

МОДЕЛЬ СТАБИЛИЗАЦИИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ЗАДАЧЕ ОБ ОБРАТНОМ МАЯТНИКЕ С ГИСТЕРЕЗИСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ*

М. Е. Семенов^{1,2,3}, О. И. Канищева¹, П. А. Мелешенко^{1,2},
О. О. Решетова², З. Хатиф⁴

¹ – ВУНЦ ВВС “ВВА им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина”;
² – Воронежский государственный университет; ³ – ФГБУН Федеральный исследовательский центр “Единая геофизическая служба Российской академии наук”;
⁴ – Багдадский университет

Поступила в редакцию 29.01.2017 г.

Аннотация. В работе исследуется математическая модель стабилизации обратного маятника управляющим воздействием на который является выход гистерезисного преобразователя. Приведены критерии устойчивости линеаризованного уравнения движения. Идентифицируется зависимость между начальными условиями и параметрами управления, обеспечивающими периодические колебания маятника. Приводится алгоритм стабилизации неустойчивых периодических режимов в задаче о диссипативном движении обратного маятника с гистерезисным управлением.

Ключевые слова: перевернутый маятник, гистерезисная нелинейность, люфт, устойчивость, периодические решения.

STABILIZATION OF UNSTABLE PERIODIC REGIMES IN MODEL OF INVERTED PENDULUM UNDER HYSTERETIC CONTROL

M. E. Semenov, O. I. Kanishcheva, P. A. Meleshenko,
O. O. Reshetova, Z. Hatif

Abstract. In this paper we investigate the mathematical model of stabilization of the inverted pendulum under control of the force which can be considered as an output state of the hysteretic converter. For the linearized equation the stability criteria are presented. The dependence of the initial condition on the control parameters that lead to periodic oscillations of the pendulum is identified. The algorithm of stabilization of unstable periodic regimes in the problem of dissipative motion of the inverted pendulum under hysteretic control is presented and discussed.

Keywords: inverted pendulum, hysteresis nonlinearity, backlash, stability, periodic solutions.

ВВЕДЕНИЕ

Модели многих прикладных задач нелинейной динамики связаны с изучением колебательных явлений. Анализ устойчивости функционирования динамической системы является чрезвычайно важным с практической точки зрения. Задачи, связанные с изучением систем такого рода, зачастую сводятся к системам дифференциальных уравнений, содержащим как функциональные нелинейности, так и нелинейности гистерезисной природы. В частности,

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–08–00312, № 17–01–00251)
© Семенов М. Е., Канищева О. И., Мелешенко П. А., Решетова О. О., Хатиф З., 2019

в работах [1], [2] рассматривалась задача стабилизации неустойчивого положения обратного маятника с гистерезисным управлением. Оказалось, что на границах зон устойчивости в пространстве параметров могут реализовываться периодические режимы [3]. Однако, в силу их структурной неустойчивости их численная реализация оказалась весьма затруднительной.

В работах [4], [5] изложен новый подход к стабилизации неустойчивых периодических решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Исходная система “погружалась” в пространство большего числа измерений, в котором периодическому решению исходной системы соответствует стационарное решение. Благодаря такому подходу удалось заменить задачу стабилизации цикла на задачу стабилизации стационарного решения, в основе которого лежит метод Магницкого Н. А. стабилизации термодинамической ветви в системах уравнений «реакция–диффузия». Однако, в описанном подходе, рассматривались исключительно гладкие функции, наличие гистерезисных нелинейностей в правых частях дифференциальных уравнений существенно усложняют применение описанного метода. При моделировании гистерезисных нелинейностей в соответствии с классическими представлениями, вводятся операторы, которые рассматриваются как преобразователи на соответствующих функциональных пространствах [6]. Динамика таких преобразователей описывается отношениями “вход–состояние” и “состояние–выход”, как следствие, системы с гистерезисными свойствами описываются операторно-дифференциальными уравнениями, для которых методы стабилизации неустойчивых периодических решений к настоящему времени не разработаны.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим модель перевернутого маятника с осциллирующей нижней точкой подвеса. Впервые она была изучена П. Л. Капицей [7], [8]. Основание маятника представляет собой физическую систему (P, S) , состоящую из цилиндра длины H и поршня P , которые перемещаются вдоль направления вертикальной оси [9]. Это отражено на рис. 1.

