{\tau^{5-2/p}}{64}\sum_{k=1}^{N}\Big(\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\|u''(s)\|_H^p\,ds\Big)^{2/p}\leqslant\frac{\tau^{5-2/p}}{64}\Big(\int\limits_0^T\big\|u''(t)\big\|_H^p\,dt\Big)^{2/p}. \qquad (25)$$

Оценка (24) следует теперь из (10) и (25). □

Заметим, что если в следствии 2 параметр $p = 2$, то для оценки нормы погрешности получаем второй порядок по τ.

3. СХОДИМОСТЬ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Для получения из (21) и (24) сходимости в соответствующих нормах приближенных решений к точному решению задачи (2) предположим, что в пространстве V задана последовательность $\{V_h\}$ конечномерных подпространств, предельно плотная в пространстве V, то есть $\|(I-Q_h)v\|_V \to 0$ при $h \to 0$ для любого $v \in V$. Здесь, как и прежде, Q_h — ортогональный проектор в пространстве V на подпространство $V_h \subset V$.

Следствие 3. *Пусть задана $\{V_h\}$ — последовательность конечномерных подпространств, предельно плотная в пространстве V. Тогда в условиях следствия 1, либо следствия 2, при $\tau \to 0$ и $h \to 0$*

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\tau \to 0.$$

Доказательство следует из (21), (24), (7), непрерывности вложения $V \subset H$ и условия для решения $u \in L_2(0,T;V)$. □

Обратим внимание, что оценки (21) и (24) указывают и на порядок скорости сходимости погрешностей к нулю по параметру τ. В случае, если известны аппроксимационные свойства подпространств V_h, то оценки (21) и (24) позволяют получить скорость сходимости погрешностей к нулю и по пространственным переменным.

Определим множество $D(A) = \{v \in V|\, Av \in H\}$. Здесь оператор $A : V \to V'$ порожден описанной выше формой $a(u,v)$. Предположим теперь, что кроме определенных выше пространств V и H, задано гильбертово пространство E такое, что $D(A) \subset E$ и для всех $v \in D(A)$ выполняется типичное для эллиптических операторов неравенство $\|v\|_E \leqslant m\|Av\|_H$.

Например, если оператор A порожден в области с гладкой границей $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ равномерно эллиптическим дифференциальным выражением второго порядка и краевым условием Дирихле, то полагаем

$$H = L_2(\Omega),\, V = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\, D(A) = E = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\,.$$

Если же на границе Ω задано краевое условие Неймана, то полагаем

$$H = L_2(\Omega),\, V = W_2^1(\Omega),\, D(A) \subset E = W_2^2(\Omega)\,.$$

Пусть теперь подпространства $V_h \subset V$ такие, что для $u \in E \cap V$

$$\|(I - Q_h)u\|_V \leqslant r_1 h\|u\|_E\,, \qquad (26)$$

где константа $r > 0$ не зависит от $u \in E \cap V$ и $h > 0$. Условие (26) является классическим для подпространств типа конечных элементов (напр., [11], [13], [14]).

Лемма 3. (аналог леммы Обэна-Нитше) *Пусть подпространства $V_h \subset V$ удовлетворяют условию (26). Тогда в сделанных выше предположениях о пространстве E для всех $u \in V$ справедлива оценка*

$$\|(I - R_h)u\|_H \leqslant r_2 h\|(I - R_h)u\|_V\,, \qquad (27)$$

где $R_h : V \to V_h \subset V$ — проектор Ритца, определенный по форме $a(u,v)$, и константа $r_2 > 0$ не зависит от $u \in V$ и $h > 0$.

Доказательство. Возьмем $u \in V$ и обозначим $(I - R_h)u = f \in V \subset H$. Пусть $z \in V$ такое, что

$$a(z,v) = (f,v) \quad \text{для всех} \quad v \in V. \tag{28}$$

Тогда $Az = f \in H$, то есть $z \in D(A)$ и выполняется оценка $\|z\|_E \leqslant m\|Az\|_H$. В (28) положим $v = f$. Получим $a(z,f) = \|f\|_H^2$.