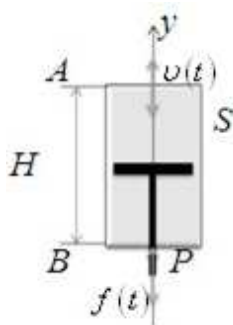


Рис. 1. Цилиндр в основании маятника.

Координата $f(t)$ определяет положение поршня, а $v(t)$ определяет положение цилиндра. P ведущее звено системы, а цилиндр S ведомым. Тогда система (P, S) представляет собой преобразователь Γ с входным сигналом $f(t)$ — переменным положением поршня и выходным сигналом $v(t)$ — переменным положением цилиндра. Такой преобразователь называют люфтом [10]. Движение поршень осуществляется так, что его ускорение периодически с частотой меняется с $-a\omega^2$ на $a\omega^2$ [11]. Исходя из этого, линейризованное уравнение движения вертикального маятника с описанным выше подвесом принимает следующий вид:

$$\ddot{\varphi} - \frac{1}{l} (g + a\omega^2 G(t, H)w(t)) \varphi = 0,$$

$$w(t) = -\text{sign}(\sin(\omega t)), \tag{1}$$

$$\varphi(0) = \varphi_{10} \dot{\varphi}(0) = \varphi_{20}.$$

где $w(t)$ — ускорение поршня, $G(t, H)w(t)$ — ускорение основания маятника, а

$$G(t, H) = \begin{cases} 0, & t \in (t^*, t^* + \Delta t), \\ 1, & t \notin (t^*, t^* + \Delta t), \end{cases}$$

где t^* — моменты времени, после которых ускорение меняет знак

$$w(t^*) w(t^* + h) < 0,$$

$\Delta t = \sqrt{\frac{2H}{a\omega^2}}$ — время, затрачиваемое поршнем на прохождение цилиндра.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ

Сделав в (1) следующую замену: $\tau = \omega t$, $k = \frac{g}{l\omega^2}$, $s = \frac{a}{l}$, $\Delta\tau = \sqrt{\frac{2H}{sl}}$, перейдем к безразмерным величинам. В результате получим уравнение аналогичное уравнению Мейсснера [3], но с отрицательными коэффициентами и гистерезисной нелинейностью:

$$\ddot{x} - (k - sG(\tau, H)\text{sign}(\sin \tau))x = 0,$$

$$G(\tau, H) = \begin{cases} 0, \tau \in (\tau^*, \tau^* + \Delta\tau), \\ 1, \tau \notin (\tau^*, \tau^* + \Delta\tau), \end{cases} \quad (2)$$

$$x(0) = x_{10}, \quad \dot{x}(0) = x_{20}.$$

Уравнение (2) эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = p(\tau)x_1, \\ x_1(0) = x_{10}, x_2(0) = x_{20}. \end{cases} \quad (3)$$

Ее матрица имеет вид $\mathbf{P}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(\tau) & 0 \end{pmatrix}$, где $p(\tau) = k - sG(\tau, H)\text{sign}(\sin \tau)$. Матрица $\mathbf{P}(\tau)$, является периодической функцией времени с периодом 2π , так что для любого момента времени τ справедливо равенство $\mathbf{P}(\tau + 2\pi) \equiv \mathbf{P}(\tau)$. Это значит, что уравнение (2) устойчиво или неустойчиво по Лагранжу, если устойчива или, соответственно, неустойчива система (3). То есть все решения $x(\tau)$ устойчивого уравнения (2) ограничены на $[\tau_0, \infty)$ вместе с их производными $\dot{x}(\tau)$. Из результатов [12] известно, что устойчивость по Лагранжу связана с матрицами монодромии и оценке ее собственных значений, называемых мультипликаторами. В частности, достаточно, чтобы все они находились внутри единичного круга $|\rho| < 1$. Как было показано в [3] это условие эквивалентно равенству

$$\left| \left(2 \operatorname{ch} (2\sqrt{k}\Delta\tau) \operatorname{ch}(k_1\gamma) + \left(\frac{\sqrt{k}}{k_1} + \frac{k_1}{\sqrt{k}} \right) \operatorname{sh} (2\sqrt{k}\Delta\tau) \operatorname{sh}(k_1\gamma) \right) \cos(k_2\gamma) + \right. \\ \left. + \left(\left(\frac{\sqrt{k}}{k_2} - \frac{k_2}{\sqrt{k}} \right) \operatorname{sh} (2\sqrt{k}\Delta\tau) \operatorname{ch}(k_1\gamma) + \left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} \right) \operatorname{ch}^2 (\sqrt{k}\Delta\tau) \operatorname{sh}(k_1\gamma) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{k}{k_1k_2} - \frac{k_1k_2}{k} \right) \operatorname{sh}^2 (\sqrt{k}\Delta\tau) \operatorname{sh}(k_1\gamma) \right) \sin(k_2\gamma) \right| < 2 \quad (4)$$

Параметрам, удовлетворяющим неравенству (4), соответствуют почти периодические колебания маятника относительно верхнего положения.

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ

Исследуем поведение движения маятника на границах области устойчивости, то есть когда, мультипликаторы равны $\rho_1 = \rho_2 = 1$ или $\rho_1 = \rho_2 = -1$ соответственно. В первом случае соответствующее решение будет удовлетворять равенству $\mathbf{X}(t + 2\pi) = \mathbf{X}(t)$, а значит уравнение (1) будет имеет периодическое решение, его период совпадает с периодом коэффициентов $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$. Во втором случае $-\mathbf{X}(t + 2\pi) = -\mathbf{X}(t)$, а еще через один период $\mathbf{X}(t + 4\pi) = -\mathbf{X}(t + \pi) = \mathbf{X}(t)$, что означает периодичность решения с периодом $T_2 = \frac{4\pi}{\omega}$.

Параметры маятника, удовлетворяющие следующим условиям, обеспечивают периодические режимы колебания маятника.

$$a_{11} + a_{22} = 2, \quad \text{для периода колебаний } T_1, \quad (5)$$

$$a_{11} + a_{22} = -2, \quad \text{для периода колебаний } T_2. \quad (6)$$

Однако, эти условия являются только необходимыми, но не достаточными, так как не для любых ненулевых начальных значений при заданном управлении с параметрами, удовлетворяющими одному из этих равенств, будут существовать периодические решения. Отметим, что для рассматриваемого управления, описываемого функцией $v(t) = -a\omega^2 G(t, H) \text{sign}(\sin(\omega t))$ начальные условия лежат в I и III четвертях. Как было показано [3] периодические решения лежат на прямых определяемые следующими неравенствами $\varphi_{10} = \frac{a_{12}}{1-a_{11}}\varphi_{20}$, $\varphi_{20} = \frac{a_{21}}{1-a_{22}}\varphi_{10}$, где $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ параметры матрицы монодромии.

Непосредственный анализ показывает, что все периодические решения неустойчивые.

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕУСТОЙЧИВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В ЗАДАЧЕ О ДИССИПАТИВНОМ ДВИЖЕНИИ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА С ГИСТЕРЕЗИСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

Рассмотрим следующий подход стабилизации в динамических системах с гистерезисным управлением. Ключевым шагом является введение новой динамической системы дифференциальных уравнений с частными производными — производной системой, которая описывается не движением точки, а движением цикла. Связь между исходной и производной системами состоит из следующих утверждений:

1. Любое периодическое решение исходной системы является стационарным в производной системе.
2. Любое стационарное решение производной системы является периодическим в исходной системе.
3. Периодическое решение исходной системы устойчиво тогда и только тогда, когда устойчиво стационарное решение производной системы.

Такой подход позволяет заменить задачу стабилизации цикла на задачу стабилизации стационарного решения, в основе которого лежит метод Магницкого Н. А. стабилизации термодинамической ветви в системах уравнений «реакция–диффузия». Изложим основы предлагаемого метода в общем виде [4].

Следующую систему далее будем называть исходной:

$$\dot{x} = F(x, H), \quad (7)$$

где $H = [h_1, \dots, h_k]$ — вектор содержащий параметры для исходной системы, x — состояние системы.

Определим проекцию исходной системы в фазовое пространство большей размерности следующим образом: пусть $x^*(t)$ — решение исходной системы, тогда $y(t, \tau) = x^*(Q(\tau))$, где функция $Q : [0, 2\pi] \rightarrow [0, T]$ непрерывная и $Q(0) = 0, Q(2\pi) = T$. Производной системой для уравнения (7) будем называть следующую:

$$\begin{aligned} y' &= G(y, H) = \{g_1(y, H), \dots, g_n(y, H)\} \\ g_i(y, H) &= f_i(y, H) - y_{i\tau} \frac{F(y, H) * y_\tau}{y_\tau * y_\tau} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\|y_\tau\|^2 \neq 0; y(t, \tau)|_{\tau=0} = y(t, \tau)|_{\tau=2\pi}; y_\tau|_{\tau=0} = y_\tau|_{\tau=2\pi}, \tau \in [0, 2\pi].$$