Так как форма $a(u,v)$ симметрична, а R_h проектор Ритца, то

$$a(R_h z,f) = a(R_h z,u - R_h u) = a\big(R_h z,R_h(u - R_h u)\big) = 0.$$

Таким образом,

$$a(z - R_h z,f) = a(z,f) - a(R_h z,f) = \|f\|_H^2. \tag{29}$$

Из (29) и условия (1) следует оценка

$$\|f\|_H^2 \leqslant M\|(I - R_h)z\|_V \|(I - R_h)u\|_V. \tag{30}$$

В (30), учитывая (7), (26) и $z \in D(A)$, оцениваем

$$\|(I - R_h)z\|_V \leqslant M\delta^{-1}\|(I - Q_h)z\|_V \leqslant M\delta^{-1}r_1 h\|z\|_E \leqslant$$

$$M\delta^{-1}r_1 m\, h\|Az\|_H = M\delta^{-1}r_1 m\, h\|f\|_H. \tag{31}$$

Из (30) и (31) теперь следует оценка

$$\|f\|_H^2 \leqslant M\delta^{-1}r_1 m\, h\|(I - R_h)u\|_V\|f\|_H,$$

из которой получается оценка (27) с $r_2 = M\delta^{-1}r_1 m$. □

Сформулируем теперь результаты, следующие из следствий 1 и 2, а также условий (7) и (26), о скорости сходимости погрешностей как по времени, так и по пространству.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия следствия 1, а также условие (26). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2 \tau \leqslant$$

$$C\Big\{h^2\int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt + \tau^{3-2/p}\Big(\int_0^T \big\|u'(t)\big\|_H^p\,dt\Big)^{2/p}\Big\}. \tag{32}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия следствия 2, а также условие (26). Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2 \tau \leqslant$$

$$C\Big\{h^2\int_0^T \|u(t)\|_V^2\,dt + \tau^{5-2/p}\Big(\int_0^T \big\|u'(t)\big\|_H^p\,dt\Big)^{2/p}\Big\}. \tag{33}$$

Если же решение $u(t)$ задачи (2) такое, что $u \in L_2(0,T;E)$, то справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\|\frac{u(t_k) + u(t_{k-1})}{2} - \frac{u_k^h + u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2 \tau \leqslant$$

$$C\Big\{h^4\int\limits_0^T\|u(t)\|_E^2\,dt+\tau^{5-2/p}\Big(\int\limits_0^T\big\|u'(t)\big\|_H^p\,dt\Big)^{2/p}\Big\}. \tag{34}$$

Замечание 1. Можно рассмотреть также оценку погрешности

$$\sum_{k=1}^N\Big\|u(t_{k-1/2})-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\tau\leqslant$$

$$2\sum_{k=1}^N\Big\|u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\Big\|_H^2\tau+2\sum_{k=1}^N\Big\|\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}-\frac{u_k^h+u_{k-1}^h}{2}\Big\|_H^2\tau\,. \tag{35}$$

Оценка второго слагаемого в правой части (35) уже установлена в (32), (33) и (34). Поэтому следует проверить, что первое слагаемое в правой части (35) дает в соответствующих условиях тот же порядок по τ. Так если выполнены условия теоремы 2, то из представления

$$u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}=\frac{1}{2}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k-1/2}}u'(t)\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_{t_{k-1/2}}^{t_k}u'(t)\,dt$$

следует оценка

$$\sum_{k=1}^N\Big\|u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\Big\|_H^2\tau\leqslant\tau^{3-2/p}\Big(\int\limits_0^T\big\|u'(t)\big\|_H^p\,dt\Big)^{2/p}.$$

Если же выполнены условия теоремы 3, то из представления

$$u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}=\int\limits_{t_{k-1}}^{t_{k-1/2}}(t_{k-1}-t)u''(t)\,dt+\int\limits_{t_{k-1/2}}^{t_k}(t-t_k)u''(t)\,dt$$

следует оценка

$$\sum_{k=1}^N\Big\|u(t_{k-1/2})-\frac{u(t_k)+u(t_{k-1})}{2}\Big\|_H^2\tau\leqslant\tau^{5-2/p}\Big(\int\limits_0^T\|u''(t)\|_H^p\,dt\Big)^{2/p}.$$

Замечание 2. Результаты данной работы остаются справедливыми, что легко видеть, если равномерную сетку по времени с шагом τ заменить произвольной $0=t_0<t_1<\ldots<t_N=T$. При этом, например, в теоремах 2 и 3 в оценках погрешностей в левой части вместо τ следует писать $\tau_k=t_k-t_{k-1}$, а в правой части под τ нужно понимать $\max\tau_k$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обэн. — М. : Мир, 1977. — 384 с.

2. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. — М. : Мир, 1972. — 415 с.

3. Критская, Е. А. О слабой разрешимости вариационной задачи параболического типа с интегральным условием / Е. А. Критская, В. В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2008. — № 1. — С. 222–225.

4. Нгуен, Тыонг Хуен Сходимость метода Галеркина приближенного решения параболического уравнения с интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен, В. В. Смагин // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2010. — № 1. — С. 144–149.

5. Нгуен, Тыонг Хуен Сходимость метода Галеркина приближенного решения параболического уравнения с симметричным оператором и интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен, В. В. Смагин // International Scientific Journal. Spectral and Evolution Problems. — 2011. — V. 21, № 2. — P. 65–74.

6. Нгуен, Тыонг Хуен Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2011. — № 1. — С. 202–208.

7. Нгуен, Тыонг Хуен Сходимость проекционно-разностного метода приближенного решения параболического уравнения с симметричным оператором и интегральным условием на решение / Нгуен Тыонг Хуен // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2013. — № 1. — С. 178–191.

8. Смагин, В. В. Проекционно-разностный метод со схемой Кранка-Николсон по времени приближенного решения параболического уравнения с интегральным условием на решение / В. В. Смагин // Дифференц. уравнения. — 2015. — Т. 51, № 1. — С. 116–126.

9. Вайникко, Г. М. О сходимости и быстроте сходимости метода Галеркина для абстрактных эволюционных уравнений / Г. М. Вайникко, П. Э. Оя // Дифференц. уравнения. — 1975. — Т. 11, № 7. — С. 1269–1277.

10. Смагинm В. В. Оценки скорости сходимости проекционного и проекционно-разностного методов для слабо разрешимых параболических уравнений / В. В. Смагин // Математ. сборник. — 1997. — Т. 188, № 3. — С. 143–160.

11. Съярле, Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф. Съярле. — М. : Мир, 1980. — 512 с.

12. Васильева, Т. Е. Сходимость проекционного метода для уравнений с несимметричной главной частью / Т. Е. Васильева, В. В. Смагин // Сборник трудов молодых ученых математ. ф-та ВГУ. — 2001. — С. 38–42.

13. Марчук, Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М. : Наука, 1981. — 416 с.

14. Оганесян, Л. А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений / Л. А. Оганесян, Л. А. Руховец. — Ереван, 1979. — 236 с.

REFERENCES

1. Aubin J.-O. Approximation of Elliptic Boundary Value Problems. [Oben, Zh.-P. Priblizhennoe reshenie ellipticheskix kraevyx zadach]. Moscow, 1977, 384 p.

2. Lions J.-L. Controle optimal de systŕemes gouvernŕes par des ŕequations aux dŕerivŕees partielles. [Lions, Zh.-L. Optimal'noe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravneniyami s chastnymi proizvodnymi]. Moscow: Mir, 1972, 415 p.

3. Kritskaya E.A., Smagin V.V. On the Weak Solvability of the Probability Problem of the Parabolic Type with an Integral Condition. [Kritskaya E.A., Smagin V.V. O slaboyj razreshimosti variacionnoyj zadachi parabolicheskogo tipa s integral'nym usloviem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2008, no. 1, pp. 222–225.

4. Nguen Tyong Khuen, Smagin V.V. Convergence of Galerkin's Method of Approximate Solution in Parabolic Equation with Integral Condition for the Solution. [Nguen Tyong Xuen, Smagin V.V. Sxodimost' metoda Galerkina priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s integral'nym usloviem na reshenie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya:*

Fizika. Matematika — Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika, 2010, no. 1, pp. 144–149.