Заметим, если $y(t, \tau)$ является стационарным решением (8), то $y(t, \tau) = y(\tau)$. Если $x(t)$ является T -периодическим решением исходной системы (7), то функция $y(t, \tau) = x(Q(\tau))$

является стационарной в производной системе (8). Согласно [5], периодическое решение $x(t)$ исходной системы (7) является устойчивым тогда и только тогда, когда $y(t, \tau) = x^*(Q(t))$ является стационарным и устойчивым решением в производной системе (8). В таком случае рассмотрим $(m + 1)$ -мерную динамическую систему:

$$\dot{y} = F_i(y, H) - y_{i\tau} \frac{F(y, H) * y_\tau}{y_\tau * y_\tau} + eq; \dot{q} = a * \left(F_i(y, H) - y_{i\tau} \frac{F(y, H) * y_\tau}{y_\tau * y_\tau} \right) + \beta q, \tag{9}$$

где $e = \begin{pmatrix} e_1 \\ \dots \\ e_m \end{pmatrix}, a = (a_1, \dots, a_m), \beta \in R$

В стационарном положении функция $a * \left(F_i(y, H) - y_{i\tau} \frac{F(y, H) * y_\tau}{y_\tau * y_\tau} \right) = 0$ при любом векторе a . Тогда матрица линеаризованной правой части около стационарного решения $y^*(\tau, H)$ имеет вид: $nz = Bz + Cz_\tau, z(\tau, H) = y(\tau, H) - y^*(\tau, H)$. В свою очередь матрицы $B(t)$ и $C(t)$ определяются равенствами: $B(\tau) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial \left(y_{i\tau} \frac{F(y, H) * y_\tau}{y_\tau * y_\tau} \right)}{\partial y}, C(\tau) = \frac{\partial \left(y_{i\tau} \frac{F(y, H) * y_\tau}{y_\tau * y_\tau} \right)}{\partial y_\psi} Q_\tau^{-1}(\tau) F(y^*(\tau), \mu)$.

Так как первые m столбцов матрица линеаризованной правой части линейно независимы, то существует одно тривиальное собственное значение равное нулю и отвечает собственному вектору $(z_\tau, 0)$. Чтобы система (9) стабилизировала цикл $y^*(\tau, H)$ достаточно, чтобы все нетривиальные вещественные части значений спектра были отрицательны. Функция $z(\tau, H)$

может быть разложена в сходящийся ряд Фурье: $z(\tau) = \sum_{j=0}^m z_j e^{i \frac{j\tau}{2}}$, где $z_j = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(\tau) e^{i \frac{j\tau}{2}} d\tau$,

$\lambda \sum_{j=0}^m z_j e^{i \frac{j\tau}{2}} = B \sum_{j=0}^m z_j e^{i \frac{j\tau}{2}} + C \frac{ij}{2} \sum_{j=0}^m z_j e^{i \frac{j\tau}{2}}$. Тогда задача на собственные значения имеет вид:

$\lambda_j z_j = B z_j + C \frac{ij}{2} z_j$. Якобиан правой части в точке $(y^*(\tau, H), 0)$ имеет вид:

$$J(H, k_\tau) = \begin{pmatrix} B + i \frac{k_\tau}{2} C & e \\ \sum_{i=1}^m a_i (B + i \frac{k_\tau}{2} C) & \beta \end{pmatrix}_{y=y^*, q=0}.$$

Детерминант матрицы $(B + i \frac{k_\tau}{2} C)$ равен нулю, поэтому, как минимум одно собственное значение матрицы $J(H, k_\tau)$ равно нулю. Таким образом, для того, чтобы стабилизирующая система была устойчивая в стационарном решении в некоторой окрестности параметра H^* , необходимо найти такие вектора e, a, β — чтобы все действительные части нетривиальных собственных значений Якобиана были меньше нуля при $H = H^*$.

Вернемся к задаче стабилизации периодических решений в задаче о колебаниях обратного маятника. В этом случаи производная система имеет вид:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_{1\tau} \frac{x_{1\tau} * x_2 + x_{2\tau} * (k - sG(\tau, H) sgn[\sin(x)])}{(x_{1\tau})^2 + (x_{2\tau})^2},$$

$$\dot{x}_2 = (k - sG(\tau, H) sgn[\sin(x)]) x_1 - x_{2\tau} \frac{x_{1\tau} * x_2 + x_{2\tau} * (k - sG(\tau, H) sgn[\sin(x)])}{(x_{1\tau})^2 + (x_{2\tau})^2},$$

$$x_1|_{\tau=0} = x_1|_{\tau=2\pi}, \quad x_2|_{\tau=0} = x_2|_{\tau=2\pi}, \quad x_{1\tau}|_{\tau=0} = x_{1\tau}|_{\tau=2\pi}, \quad x_{2\tau}|_{\tau=0} = x_{2\tau}|_{\tau=2\pi}.$$

Следовательно, стабилизирующая система примет следующий вид:

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_{1\tau} \frac{x_{1\tau} * x_2 + x_{2\tau} * (k - sG(\tau, H) sgn[\sin(x)])}{(x_{1\tau})^2 + (x_{2\tau})^2} + \varepsilon_{x_1} q,$$

$$\dot{x}_2 = (k - sG(\tau, H) \operatorname{sgn}[\sin(x)])x_1 - x_{2\tau} \frac{x_{1\tau} * x_2 + x_{2\tau} * (k - sG(\tau, H) \operatorname{sgn}[\sin(x)])}{(x_{1\tau})^2 + (x_{2\tau})^2} + \varepsilon x_2 q,$$

$$\dot{q} = a_x \left(x_2 - x_{1\tau} \frac{x_{1\tau} * x_2 + x_{2\tau} * (k - sG(\tau, H) \operatorname{sgn}[\sin(x)])}{(x_{1\tau})^2 + (x_{2\tau})^2} \right) +$$

$$+ a_y \left((k - sG(\tau, H) \operatorname{sgn}[\sin(x)])x_1 - x_{2\tau} \frac{x_{1\tau} * x_2 + x_{2\tau} * (k - sG(\tau, H) \operatorname{sgn}[\sin(x)])}{(x_{1\tau})^2 + (x_{2\tau})^2} \right) + \beta q,$$

$$x_1|_{\tau=0} = x_1|_{\tau=2\pi}, \quad x_2|_{\tau=0} = x_2|_{\tau=2\pi}, \quad q|_{\tau=0} = q|_{\tau=2\pi},$$

$$x_{1\tau}|_{\tau=0} = x_{1\tau}|_{\tau=2\pi}, \quad x_{2\tau}|_{\tau=0} = x_{2\tau}|_{\tau=2\pi}, \quad q_{\tau}|_{\tau=0} = q_{\tau}|_{\tau=2\pi}.$$

Решения производной и стабилизирующей системы производилось стандартными методами в системе Wolfram Mathematica 10.0. На рисунке 2 представлены периодические решения уравнения (1) с периодами T_1 и T_2 , с начальными условиями лежащими на прямых $\dot{\varphi} = 5\varphi$ и $\dot{\varphi} = 10\varphi$, а пара параметров a и ω для каждой из них найдены из условий при $H = 0.05\text{м}$. Результаты численных экспериментов, приведены на следующих рисунках.