5. Nguen Tyong Khuen, Smagin V.V. Convergence of the Galerkin Method for the Approximation Solution of a Parabolic Equation with a Symmetric Operator and an Integral Condition for a Solution. [Nguen Tyong Xuen, Smagin V.V. Sxodimost' metoda Galerkina priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s simmetrichnym operatorom i integral'nym usloviem na reshenie]. *International Scientific Journal. Spectral and Evolution Problems — International Scientific Journal. Spectral and Evolution Problems*, 2011, vol. 21, no. 2, pp. 65–74.

6. Nguen Tyong Khuen Convergence of Projection-Difference Method of Approximate Solution in Parabolic Equation with Integral Condition for the Solution. [Nguen, Tyong Xuen Sxodimost' proekcionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s integral'nym usloviem na reshenie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2011, no. 1, pp. 202–208.

7. Nguen Tyong Khuen Convergence of Projection-Difference Method of Approximate Solution in Parabolic Equation a Symmetric Operator and an Integral Condition for the Solution. [Nguen Tyong Xuen Sxodimost' proekcionno-raznostnogo metoda priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s simmetrichnym operatorom i integral'nym usloviem na reshenie]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika*, 2013, no. 1, pp. 178–191.

8. Smagin V.V. Projection-difference method with the Crank–Nicolson scheme in time for the approximate solution of a parabolic equation with an integral condition for the solution. [Smagin V.V. Proekcionno-raznostnyyj metod so sxemoyj Kranka-Nikolson po vremeni priblizhennogo resheniya parabolicheskogo uravneniya s integral'nym usloviem na reshenie]. *Differencial'nye uravneniya — Differencial'nye uravneniya*, 2015, vol. 51, no. 1, pp. 116–126.

9. Vainikko G.M., Oya P.E. The Convergence and Rate of Convergence of the Galerkin Method for Abstract Evolution Equations. [Vayjnikko G.M., Oya P.E. O sxodimosti i bystrote sxodimosti metoda Galerkina dlya abstraktnyx evolyucionnyx uravneniyj]. *Differencial'nye uravneniya — Differencial'nye uravneniya*, 1975, vol. 11, no. 3, pp. 1269–1277.

10. Smagin V.V. Estimates for the Rate of Convergence of Projection and Projection-Difference Methods for Weakly Solvable Parabolic Equations. [Smagin V.V. Ocenki skorosti sxodimosti proekcionnogo i proekcionno-raznostnogo metodov dlya slabo razreshimyx parabolicheskix uravneniyj]. *Matematicheskij sbornik — Matematicheskij sbornik*, 1997, vol. 188, no. 3, pp. 143–160.

11. Ciarlet Ph. The Finite Element Method for Elliptic Problems. [S'yarle F. Metod konechnyx elementov dlya ellipticheskix zadach]. Moscow: Mir, 1980, 512 p.

12. Vasil'eva T.E. and Smagin V.V. Convergence of ProjectionMethod for Equations with a Nonsymmetric Leading Part. [Vasil'eva T.E., Smagin V.V. Sxodimost' proekcionnogo metoda dlya uravneniyj s nesimmetrichnoyj glavnoyj chast'yu]. *Sbornik trudov molodykh uchenykh mat. f-ta Voronezh. gos. un-ta — Collection of Papers of Young Scientists of the Mathematical Department of the Voronezh State University*, 2001, pp. 38–42.

13. Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Introduction to Projection-Grid Methods. [Marchuk G.I., Agoshkov V.I. Vvedenie v proektsionno-setochnye metody]. Moscow: Nauka, 1981, 416 p.

14. Oganesyan L.A. and Rukhovets L.A. Variation-Difference Methods for Solving Elliptic Equations. [Oganesyan L.A., Ruxovec L.A. Variacionno-raznostnye metody resheniya ellipticheskix uravneniyj]. Erevan, 1979, 236 p.

Смагин Виктор Васильевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры функционального анализа и операторных уравнений Воронежского государственного университета, Воронеж
E-mail: smagin@math.vsu.ru

Smagin Victor Vasilievich, Doctor of Sciences in Physics and Mathematics, Professor of the Department of functional analysis and operation equations, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: smagin@math.vsu.ru