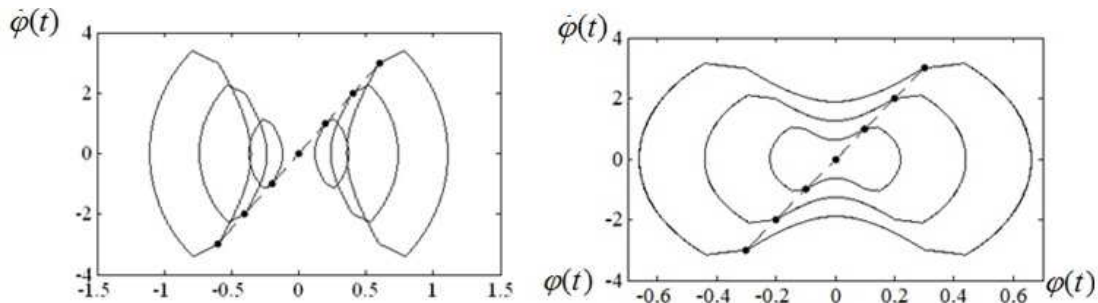


Рис. 2. График стабилизированного решения а) с периодом $2\pi/\omega$ и начальными условиями $\dot{\varphi} = 5\varphi$; б) с периодом $4\pi/\omega$ и начальными условиями $\dot{\varphi} = 10\varphi$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе показано, что гистерезисные звенья в управляющих элементах существенно влияют на динамику стабилизируемой системы — обратного маятника, управляемого посредством движений нижней точки крепления. В работе установлены соотношения между параметрами управляющего блока гистерезисной природы и параметрами управляющего воздействия (амплитудой и частотой), обеспечивающих стабилизацию системы (построены соответствующие зоны устойчивости). Значения параметров, соответствующие границе означенных зон устойчивости, отвечают периодическим режимам. Для стабилизации этих режимов удалось применить известный метод Магницкого, основанный на расширении фазового пространства исходной системы и введении новой переменной, стабилизирующей решение исходной системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стабилизация перевернутого маятника вертикальными осцилляциями с помощью гистерезисного управления / Д. В. Грачиков, Г. Н. Лебедев, М. Е. Семенов, О. И. Канищева // Наукоемкие технологии. — 2012. — Т. 13, № 3. — С. 27–34.
2. Зоны устойчивости и периодические решения перевернутого маятника с гистерезисным управлением / М. Г. Матвеев, М. Е. Семенов, Д. В. Шевлякова, О. И. Канищева // Мехатроника, автоматизация. Управление. — 2012. — № 11. — С. 8–14.

3. Модель динамики обратного маятника с гистерезисным управлением / М. Е. Семенов и др. // Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физика, математика. — 2016. — № 4. — С. 165–177.
4. Магницкий, Н. А. Новые методы хаотической динамики / Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров. — М. : Едиториал УРСС, 2004. — 320 с.
5. Дубровский, А. Д. Подход к стабилизации неустойчивых периодических решений автономных систем дифференциальных уравнений с частными производными / А. Д. Дубровский // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 12. — С. 1716–1722.
6. Красносельский, М. А. Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. — М. : Наука, 1970. — 304 с.
7. Капица, П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса / П. Л. Капица // ЖЭТФ. — 1951. — Т. 21. — С. 588–597.
8. Капица, П. Л. Маятник с вибрирующим подвесом / П. Л. Капица // УФН. — 1951. — Т. 44 — С. 7–20.
9. Стабилизация, рассинхронизация и оптимальное управление обратным маятником с гистерезисными свойствами / М. Е. Семенов, Д. В. Шевлякова, О. И. Канищева, Д. В. Грачиков // Вестник Воронежского государственного университета. Серия : Системный анализ и информационные технологии. — 2013. — № 1. — С. 29–37.
10. Красносельский, М. А. Системы с гистерезисом / М. А. Красносельский, А. В. Покровский. — М. : Наука. 1983. — 271 с.
11. Магнус, К. Колебания : Введение в исследование колебательных систем / К. Магнус. — М. : Мир, 1982. — 304 с.
12. Плисс, В. А. Нелокальные проблемы теории колебаний / В. А. Плисс. — М. : Наука, 1964. — 367 с.

REFERENCES

1. Grachikov D.V., Lebedev G.N., Semenov M.E., Kanischeva O.I. Stabilization of the inverted pendulum by vertical oscillations with the help of hysteresis control. [Grachikov D.V., Lebedev G.N., Semenov M.E., Kanischeva O.I. Stabilizaciya perevernutogo mayatnica verticalnymi oscillyatorami s pomoschu gisterezisnogo upravleniya]. *Naukoemkie tekhnologii — Science-intensive technologies*, 2012, vol. 13, no. 3, pp. 27–34.
2. Matveev M.G., Semenov M.E., Shevljakova D.V., Kanischeva O.I. Zones of stability and periodic solutions of an inverted pendulum with hysteresis control. [Matveev M.G., Semenov M.E., Shevljakova D.V., Kanischeva O.I. Zony ustojchivosti i periodicheskie resheniya perevernutogo mayatnica s gisterezisnum upravleniem]. *Mexatronika, avtomatizaciya. Upravlenie — Mechatronics, automation. Management*, 2012, no. 11, pp. 8–14.
3. Semenov M.E., Hatif Z., Reshetova O.O., Demchuk A.A., Meleshenko P.A. (Model of the dynamics of the inverse pendulum with hysteresis control. [Semenov M.E., Hatif Z., Reshetova O.O., Demchuk A.A., Meleshenko P.A. Model dinamiki obratnogo myatnika s gisterezisnjm upravleniem]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Fizika. Matematika — Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*, 2016, no. 4, pp. 165–177.
4. Magnitsky N.A., Sidorov S.V. New methods of chaotic dynamics. [Magnitsky N.A., Sidorov S.V. Nove metody haoticheskoy dinamiki]. Moscow, 2004, 320 p.
5. Dubrovsky A.D. Approach to the stabilization of unstable periodic solutions of autonomous systems of partial differential equations. [Dubrovsky A.D. Podhod k stabilizacii neustojchivih periodicheskikh reshenij avtonomnih system differencialnyh uravnenij s chastnymi proizvodnymi]. *Differencial'nye uravneniya — Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 12, pp. 1716–1722.
6. Krasnosel'skii M.A., Burd V.S., Kolesov Ju.S. Nonlinear Almost Periodic Oscillations. [Krasnosel'skii M.A., Burd V.S., Kolesov Ju.S. Nelineyjnye pocthi periodicheskie kolebaniya]. Moscow, 1970, 304 p.

7. Kapitza P.L. Dynamic stability of a pendulum when its point of suspension vibrates. [Kapitza, P. L. Dinamicheskaya ustoychivost' mayatnika pri koleblyushheyjsya tochke podvesa]. *Zhurnal e'ksperimental'noj i teoreticheskoy fiziki — Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1951, vol. 21, pp. 588–597.
8. Kapitza P.L. Pendulum with a vibrating suspension. [Kapitza P.L. Mayatnik s vibriruyushhim podvesom]. *Uspehi fizicheskix nauk — Physics-Uspexhi*, 1951, vol. 44, pp. 7–20.
9. Semenov M.E., Shevljakova D.V., Kanishcheva O.I., Grachikov D.V., Stabilization, desynchronization and optimal control of the reverse pendulum with hysteresis properties. [Semenov M.E., Shevljakova D.V., Kanishcheva O.I., Grachikov D.V., Stabilizaciya, rassinhronizaciya i optimalnoe upravlenie obratnym mayatnikom s gisterезisnymi svojstvami]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii — Proceedings of Voronezh State University. Series: Systems analysis and information technologies*, 2013, no. 1, pp. 29–37.
10. Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. Systems with Hysteresis. [Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. Sistemy s gisterезisom]. Moscow, 1983, 271 p.
11. Magnus K. Vibrations: An Introduction to the study of oscillating systems. [Magnus K. Kolebaniya: Vvedenie v issledovanie kolebatel'nyx sistem]. Moscow, 1982, 304 p.
12. Pliss V.A. Nonlocal problems of the theory of oscillations. [Pliss V.A. Nelokal'nye problemy teorii kolebaniy]. Moscow, 1964, 367 p.

Семенов Михаил Евгеньевич, доктор физико-математических наук, профессор кафедры 11 теоретической гидрометеорологии ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия; профессор кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия; ведущий научный сотрудник ФГБУН Федерального исследовательского центра «Единая геофизическая служба Российской академии наук»

E-mail: mkl150@mail.ru

Semenov Mikhail E., Theoretical Hydrometeorology Department, Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy, Voronezh; Digital Technologies Department, Voronezh State University, Mathematics Department, Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering, Prof., senior professor, leading researcher Geophysical Survey of Russia Academy of Sciences, Voronezh, Russia

E-mail: mkl150@mail.ru

Канищева Олеся Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент 206 кафедры ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия

Kanishcheva Olesya I., Department of 206, Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy, PhD, docent, Voronezh, Russia

*Мелешенко Петр Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры 122 средств связи (и авиационных комплексов связи) ВУНЦ ВВС «ВВА им. проф. Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина», Воронеж, Россия; доцент кафедры цифровых технологий Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: melechr@yandex.ru*

*Meleshenko Peter A., Communication Department, Zhukovsky-Gagarin Air Force Academy, Voronezh, Russia; Digital Technologies Department, Voronezh State University, PhD, docent, Voronezh, Russia
E-mail: melechr@yandex.ru*

*Решетова Ольга Олеговна, аспирант факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета, Воронеж, Россия
E-mail: tribunskih1993@mail.ru*

*Reshetova Olga O., Postgraduate student of the Department of Computer Science, Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: tribunskih1993@mail.ru*

Хатиф Зайнип, аспирант Багдадского университета, Багдад, Ирак

Hatif Zaynip, Postgraduate student, Baghdad University, Baghdad, Irak